ΜΠΡΑΤΣΟΣ ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ Τ.Ε.Ι. ΑΘΗΝΑΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

στο

MATLAB

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγικές έννοιες

Το MATLAB είναι ένα διαδραστικό πρόγραμμα που χρησιμοποιείται για αριθμητικούς υπολογισμούς, γραφικές παραστάσεις δεδομένων κ.λπ., ενώ έχει επίσης τη δυνατότητα προγραμματισμού. Όλα αυτά το καθιστούν ένα ισχυρό και χρήσιμο εργαλείο στις μαθηματικές και φυσικές επιστήμες. Ο αναγνώστης για μια πλήρη ανάλυση του MATLAB παραπέμπεται στην ιστοσελίδα του

http://www.mathworks.com

Μετά την κλήση του MATLAB εμφανίζονται τα παρακάτω παράθυρα:

1. Το παράθυρο εντολών (Command Window) στα δεξιά. Οι εντολές εισάγονται στο παράθυρο αυτό μετά την προτροπή (prompt) $\gg$.
   Ενεργοποίηση του προγράμματος γίνεται με το ENTER.
   Τα αποτελέσματα τυπώνονται επίσης στο παράθυρο αυτό.

2. Ένα παράθυρο πάνω αριστερά που δείχνει τον τρέχοντα φάκελο (Current Directory) με τα αρχεία. Σε περίπτωση που δεν υπάρχει, επιλέξτε το Current Directory από το menu.

3. Ένα παράθυρο με το χώρο εργασίας (workspace). Όμοια, αν δεν υπάρχει, επιλέξτε το Workspace από το menu.

4. Ένα παράθυρο που δείχνει το ιστορικό των εντολών (Command History). Όμοια από το Command History στην επιλογή View.

1.1 Αριθμητικές πράξεις

1.1.1 Βασικές πράξεις

Οι γνωστές πράξεις της πρόσθεσης, της αφαίρεσης, του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης γίνονται ως εξής:

πρόσθεση	+	πολλαπλασιασμός	*
αφαίρεση	-	διαίρεση	/

Η δύναμη a^{ν} συμβολίζεται με $a \wedge \nu$.

Τα αποτελέσματα με μεγάλη, αντίστοιχα μικρή ακρίβεια ορίζονται με τις εντολές:

$\gg$ format long αντίστοιχα $\gg$ format sort

ενώ, όταν πρόκειται για πολύ μεγάλους, αντίστοιχα μικρούς αριθμούς, με:

$\gg$ format long e αντίστοιχα $\gg$ format sort e

Η φανταστική μονάδα συμβολίζεται με i ή j, οπότε οι μιγαδικοί αριθμοί της μορφής $a + bi$ με την εντολή:

$\gg$ syms a b real

$\gg a + b * i$

Προτεραιότητα των πράξεων

Στο MATLAB ακολουθείται η παρακάτω σειρά εκτέλεσης των πράξεων:

i) πρώτα εκτελούνται οι πράξεις μέσα σε παρενθέσεις από τα μέσα προς τα έξω.

ii) Οι υψώσεις σε δύναμη.

iii) Οι πολλαπλασιασμοί και οι διαιρέσεις από τα αριστερά προς τα δεξιά και τέλος

iv) εκτελούνται οι προσθέσεις και οι αφαιρέσεις από τα αριστερά προς τα δεξιά.

Κεφάλαιο 2

Συναρτήσεις

2.1 Γενικές έννοιες

2.1.1 Ορισμός μεταβλητής

Για τα ονόματα μεταβλητών χρησιμοποιούνται κυρίως τα γράμματα του αγγλικού αλφαβήτου. Το MATLAB κάνει διάκριση μεταξύ κεφαλαίων και μικρών γραμμάτων, δηλαδή οι μεταβλητές x και X είναι διαφορετικές μεταξύ τους. Μια μεταβλητή, έστω x, ορίζεται με την εντολή:

$\gg$ syms x

2.1.2 Ορισμός συνάρτησης

Μια συνάρτηση, έστω f, όπου $f = x^2 + 1$ ορίζεται με τις εντολές:

$\gg$ syms x

$\gg y = x^2 + 1$

διαφορετικά με την εντολή *inline* ως

$\gg$ syms x

$\gg f = inline\,('x^2 + 1')$

αποτέλεσμα

$f(x) =$

Inline function:

$f(x) = x^2 + 1$

όπου στη συνέχεια είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί ο τύπος της για τον υπολογισμό διάφορων στοιχείων της, όπως $f(3)$ κ.λπ.

