Μάθημα 1

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

1.1 Εισαγωγικές έννοιες

1.1.1 Ορισμοί

Κρίνεται αρχικά απαραίτητο να γίνει στον αναγνώστη υπενθύμιση των παρακάτω βασικών μαθηματικών εννοιών:

Ορισμός 1.1.1 - 1 (εξίσωσης). *Λέγεται εξίσωση κάθε ισότητα της μορφής*

$$F\left(x_1, x_2, \ldots, x_\nu\right) = 0. \qquad (1.1.1 - 1)$$

Στην $(1.1.1 - 1)$ οι μεταβλητές x_1, x_2, …, x_ν λέγονται **άγνωστοι**, ενώ ο προσδιορισμός τους **λύση** ή **ρίζα** της εξίσωσης.[1]

[1] Η εξίσωση δεν πρέπει να συγχέεται με την έννοια της **ταυτότητας**, που εκφράζεται επίσης με τη μορφή $(1.1.1 - 1)$, αλλά ισχύει για κάθε τιμή των μεταβλητών της, όπως $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, κ.λπ.

Η έννοια της εξίσωσης σαν μια σχέση που ισχύει για ορισμένες τιμές των μεταβλητών της επεκτείνεται εκτός από την Άλγεβρα, στην Αναλυτική Γεωμετρία με τον καθορισμό του τόπου των σημείων σχημάτων, όπως για παράδειγμα η εξίσωση $x^2+y^2=1$ του μοναδιαίου κύκλου, στη Φυσική με τις εξισώσεις των διαφόρων νόμων, κ.λπ.

Στο μάθημα αυτό θα εξεταστεί ο προσδιορισμός των ριζών των εξισώσεων μιας μεταβλητής, έστω x, δηλαδή εξισώσεων της μορφής

$$f(x)=0. \tag{1.1.1 - 2}$$

Στην κατηγορία αυτή των εξισώσεων ανήκουν μεταξύ των άλλων οι:

- **πολυωνυμικές**

  $$a_\nu x^\nu+\ldots+a_1x+a_0=0,$$

  όταν $a_i \in \Re$; $i=0,\,1,\,\ldots,\,\nu$ και $\nu=1,\,2,\,\ldots$. Οι ρίζες της εξίσωσης είναι εύκολο να προσδιοριστούν θεωρητικά, όταν $\nu=1,\,2,\,3$, ενώ για $\nu\geq 3$ ο υπολογισμός είναι πολύπλοκος ή αδύνατος.

- **τριγωνομετρικές**

  $$\sin x=\sin a$$

  με ρίζες $x=2k\pi+a$ ή $x=2k\pi+\pi-a$, όταν $k=0,\,\pm1,\,\pm2,\,\ldots$, κ.λπ.

- **διαφορικές**

  $$f\left(y^{(\nu)},\ldots,y',y,x\right)=0,$$

  όταν $y=y(x)$ και $\nu=1,\,2,\,\ldots$, που η θεωρητική λύση τους είναι γνωστή μόνον για ορισμένες μορφές.

- **υπερβατικές** (transcendental)

  $$x-e^x=0,\quad x-\sin f(x)=0,$$

  που η λύση τους είναι θεωρητικά αδύνατη.

Συμπερασματικά, είναι δυνατόν να γραφεί ότι για ελάχιστες μορφές των εξισώσεων $(1.1.1-2)$ είναι γνωστή η θεωρητική λύση, ενώ η λύση στη γενική περίπτωση είναι αδύνατη.

Η λύση όμως μιας εξίσωσης της μορφής $(1.1.1-1)$ ή και ειδικότερα της $(1.1.1-2)$ στις περισσότερες των περιπτώσεων είναι απαραίτητη, επειδή η γνώση της απαιτείται για την ολοκλήρωση της μελέτης των περισσότερων προβλημάτων που συναντώνται στις διάφορες εφαρμογές. Στις περιπτώσεις αυτές και εφόσον είναι αδύνατη η θεωρητική λύση της $(1.1.1-2)$, πρέπει να αναζητηθούν οι λεγόμενες **προσεγγιστικές λύσεις**. Τότε αυτές, που δεν έχουν την απόλυτη ακρίβεια των αντίστοιχων θεωρητικών, δίνουν τη δυνατότητα της περαιτέρω επεξεργασίας των παραπάνω προβλημάτων. Ο κλάδος των Μαθηματικών που μελετά τις προσεγγιστικές λύσεις εξισώσεων, συστημάτων, διαφορικών εξισώσεων, κ.λπ. είναι γνωστός σαν **Αριθμητική Ανάλυση**.

