

Εργασία 1

ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΗ ΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

1.1 Μέθοδος του μέσου σημείου

Ασκήσεις 1.1 - 1

1. Με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 4x + 4$$

να προσδιοριστεί κατάλληλο διάστημα στο οποίο να εφαρμόζεται η μέθοδος του μέσου σημείου. Στη συνέχεια να προσδιοριστεί μία ρίζα της f . Η διαδικασία να σταματήσει στην 5 επανάληψη.

2. Όμοια θεωρώντας την εξίσωση $x^3 - 7 = 0$, προσδιορίστε κατά προσέγγιση τη ρίζα $7^{1/3}$. Η διαδικασία να σταματήσει στην 6η επανάληψη και να γίνει σύγκριση του αποτελέσματος με τη θεωρητική τιμή.

3. Να υπολογιστεί ο απαιτούμενος αριθμός των επαναλήψεων, έτσι ώστε ο προσδιορισμός της ρίζας της εξίσωσης $x^3 - x - 1 = 0$ στο διάστημα $[1, 2]$ να παρουσιάζει ακρίβεια $\varepsilon = 10^{-2}$ (βλέπε Παράγραφος 1.2.1). Στη συνέχεια να υπολογιστεί η ρίζα αυτή.

4. Να εξετάσετε αν εφαρμόζεται το Θεώρημα 1.2 - 1 για τη συνάρτηση $h(x) = (x - 3)^2$ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

1.2 Μέθοδος των διαδοχικών προσεγγίσεων

Ασκήσεις 1.2 - 1

1. Έστω η εξίσωση $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$ που γράφεται ως

$$x = 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}.$$

Να υπολογιστεί μία θετική ρίζα της, προσδιορίζοντας μία κατάλληλη αρχική τιμή γραφικά.

2. Έστω η εξίσωση $x^3 + x - 1 = 0$ με μια κατά προσέγγιση πραγματική ρίζα την 0.682328. Δείξτε ότι ορίζεται η επαναληπτική σχέση

$$x_{i+1} = g(x_i) = \frac{1}{1 + x_i^2}$$

και εκλέγοντας ως $x_0 = 1$, υπολογίστε τα x_1 , x_2 και x_3 .

3. Έστω η εξίσωση $x^4 + 2x^2 - x - 3 = 0$ που γράφεται ως:

$$i) \quad x = (3 + x - 2x^2)^{1/4} \qquad iii) \quad x = [(3 + x - x^4) / 2]^{1/2}$$

$$ii) \quad x = \left(\frac{3 + x}{x^2 + 2} \right)^{1/2}.$$

Αν $x_0 = 1$, για κάθε περίπτωση να οριστεί η αντίστοιχη επαναληπτική σχέση και σύμφωνα με αυτή να υπολογιστεί ο όρος x_3 . Ποια μορφή προσεγγίζει καλύτερα τη ρίζα της εξίσωσης;

1.3 Μέθοδος του Newton

Ασκήσεις 1.3 - 1

1. Εφαρμόστε τη μέθοδο του Newton για να λύσετε τις ασκήσεις 1 και 2 της Παραγράφου 1.1 και την 3 της Παραγράφου 1.2 ορίζοντας κατάλληλες αρχικές τιμές και χρησιμοποιώντας τον ίδιο αριθμό επαναλήψεων. Συγκρίνατε τα αποτελέσματα.

2. Έστω η εξίσωση

$$x^2 - 3x - e^x + 2 = 0$$

Προσδιορίστε γραφικά το αντίστοιχο διάστημα ύπαρξης των ριζών. Στη συνέχεια να λυθεί η εξίσωση με τη μέθοδο των χορδών και τη μέθοδο της Regula Falsi και να γίνει συγκριτικός πίνακας αποτελεσμάτων για κάθε μέθοδο (προαιρετική).

3. Σύμφωνα με τον τύπο (1.4 – 6) να υπολογιστεί η $2^{1/5}$, όταν $x_0 = 1$.

Η διαδικασία να σταματήσει στην 4η επανάληψη και να γίνει σύγκριση του αποτελέσματος με τη θεωρητική τιμή.

4. Να λυθεί με τη μέθοδο του Schröder - Εξίσωση (1.4–9) και την τροποποιημένη μέθοδο του Newton - (1.4 – 10) - η εξίσωση

$$x^2 + 2xe^x + e^{2x} = 0, \quad \text{όταν } x_0 = 0 \quad \text{και} \quad \varepsilon = 10^{-3}$$

(προαιρετική).

Σημείωση 1.3 - 1

Σε όλους τους υπολογισμούς να γίνεται στρογγυλοποίηση των αποτελεσμάτων στα 5 δεκαδικά ψηφία.