Με την εντολή *Clear* διαγράφεται κάθε ορισμός της συνάρτησης f.

Κεφάλαιο 3

Γραφικές παραστάσεις

3.1 Γραφικά σε δύο διαστάσεις

3.1.1 Η εντολή plot

Η εντολή *plot* δημιουργεί το διάγραμμα μιας επίπεδης καμπύλης στα σημεία με συντεταγμένες (x_i, y_i); $i = 1, 2, \ldots, n$ δημιουργώντας βάσει αυτών τα διανύσματα $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$ και $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \ldots, y_n]^T$, όπως:

$\gg$ x=[0 1 2.3 4]

$\gg$ y=[0 1.5 3 5]

$\gg$ plot(x,y)

Στην περίπτωση που ζητείται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = f(x)$, δημιουργείται αρχικά το διάνυσμα $\mathbf{x}$ και στη συνέχεια το διάνυσμα $\mathbf{y} = f(x_i)$.

Παράδειγμα 3.1.1 - 1

Ζητείται το διάγραμμα της συνάρτησης $f(x) = x \sin x$ στο διάστημα $[0, \pi]$, όταν η διαμέριση του διαστήματος ολοκλήρωσης γίνεται με βήμα $h = \pi/100$. Στην περίπτωση αυτή δίνονται διαδοχικά οι παρακάτω εντολές:

$\gg x = 0 : pi/100 : pi;$

$\gg y = x * \sin(x);$

$\gg \mathrm{plot}(x, y)$

Στις γραφικές παραστάσεις είναι δυνατή η δημιουργία ετικετών (labels) σύμφωνα με τον Πίνακα 3.1.1 - 1. Αν στο Παράδειγμα 3.1.1 - 1 ζητείται η η ονομασία των αξόνων, τότε μετά την εντολή:

$\gg \mathrm{plot}(x, y)$

γράφεται

Πίνακας 3.1.1 - 1: βασικών εντολών δημιουργίας γραφικών παραστάσεων σε 2-διαστάσεις

Εντολή	**Περιγραφή**	**Εφαρμογή**
plot	δημιουργεί το διάγραμμα	plot(x,y)
title	προσθήκη τίτλου	title(′διάγραμμα συνάρτησης′)
xlabel	ονομασία άξονα των x	xlabel($'x'$)
ylabel	ονομασία άξονα των y	ylabel($'y'$)
legend	προσθήκη ετικέτας	legent($'y = x\, \sin x'$)
text	προσθήκη κειμένου στη θέση (x_i, y_i)	text$(pi/4, pi/3,'\, o')$
grid	δημιουργία πλέγματος ή μη	grid / grid on / grid off
figure	άνοιγμα νέου διαγράμματος	figure(2)
hold	ενεργοποίση ή μη διαγράμματος	hold on / hold off
axis	άξονες	axis
axis	ίσες μονάδες αξόνων	axis equal
axis	διαγραφή αξόνων	axis off
axis	όρια αξόνων	axis($[x_{\min}, x_{\max}, y_{\min}, y_{\max}]$)

$\gg$ xlabel($'x'$)
$\gg$ xlabel($'y = x\, \sin x'$)

3.1.2 Χρώματα, σύμβολα και είδη γραμμών

Η εντολή *plot* δημιουργεί διάγραμμα με μπλε συνεχή γραμμή. Στις περιπτώσεις που ζητείται η αλλαγή του χρώματος (color), το σύμβολο (stype) και το είδος της γραμμής (ltype), τότε χρησιμοποιείται η εντολή:

$\gg$ plot$(x, y,'\, [color][stype][ltype]')$

Οι επί μέρους εντολές δίνονται στους Πίνακες 3.1.2 - 1 έως 3.1.2 - 3.