Έστω η εξίσωση

$$f(x)=0$$

που είναι της μορφής $(1.1.1-2)$. Αν x^* είναι μια ρίζα της, που δεν είναι γνωστός ο θεωρητικός υπολογισμός της, δηλαδή δεν γνωρίζουμε θεωρητικά τη λύση της εξίσωσης, τότε η προσέγγισή της θα γίνει από ένα σύνολο τιμών, που πρέπει να πλησιάζουν ή διαφορετικά να **προσεγγίζουν** διαρκώς τη ρίζα x^*. Οι παραπάνω προσεγγιστικές τιμές θα προκύπτουν από κάποιο τύπο, που θα συνδέεται άμεσα με τον τύπο της εξίσωσης, δηλαδή της $(1.1.1-2)$.

Στα Μαθηματικά η παραπάνω διαδικασία περιγράφεται ως εξής:
Έστω η εξίσωση $f(x)=0$. Για τον προσδιορισμό μια προσεγγιστικής λύσης ή ρίζας της, έστω η x^*, δημιουργείται μια κατάλληλη [2]**ακολουθία τιμών** x_i; $i=0,1,\ldots$, που ορίζεται από έναν τύπο της μορφής $x_i=g\left(x_{i-1}\right);\quad i=1,\,2,\,\ldots$ και για ευκολία στη συνέχεια του μαθήματος της μορφής

$$x_{i+1}=g\left(x_i\right);\quad i=0,\,1,\,\ldots\,. \tag{1.1.1 - 3}$$

Στην $(1.1.1-3)$ η g λέγεται **επαναληπτική συνάρτηση**. Ο τρόπος ορισμού της g θα ορίζει σε κάθε περίπτωση και την αντίστοιχη μέθοδο λύσης του προβλήματος $(1.1.1-2)$. Τότε θεωρητικά η $(1.1.1-3)$ πρέπει να συγκλίνει στη ρίζα x^* της εξίσωσης, δηλαδή

$$\lim_{i\to+\infty}\left|x_{i+1}-x^*\right|=0.$$

[2]Για την έννοια της ακολουθίας βλέπε Μάθημα *Στοιχεία από τις Ακολουθίες* στο Παράρτημα Α στο τέλος των μαθημάτων και βιβλίο Α. Μπράτσος [3] Κεφ. 5.

Παρατήρηση 1.1.1 - 1

Στις περιπτώσεις των επαναληπτικών μεθόδων για τον δείκτη της επαναληπτικής σχέσης ή της ακολουθίας τιμών θα χρησιμοποιείται το i, αντί του ν που χρησιμοποιείται στο Μάθημα *Στοιχεία από τις Ακολουθίες* στο Παράρτημα Α.

Δίνονται τώρα οι παρακάτω χρήσιμοι για τα επόμενα ορισμοί:

Ορισμός 1.1.1 - 2. *Αν υπάρχουν σταθερές λ και p, έτσι ώστε*

$$\lim_{i \to +\infty} \frac{|x_{i+1} - x^*|}{|x_i - x^*|^p} = \lambda, \tag{1.1.1 - 4}$$

τότε θα λέγεται ότι η σύγκλιση της ακολουθίας είναι τάξης p και έχει ασυμπτωτική σταθερά λάθους λ.

Στην περίπτωση όπου $p = 1$, η σύγκλιση λέγεται **γραμμική**, ενώ, όταν $p = 2$, αντίστοιχα $p = 3$, λέγεται **τετραγωνική**, αντίστοιχα **κυβική**.