Παράδειγμα 3.1.2 - 1

Η εντολή:

$\gg$ plot$(x, y,'\, r - -')$

δίνει έντονα διακεκομμένη κόκκινη γραμμή, ενώ η

Πίνακας 3.1.2 - 1: εντολών χρώματος (color)

[color]	**color**	**χρώμα**
b	blue	μπλε
g	green	πράσινο
r	red	κόκκινο
c	cyan	κυανό
m	magenta	μοβ
y	yellow	κίτρινο
k	black	μαύρο
w	white	άσπρο

Πίνακας 3.1.2 - 2: εντολών συμβόλου (stype)

[stype]	**symbol**	**σύμβολο**
.	point	τελεία
o	circle	κύκλος
x	x-mark	$\times$
+	plus	συν
*	star	αστερίσκος
h	hexagram	εξάλφα
p	pentagram	πεντάλφα
$\vee \wedge < >$	triangle $\vee$	τρίγωνο άνω κ.λπ.

Πίνακας 3.1.2 - 3: εντολών είδους γραμμής (ltype)

[ltype]	**line type**	**είδος γραμμής**
-	solid	συνεχής
:	dotted	λεπτή διακεκομμένη
–	dashed	έντονα διακεκομμένη
-.	dashdot	διακεκομμένη - τελεία

Πίνακας 3.1.3 - 1: εντολών ραβδοδιαγραμμάτων

εντολή	**περιγραφή**
bar(x)	κάθετο διδιάστατο ραβδοδιάγραμμα. Απεικονίζει τις n-στήλες του πίνακα $x \in \Re^{m \times n}$ σε m-ομάδες από n-κατακόρυφες ράβδους
barh(x)	όμοια με bar(x) σε n-οριζόντιες ράβδους
bar3(x)	κάθετο τρισδιάστατο ραβδοδιάγραμμα

$\gg \mathrm{plot}(x, y,' c * :')$
κυανή λεπτή διακεκομμένη γραμμή και το σύμβολο $*$ σε κάθε σημείο.

3.1.3 Ραβδοδιαγράμματα

Απεικονίζουν γραφικά με ορθογώνια (ράβδους) τα δεδομένα διανυσμάτων και πινάκων. Χρησιμοποιούνται κυρίως στη Στατιστική, στο γραμμικό φάσμα της σειράς Fourier κ.λπ. Οι κυριότερες εντολές δίνονται στον Πίνακα 3.1.3 - 1.

Παράδειγμα 3.1.3 - 1

$\gg x = 0 : 1 : 10;$
$\gg y = \exp(-x^2);$
$\gg \mathrm{bar}(x, y)$
απεικονίζει με ραβδοδιάγραμμα στα σημεία 1, 2, ..., 10 τις τιμές $\exp\left(-x_i^2\right)$; $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ 10.$[1]

3.1.4 Τομεογράμματα

Οι εντολές *pie*, αντίστοιχα *pie*3 ορίζουν τα τομεογράμματα σε 2, αντίστοιχα 3 διαστάσεις, όπως:
$\gg x = [19.5, 79.45, 129];$
$\gg pie(x)$
αντίστοιχα
$\gg pie3(x)$

[1] Για το χρώμα του ραβδοδιαγράμματος βλέπε το help colormap του MATLAB.

Κεφάλαιο 4

Εφαρμογές και προγράμματα με το MATLAB

4.1 Προσεγγιστική λύση εξισώσεων

4.1.1 Μέθοδος του μέσου σημείου

Η μέθοδος που είναι γνωστή σαν **μέθοδος του μέσου σημείου** η και **μέθοδος της διχοτόμου** (bisection method), βασίζεται στο παρακάτω θεώρημα του Διαφορικού Λογισμού:

Θεώρημα 4.1.1-1 (Bolzano). *Αν μία συνάρτηση, έστω f, με πεδίο ορισμού $[a, b]$ είναι συνεχής για κάθε $x \in [a, b]$ και ισχύει $f(a)f(b) < 0$, τότε υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα της f, έστω ξ με $\xi \in (a, b)$.*

Αν υποτεθεί ότι η ρίζα είναι **απλή**[1], ο προσδιορισμός της ρίζας είναι δυνατόν να γίνει σύμφωνα με τη διαδικασία του Αλγόριθμου 4.1.1-1.

Ασκήσεις

1. Να γραφεί πρόγραμμα με το MATLAB για τον Αλγόριθμο 4.1.1-1.

2. Να λυθούν οι αντίστοιχες ασκήσεις του μαθήματος.

4.1.2 Μέθοδος των διαδοχικών προσεγγίσεων

Έστω η εξίσωση $f(x) = 0$ που γράφεται στη μορφή

$$x = g(x) \tag{4.1.2 - 1}$$

[1] Για πολλαπλή ρίζα βλέπε άσκηση 7 στο τέλος της παραγράφου.

Αλγόριθμος 4.1.1-1 (μεθόδου του μέσου σημείου)

Δεδομένα: $a_1 = a, \quad b_1 = b$ και μέγιστος αριθμός επαναλήψεων N

Έστω $a_1 = a, \quad b_1 = b$

Για $i = 1,\, 2,\, \ldots, N$

$x_i = \dfrac{a_i + b_i}{2}$ Αν $f\left(x_i\right) = 0$ Τύπωσε "ΡΙΖΑ" x_i STOP

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: το $f\left(x_i\right)$ θα πρέπει λόγω της υπόθεσης ότι η ρίζα είναι απλή πρέπει να έχει το ίδιο πρόσημο με το $f\left(a_i\right)$ ή το $f\left(b_i\right)$

Αν $f\left(x_i\right) f\left(a_i\right) > 0$ τότε η ρίζα $x^* \in \left(x_i, b_i\right),$

οπότε $a_{i+1} = x_i$ και $b_{i+1} = b_i$

διαφορετικά $a_{i+1} = a_i$ και $b_{i+1} = x_i$

τέλος i

Τύπωσε "ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΡΙΖΑΣ" x_i

όπου g είναι μία συνεχής συνάρτηση που λέγεται και επαναληπτική συνάρτηση. Αν x^* είναι μία ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$, επειδή $f(x) = x - g(x)$, θα πρέπει $g\left(x^*\right) = x^*$. Τότε η x^* λέγεται **σταθερό σημείο** της $g(x)$.

Θεωρώντας τώρα μία αρχική τιμή, έστω x_0, η ακολουθία των διαδοχικών προσεγγίσεων προκύπτει από την (4.1.2−1) και ορίζει την επαναληπτική σχέση

$$x_{i+1} = g\left(x_i\right). \tag{4.1.2 - 2}$$

Η μέθοδος αυτή του προσδιορισμού της ρίζας μιας εξίσωσης είναι γνωστή σαν η **μέθοδος των διαδοχικών προσεγγίσεων** (fixed point iteration).

Παράδειγμα 4.1.2 - 1

Έστω η εξίσωση

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$$

που γράφεται

$$x = g(x) = \frac{20}{x^2 + 2x + 10}. \tag{4.1.2 - 3}$$

Τότε από την $(4.1.2 - 3)$ προκύπτει η επαναληπτική σχέση

$$x_{i+1} = \frac{20}{x_i^2 + 2x_i + 10}. \tag{4.1.2 - 4}$$

Αν $x_0 = 1$ η αρχική τιμή από την $(4.1.2 - 4)$ έχουμε τα αποτελέσματα του Πίνακα 4.1.2 - 1, σύμφωνα με τον οποίο προκύπτει ότι η ζητούμενη ρίζα με

Πίνακας 4.1.2 - 1: αποτελέσματα μεθόδου διαδοχικών προσεγγίσεων

i	x_i	i	x_i
1	1.538 461 538	13	1.368 817 874
⋮	⋮	⋮	⋮
11	1.368 857 688	23	1.368 808 110
12	1.368 786 102	24	*1.368 808 107*

ακρίβεια 6 δεκαδικών ψηφίων είναι η $x^* = \mathit{1.368\,808}$. Ο υπολογισμός με το MATLAB δίνεται στο Πρόγραμμα 4.1.2-1.

Πρόγραμμα 4.1.2-1 (μεθόδου των διαδοχικών προσεγγίσεων)

```
>> x=1;
>> for i=1:24
>> y=20/(x^2+2*x+10);
>> x=y;
>> format long
>> y
>> end
```

Ασκήσεις

Να λυθούν οι αντίστοιχες ασκήσεις του μαθήματος.