Ορισμός 1.1.1 - 3. *Μια επαναληπτική μέθοδος της μορφής*

$$x_{i+1} = g\left(x_i\right); \quad i = 0,\, 1,\, \ldots$$

θα είναι τάξης p, όταν η ακολουθία x_{i+1}; $i = 0,\, 1,\, \ldots$ είναι τάξης p.

Ορισμός 1.1.1 - 4. *Μια γραμμικά συγκλίνουσα ακολουθία με ασυμπτωτική σταθερά λάθους 0 θα λέγεται ότι συγκλίνει* **υπεργραμμικά** *(superlinearly) στο x^*.*

Παράδειγμα 1.1.1 - 1

Έστω η ακολουθία

$$x_{i+1} = 1 + \frac{1}{3^i}; \quad i = 1,\, 2,\, \ldots .$$

Τότε προφανώς

$$\begin{aligned} \lim_{i \to +\infty} x_{i+1} &= \lim_{i \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{3^i}\right) = 1, \quad \text{και} \\ \lim_{i \to +\infty} x_i &= \lim_{i \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{3^{i-1}}\right) = 1. \end{aligned}$$

Άρα σύμφωνα με τον Ορισμό 1.1.1 - 2 έχουμε

$$\lim_{i\to+\infty}\frac{|x_{i+1}-1|}{|x_i-1|^{p}}=\lim_{i\to+\infty}\frac{|x_{i+1}-1|}{|x_i-1|^{1}}=\frac{\dfrac{1}{3^i}}{\dfrac{1}{3^{i-1}}}=\frac{1}{3}$$

δηλαδή έχουμε σύγκλιση τάξης $p=1$ (γραμμική) με ασυμπτωτική σταθερά λάθους $\lambda=1/3$.

Άσκηση

Δείξτε ότι η ακολουθία

i)

$$x_{i+1}=a+q^{-i}\,;\quad i=0,\,1,\,\ldots\quad \text{και}\quad q>0$$

συγκλίνει γραμμικά στο a με ασυμπτωτική σταθερά λάθους $\lambda=q$.

ii)

$$x_{i+1}=1+\frac{1}{i\,!}\,;\quad i=0,\,1,\,\ldots$$

συγκλίνει στο 1 υπεργραμμικά.[3]

Απαντήσεις

(i) Ανάλογη απόδειξη με το Παράδειγμα 1.1.1 - 1.
(ii) Είναι

$$i\,!=1\cdot 2\cdots i\quad \text{και}\quad (i-1)\,!=1\cdot 2\cdots(i-1),$$

οπότε

$$\lim_{i\to+\infty}\frac{|x_{i+1}-1|}{|x_i-1|}=\lim_{i\to+\infty}\frac{1}{i}=0.$$

1.1.2 Σφάλματα υπολογισμών

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, από την επαναληπτική σχέση

$$x_{i+1}=g\left(x_i\right);\quad i=0,\,1,\,\ldots\,,$$

[3] Υπενθυμίζεται ότι $i\,!=1\cdot 2\cdots i$.

που η διαδικασία της περιγράφεται στην $(1.1.1-3)$, θα προκύψει στην i-επανάληψη μια προσεγγιστική τιμή x_{i+1}, διαφορετική της ρίζας x^* της εξίσωσης $f(x)=0$.

Έστω

$$e_i = x_i - x^*; \quad i = 0, 1, \dots \tag{1.1.2 - 1}$$

το **σφάλμα** της προσέγγισης.

Σχετικά με το δημιουργούμενο **συνολικά** σφάλμα e_i ισχύουν τα εξής:

i) η μέθοδος που περιγράφεται στην $(1.1.1-3)$ είναι προσεγγιστική. Αυτό σημαίνει ότι ο τύπος της μεθόδου από μόνος του, σε αντίθεση με τον αντίστοιχο θεωρητικό, έχει σφάλμα.

ii) Στους υπολογισμούς του τύπου $(1.1.1-3)$ δημιουργούνται εκτός των σφαλμάτων της περίπτωσης (i) και τα λεγόμενα **σφάλματα στρογγυλοποίησης** (round-off errors).