4.1.3 Μέθοδος του Newton

Η επαναληπτική σχέση που υπολογίζει τη ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ με τη μέθοδο του Newton είναι

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \quad \text{για κάθε} \quad i = 0, 1, \ldots . \tag{4.1.3 - 1}$$

Παράδειγμα 4.1.3 - 1 (υπολογισμός της τετραγωνικής ρίζας αριθμού)

Ο υπολογισμός της τετραγωνικής ρίζας ενός θετικού αριθμού, έστω A, είναι ισοδύναμος με την εύρεση της θετικής ρίζας της εξίσωσης $f(x) = x^2 - A = 0$.

Πίνακας 4.1.3 - 1: Παράδειγμα 4.1.3 - 1: αποτελέσματα μεθόδου του Newton

i	x_i	i	x_i
0	2.0	3	1.4142 1568
1	1.5	4	1.4142 1356
2	1.4166 6667	5	*1.4142 1356*

Τότε, επειδή $f'(x) = 2x$, από τον τύπο $(4.1.3 - 1)$ προκύπτει

$$x_{i+1} = \frac{1}{2}\left(x_i + \frac{A}{x_i}\right); \quad i = 0, 1, \ldots . \tag{4.1.3 - 2}$$

Αν $A = 2$ και $x_0 = 2$, από την $(4.1.3 - 2)$ προκύπτουν τα αποτελέσματα του Πίνακα 4.1.3 - 1, σύμφωνα με τον οποίο ο όρος x_4 δίνει ακρίβεια 8 δεκαδικών ψηφίων.

Η παραπάνω λύση δίνεται στο Πρόγραμμα 4.1.3-1.

Πρόγραμμα 4.1.3-1 (μεθόδου του Newton)

```
>> x=2;
>> for i=1:4
>> y=(x+2/x)/2;
>> x=y;
>> format long
>> y
>> end
```

Ασκήσεις

1. Να λυθούν οι αντίστοιχες ασκήσεις του μαθήματος.

2. Να γραφούν τα προγράμματα για τις μεθόδους των Παραγράφων: 1.4.1 και 1.4.1 του μαθήματος.

Κεφάλαιο 5

Βασικές εντολές του MATLAB

Δίνονται οι κυριότερες εντολές του MATLAB με τη βοήθεια των οποίων είναι δυνατό να γίνουν οι διάφοροι μαθηματικοί υπολογισμοί.

abs

$abs(z)$ υπολογίζει το μέτρο του z.

acos

$acos(z)$ υπολογίζει την αντίστροφη συνάρτηση $\cos^{-1} z$. Τα αποτελέσματα είναι σε rad. Αν ο z είναι πραγματικός αριθμός με $z \in [-1, 1]$, τότε τα αποτελέσματα είναι στο διάστημα $[0, \pi]$.

acosh

$acosh(z)$ όμοια την $\cosh^{-1} z$.

acot

$acot(z)$ όμοια την $\cot^{-1} z$. Τα αποτελέσματα είναι σε rad. Αν ο z είναι πραγματικός αριθμός, τα αποτελέσματα είναι στο διάστημα $(0, \pi)$.

acoth

$acoth(z)$ όμοια την $\coth^{-1} z$.

acsc

$acsc(z)$ όμοια την $\csc^{-1} z$.

acsch

$acsch(z)$ όμοια την $\operatorname{csch}^{-1} z$.

asec

$asec(z)$ όμοια την $\sec^{-1} z$.

asech

$asech(z)$ όμοια την $\operatorname{sech}^{-1} z$.

asin

$asin(z)$ όμοια την $\sin^{-1} z$. Τα αποτελέσματα είναι σε rad. Αν $z \in \Re$ με $z \in [-1, 1]$, τότε τα αποτελέσματα είναι στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

asinh

$asinh(z)$ όμοια την $\sinh^{-1} z$.

atan

$atan(z)$ όμοια την $\tan^{-1} z$. Τα αποτελέσματα σε rad. Αν $z \in \Re$, τότε τα αποτελέσματα είναι στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

atanh

$atanh(z)$ υπολογίζει την αντίστροφη συνάρτηση $\tanh^{-1} z$.

besselj

besselj(ν, z) ή *besselj*$(\nu, z, 1)$ υπολογίζει τη συνάρτηση του Bessel του 1ου είδους $J_\nu(z)$.

Η συνάρτηση επαληθεύει τη διαφορική εξίσωση

$$z^2 y''(z) + z y'(z) + \left(z^2 - \nu^2\right) y(z) = 0.$$

bessely

bessely(ν, z) ή *bessely*$(\nu, z, 1)$ υπολογίζει τη συνάρτηση του Bessel του 2ου είδους $K_\nu(z)$.

Η συνάρτηση επαληθεύει τη διαφορική εξίσωση

$$z^2 y''(z) + z y'(z) - \left(z^2 + \nu^2\right) y(z) = 0.$$

beta

beta(a, b) υπολογίζει τη βήτα συνάρτηση του Euler, που ορίζεται ως

$$B(a,b) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\, dt = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}\,,$$

όπως:

$\gg$ beta(3, 2)

ceil

ceil(x) στρογγυλεύει στον αμέσως μεγαλύτερο ακέραιο του x.

collect

collect$(expr)$ ομαδοποιεί τα δεδομένα $expr$, όπως:

$\gg$ collect$(x^3 * (x-1)^4)$

conj

conj(z) δίνει το συζυγή $\overline{z}$ του μιγαδικού z.

cos

cos(z) υπολογίζει το συνημίτονο του z.

cot

cot(z) υπολογίζει τη συνεφαπτομένη του z.

coth

coth(z) υπολογίζει την υπερβολική συνεφαπτομένη του z.

csc

$csc(z)$ υπολογίζει τη συνάρτηση $\csc z = 1/\sin z$.

csch

$csch(z)$ όμοια τη $\mathrm{csch} z = 1/\sinh z$.

dblquad

$dblquad(f, x_{\min}, x_{\max}, y_{\min}, y_{\max})$ ή $dblquad(f, x_{\min}, x_{\max}, y_{\min}, y_{\max}, tol)$
ή
$dblquad(f, x_{\min}, x_{\max}, y_{\min}, y_{\max}, tol, method)$ υπολογίζει αριθμητικά το διπλό ολοκλήρωμα

$$\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} f(x, y)\, dy\, dx$$

tol η επιθυμητή ακρίβεια της προσέγγισης στις περιπτώσεις που δεν χρησιμοποιείται η ακρίβεια $10e-6$ του προγράμματος.
$method$ η μέθοδος ολοκλήρωσης με τιμή $@quadl$ ή άλλη ορισθείσα.

diff

diff(f) ή *diff(f,x)* υπολογίζει την 1ης-τάξης παράγωγο της f ως προς τη μεταβλητή x, όπως:

≫ syms x

≫ diff(x*exp(-x)) ή ≫ diff(x*exp(-x),x)

αντίστοιχα
diff(f,x,ν) υπολογίζει την ν-τάξης παράγωγο της f ως προς τη μεταβλητή x όπως:

≫ syms x y

≫ $\mathrm{diff}(\log(x^2 + y^2), x, 3)$

dsolve

$dsolve('eq_1, eq_2, \ldots, eq_n\,','\,cond_1, cond_2, \ldots, cond_n\,','\,u')$ ή
$dsolve('eq_1, eq_2, \ldots, eq_n\,','\,cond_1, cond_2, \ldots, cond_n\,','\,u')$ υπολογίζει αριθμητικά τη λύση μιας ή n-διαφορικών εξισώσεων ως προς την ανεξάρτητη μεταβλητή u.

Η ανεξάρτητη μεταβλητή του προγράμματος είναι η t. Ο τελεστής D σημαίνει 1ης τάξης παράγωγο, ο $D2$ 2ης τάξης κ.λπ. Οι αρχικές συνθήκες (initial conditions) δίνονται με τη μορφή: $y(a) = y_1$, $Dy(a) = y_2$, κ.λπ. Αν οι αρχικές συνθήκες είναι λιγότερες από την τάξη της διαφορικής εξίσωσης, τότε η λύση θα περιέχει και αυθαίρετες σταθερές c_1, c_2, κ.λπ.

Έστω η διαφορική εξίσωση $y' = at$, όταν $y = y(t)$ με αρχική συνθήκη $y(0) = 1$. Τότε η γενική λύση είναι:

$\gg$ syms a

$\gg$ dsolve('Dy=a*t')

ans =

$1/2 * a * t^2 + C1$,

ενώ η μερική:

$\gg$ dsolve('Dy=a*t','y(0)=1')

ans =

$1/2 * a * t^2 + 1$.