Για να γίνουν περισσότερο κατανοητά τα σφάλματα αυτά, έστω ότι κατά τη διαδικασία λύσης ενός προβλήματος απαιτείται ο υπολογισμός της $\sqrt{2}$ και ότι ο υπολογιστής έχει στη ζώνη εργασίας τη δυνατότητα επεξεργασίας 8, αντίστοιχα 16 δεκαδικών ψηφίων - ανάλογα η περίπτωση 32, 64, 128 κ.λπ. ψηφίων. Τότε η τιμή $\sqrt{2}$ θα στρογγυλοποιηθεί στα 8, αντίστοιχα 16 δεκαδικά ψηφία, δηλαδή

$$\sqrt{2} \approx 1.414\,213\,56, \quad \text{αντίστοιχα} \quad \sqrt{2} \approx 1.4142\,1356\,2373\,0950.$$

Ο στρογγυλοποιημένης μορφής αριθμός $\sqrt{2}$, όταν πολλαπλασιαστεί, διαιρεθεί κ.λπ. με έναν άλλο αντίστοιχης μορφής αριθμό θα δώσει αποτέλεσμα με σφάλμα γενικά μεγαλύτερο από εκείνο χωρίς τις στρογγυ-λοποιήσεις. Λαμβάνοντας τώρα υπόψη ότι κατά τη διαδικασία υπολογι-σμού της λύσης ενός προβλήματος γίνεται ένας μεγάλος αριθμός πράξεων, τα λάθη αυτά συσσωρεύονται (quantization error), με αποτέλεσμα η προκύπτουσα τελικά λύση να παρουσιάζει ένα μεγάλο σφάλμα σε σχέση με το αναμενόμενο θεωρητικά αποτέλεσμα. Λόγω της δομής των υπολογιστών τα σφάλματα αυτά δεν είναι δυνατόν να μηδενιστούν, αλλά μόνον να περιοριστούν με κατάλληλη ελαχιστοποίηση των υπολογισμών, κ.λπ.[4]

[4]Βλέπε βιβλιογραφία.

Τα παραπάνω σφάλματα είναι γνωστά και σαν **αριθμητικά σφάλματα** (numerical errors).

Κριτήρια διακοπής επαναλήψεων

Επειδή η διαδικασία που περιγράφεται από την επαναληπτική σχέση

$$x_{i+1} = g\left(x_i\right); \quad i = 0,\, 1,\, \dots\, ,$$

δεν είναι δυνατόν να συνεχίζεται στο άπειρον, είναι φυσικό να αναζητηθούν κριτήρια τέτοια που να την σταματούν.

Τα κυριότερα δίνονται στη συνέχεια.

Έλεγχος του σφάλματος

Αν ο αριθμός ε με $\varepsilon > 0$ έχει εκλεγεί, έτσι ώστε να δείχνει την επιθυμητή ακρίβεια της μεθόδου, τότε τα σημαντικότερα κριτήρια είναι:

i)
$$|x_i - x_{i-1}| < \varepsilon.$$

Το κριτήριο αυτό έχει το μειονέκτημα ότι πολλές φορές, ενώ η διαφορά $x_i - x_{i-1}$ συγκλίνει στο μηδέν, η ακολουθία x_i αποκλίνει.

ii)
$$|f\left(x_i\right)| < \varepsilon.$$

Το κριτήριο αυτό έχει το μειονέκτημα ότι είναι δυνατόν η τιμή $f\left(x_i\right)$ να τείνει στο μηδέν, ενώ η τιμή x_i να είναι κατά πολύ διαφορετική από τη ρίζα x^*.

iii)
$$\frac{|x_i - x_{i-1}|}{|x_i|} < \varepsilon \quad \text{με} \quad x_i \neq 0$$

που είναι και το περισσότερο χρησιμοποιούμενο κριτήριο.

Κριτήριο διακοπής επαναλήψεων

Εφόσον ο υπολογισμός γίνεται με τη χρήση υπολογιστή, η διαδικασία (1.1.1−3) πρέπει να σταματά, όταν ο αριθμός των επαναλήψεων υπερβεί έναν εκ των προτέρων καθορισμένο αριθμό επαναλήψεων, έστω N.