Όμοια η μερική λύση της διαφορικής εξίσωσης $y'' + 2y' + y = \sin t$ με αρχικές συνθήκες $y(0) = 0$ και $y'(0) = 1$ είναι:

$\gg$ dsolve('D2y+2*Dy+y=sin(t)','y(0)=0','Dy(0)=1')

ans =

$1/2 * exp(-t) + 3/2 * exp(-t) * t - 1/2 * cos(t)$.

e

Με την εντολή: $exp(1)$

exp

$exp(z))$ υπολογίζει το e^z.

expand

$expand(expr)$ αναπτύσσει τα γινόμενα της έκφρασης $expr$ σε ακέραιες δυνάμεις, όπως:

$\gg$ syms x

$\gg$ expand$((x - y + 2\,x)^4)$

factor

$factor(poly)$ κάνει παραγοντοποίηση του πολυωνύμου "poly", όπως:

$\gg$ syms x
$\gg$ factor$(x^4 - 1)$

factorial

$factorial(n)$ υπολογίζει το $n\,!$.

gamma

$gamma(z)$ υπολογίζει τη συνάρτηση γάμμα

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t}\, dt.$$

imag

$imag(z)$ υπολογίζει το φανταστικό μέρος του μιγαδικού z.

inf

Η εντολή δίνει το σύμβολο του ∞.

int

$int(f, x)$ υπολογίζει το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int f(x)\, dx,$$

όπως:
int$(sin(x)^2, x)$, int$[x^3 * exp(-x), x)$ κ.λπ.
$int(f, x_{\min}, x_{\max})$ υπολογίζει το ορισμένο ολοκλήρωμα

$$\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} f(x)\, dx,$$

όπως:
int$(sin(x)^2, x, 0, pi)$, int$(x^3 * exp(-x), x, 0, 1)$ κ.λπ.,
$int(int(f, y, y_{\min}, y_{\max}), x, x_{\min}, x_{\max}))$ όμοια το

$$\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} f(x, y)\, dx\, dy.$$

log

$log(z)$ υπολογίζει το φυσικό λογάριθμο $\log_e(z) = \ln x$, ενώ η εντολή
$log10(z)$ το δεκαδικό λογάριθμο $\log_{10}(z)$.

max

$max(A)$ όπου $A = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ υπολογίζει το μέγιστο αριθμό των x_1, x_2, …, x_n, όπως:

$\gg$ A=[-3,1,5];

$\gg$ max(A)

min

Όμοια με την εντολή max υπολογίζει το ελάχιστο.

mod

$mod(a, b)$ υπολογίζει το υπόλοιπο της διαίρεσης $a : b$.

pi

pi δίνει τον αριθμό $\pi = 3.14\ldots$

real

$real(z)$ υπολογίζει το πραγματικό μέρος του μιγαδικού αριθμού z.

quad

$quad(f, a, b)$ ή $quad(f, a, b, tol)$[1] υπολογίζει αριθμητικά με τον προσαρμοσμένο κανόνα του Simpson (adaptive Simpson quadrature) το ορισμένο ολοκλήρωμα

$$\int_a^a f(x)\,dx.$$

quadl

$quadl(f, a, b)$ ή $quadl(f, a, b, tol)$ όμοια με την εντολή $quad$ υπολογίζει αριθμητικά το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_a^a f(x)\,dx$ με τον κανόνα Lobatto.

[1]Για την παράμετρο tol βλέπε εντολή $dblquad$.

sec

sec(z) υπολογίζει τη συνάρτηση $\sec z = 1/\cos z$.

sech

sech(z) όμοια τη $sechz = 1/\cosh z$.

sin

sin(z) υπολογίζει τη συνάρτηση $\sin z$.

sinh

sinh(z) υπολογίζει τη συνάρτηση $\sinh z$.

solve

solve(f, x) λύνει την εξίσωση $f(x) = 0$, όπως:

$\gg$ syms x a
$\gg$ solve$(a * x^2 + x - a, x)$
ans =
$1/2/a * (-1 + (1 + 4 * a^2)^(1/2))$
$1/2/a * (-1 - (1 + 4 * a^2)^(1/2))$
$\gg$ solve$(a * x^2 + x - a, a)$
ans =
$-x/(x^2 - 1)$

Όταν είναι της μορφής $f(x) = g(x)$, τότε:

$\gg$ solve$('a * x^2 + x = a','x')$
ans =
$1/2/a * (-1 + (1 + 4 * a^2)^(1/2))$
$1/2/a * (-1 - (1 + 4 * a^2)^(1/2))$

solve $(f1, f2, \ldots, f_n, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ για τη λύση συστήματος εξισώσεων.

sort

sort$(list)$ κάνει διάταξη των στοιχείων *list*.

sqrt

sqrt(z) υπολογίζει την τετραγωνική ρίζα του z μετασχηματίζοντας σε $z^{1/2}$.

tan

$tan(z)$ υπολογίζει τη συνάρτηση $\tan z$.

tanh

$tanh(z)$ υπολογίζει τη συνάρτηση $\tanh z$.

taylor

$taylor\,(f, n, x, x_0)$ υπολογίζει το ανάπτυγμα Taylor βαθμού n με κέντρο x_0 της συνάρτησης $f = f(x)$, όπως:

$\gg$ syms x

$\gg$ $\mathrm{taylor}(\log(x), 10, x, 1)$

trapz

$trapz(Y)$ υπολογίζει αριθμητικά το ορισμένο ολοκλήρωμα της Y με βήμα $h = 1$. Στις περιπτώσεις που χρησιμοποιείται διαφορετικό h, τότε χρησιμοποιείται η εντολή:

$trapz(X, Y)$ με $X = [a = x_0, x_1, \ldots, x_N = b]^T$. [2]

Έστω το ορισμένο ολοκλήρωμα: $\int_0^\pi \sin x\,dx$. Τότε:

$\gg$ syms x X Y

$\gg$ X=0:pi/100:pi;

$\gg$ Y=sin(x);

$\gg$ Z=trapz(X,Y)

ans

1.99989998

triplequad

$triplequad(f, x_{\min}, x_{\max}, y_{\min}, y_{\max}, z_{\min}, z_{\max})$ ή
$triplequad(f, x_{\min}, x_{\max}, y_{\min}, y_{\max}, z_{\min}, z_{\max}, tol)$ ή
$triplequad(f, x_{\min}, x_{\max}, y_{\min}, y_{\max}, z_{\min}, z_{\max}, tol, method)$ υπολογίζει αριθμητικά το τριπλό ολοκλήρωμα

$$\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} f(x, y, z)\,dz\,dy\,dx$$

[2] Βλέπε Α. Μπράτσος [2] Κεφ. 8.

(βλέπε εντολή *dblquad*).

[3]

E-mail: bratsos@teiath.gr URL: http://users.teiath.gr/bratsos/

Βιβλιογραφία

[1] Ακρίβης, Γ., Δουγαλής, Β. (1995), Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Αθήνα, ISBN 978–960–524–022–6.

[2] Μπράτσος, Α. (2011), Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, ISBN 978–960–351–874–7.

[3] Μπράτσος, Α. (2002), Ανώτερα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, ISBN 960–351–453–5/978–960–351–453–4.

[4] Burden, Richard L. and Faires, J. Douglas (2000), Numerical Analysis (7th ed.), Brooks/Cole, ISBN 978–0–534–38216–2.

[5] Conte, S. D., Carl de Boor (1981), Elementary Numerical Analysis: An Algorithmic Approach (3rd ed.), McGraw-Hill Book Company, ISBN 978–0–07–012447–9.

[6] Don, E., Schaum's Outlines – Mathematica (2006), Εκδόσεις Κλειδάριθμος, ISBN 978–960–461–000–6.

[7] Kendell A. Atkinson (1989), An Introduction to Numerical Analysis (2nd ed.), John Wiley & Sons, ISBN 0–471–50023–2.

[8] Leader, Jeffery J. (2004), Numerical Analysis and Scientific Computation, Addison Wesley, ISBN 978–0–201–73499–7.

[9] Schatzman, M. (2002), Numerical Analysis: A Mathematical Introduction, Clarendon Press, Oxford, ISBN 978–0–19–850279–1.

[10] Stoer, Josef; Bulirsch, Roland (2002), Introduction to Numerical Analysis (3rd ed.), Springer, ISBN 978–0–387–95452–3.

[11] Sli, E. and Mayers, D. (2003), An Introduction to Numerical Analysis, Cambridge University Press, ISBN 978–0–521–00794–8.

Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm
- http://mathworld.wolfram.com/
- http://eom.springer.de/