Στη συνέχεια του μαθήματος θα εξεταστούν οι πλέον γνωστές κλασικές μέθοδοι δημιουργίας της επαναληπτικής σχέσης

$$x_{i+1} = g\left(x_i\right); \quad i = 0,\, 1,\, \ldots\, ,$$

ενώ ο αναγνώστης, για μια εκτενέστερη μελέτη, παραπέμπεται στη βιβλιογραφία.

1.2 Μέθοδος του μέσου σημείου

1.2.1 Ορισμός και υπολογισμός

Πρόκειται για την πρώτη ίσως μέθοδο προσέγγισης των ριζών μιας εξίσωσης και βασίζεται στο παρακάτω θεώρημα του Διαφορικού Λογισμού:

Θεώρημα 1.2.1 - 1 (Bolzano). *Αν μία συνάρτηση, έστω f, με πεδίο ορισμού $[a, b]$ είναι συνεχής για κάθε $x \in [a, b]$ και ισχύει $f(a)f(b) < 0$, τότε υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα της f, έστω ξ, με $\xi \in (a, b)$.*

Αν υποτεθεί ότι η ρίζα είναι **απλή**,[5] ο προσδιορισμός της ρίζας είναι δυνατόν να γίνει σύμφωνα με τη διαδικασία του Αλγόριθμου 1.2.1 - 1. Η μέθοδος αυτή είναι γνωστή σαν **μέθοδος του μέσου σημείου** ή και **μέθοδος της διχοτόμου** (bisection method).[6]

Παράδειγμα 1.2.1 - 1

Έστω η εξίσωση

$$f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$$

που έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $[1, 2]$ (Σχ. 1.2.1 - 1).

Η ρίζα της εξίσωσης με ακρίβεια 9 δεκαδικών ψηφίων υπολογίστηκε ότι είναι η $x^* = 1.365\,223\,0013$. Σύμφωνα με την παραπάνω διαδικασία έχουμε

[5] Για πολλαπλή ρίζα βλέπε Άσκηση 4 στο τέλος της παραγράφου.

[6] Βλέπε βιβλιογραφία και: *https://en.wikipedia.org/wiki/Bisection_method*

Αλγόριθμος 1.2.1 - 1 (μεθόδου του μέσου σημείου)

Δεδομένα: $a_1 = a, \quad b_1 = b$ και μέγιστος αριθμός επαναλήψεων N
Έστω $a_1 = a, \quad b_1 = b$
Για $i = 1, 2, \ldots, N$
$x_i = \dfrac{a_i + b_i}{2}$ Αν $f(x_i) = 0$ τύπωσε "PIZA" x_i STOP
ΣΗΜΕΙΩΣΗ: το $f(x_i)$ θα πρέπει λόγω της υπόθεσης ότι η ρίζα είναι απλή να έχει το ίδιο πρόσημο με το $f(a_i)$ ή το $f(b_i)$
Αν $f(x_i)\, f(a_i) > 0$ τότε η ρίζα $x^* \in (x_i, b_i)$,
οπότε $a_{i+1} = x_i$ και $b_{i+1} = b_i$
διαφορετικά $a_{i+1} = a_i$ και $b_{i+1} = x_i$
τέλος i
Τύπωσε "ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΡΙΖΑΣ" x_i

τα αποτελέσματα του Πίνακα 1.2.1 - 1 όπου ο συμβολισμός 1.0_-, αντίστοιχα 2.0_+ σημαίνει ότι $f(1.0) < 0$, αντίστοιχα $f(2.0) > 0$, κ.λπ.

Στο παρακάτω Πρόγραμμα 1.2.1 - 1 δίνεται ο τρόπος υπολογισμού της ρίζας του Παραδείγματος 1.2.1 - 1 με το MATHEMATICA:

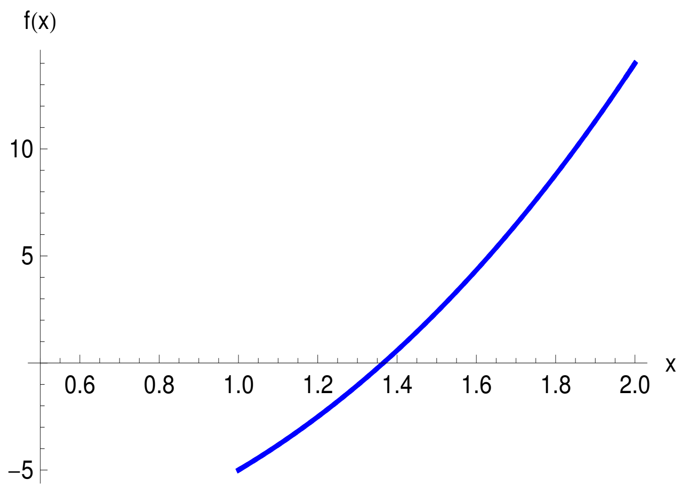
Πρόγραμμα 1.2.1 - 1 (μεθόδου του μέσου σημείου)

```
f[x_]:=x^3+4x^2-10;                    ορισμός συνάρτησης
n=20;a=1;b=2;x=f[a]*f[b];
If[x>0,Print["No root in given interval"],
Print["i"," , ","a"," , ","b"," , ","x"," , ","f(x)"]];
Do[x=(a+b)/2;y=f[x];
If[y=0,Print["Root = ",x]; i=n,Print[" "]];
Print[i," , ",N[a]," , ",N[b]," , ",N[x]," , ",N[f[x]]];
z=f[a]*f[x]; If[z<0,b=x,a=x],{i,1,n}]
```

Παράδειγμα 1.2.1 - 2

Όμοια των εξισώσεων

$$g(x) = x^5 - x^2 + 2x - 1 = 0 \quad (\Sigma\chi.\ 1.2.1\ \text{-}\ 2\text{a}),$$



Σχήμα 1.2.1 - 1: Παράδειγμα 1.2.1 - 1: διάγραμμα συνάρτησης $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$

Πίνακας 1.2.1 - 1: Παράδειγμα 1.2.1 - 1 αποτελέσματα μεθόδου μέσου σημείου

i	a_i	b_i	x_i	$f(x_i)$
1	1.0_-	2.0_+	1.5	2.375
2	1.0_-	1.5_+	1.25	-1.79687
3	1.25_-	1.5_+	1.375	0.16211
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
13	1.364990	1.365235	1.3651123	-0.00194
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
20	1.365229	1.365231	*1.365 229 607*	-6.717413×10^{-6}

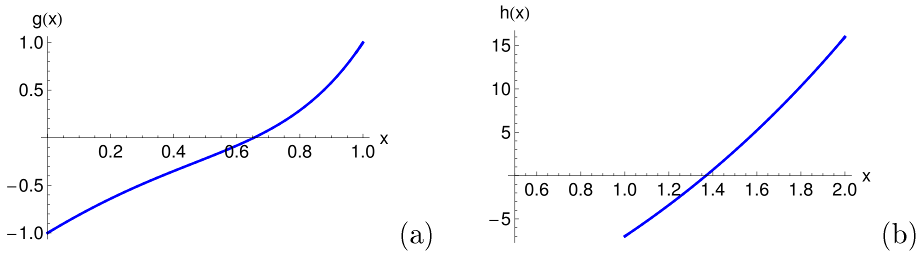
Πίνακας 1.2.1 - 2: Παράδειγμα 1.2.1 - 2: αποτελέσματα μεθόδου μέσου σημείου για την εξίσωση $g(x) = x^5 - x^2 + 2x - 1 = 0$

i	a_i	b_i	x_i	$g(x_i)$
1	0.0_-	1.0_+	0.5	-0.21875
2	0.5_-	1.0_+	0.75	0.1748047
3	0.5_-	0.75_+	0.625	-0.04525757
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
20	0.6540451	0.654047	*0.654 046 0587*	1.405212×10^{-6}

αντίστοιχα

$$h(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0 \quad (\Sigma\chi.\ 1.2.1 \text{ - } 2b)$$

που έχουν μία ρίζα στα διαστήματα $[0, 1]$, αντίστοιχα $[1, 2]$, ενώ τα αποτελέσματα της μεθόδου δίνονται στους Πίνακες 1.2.1 - 2, αντίστοιχα 1.2.1 - 3.



Σχήμα 1.2.1 - 2: Παράδειγμα 1.2.1 - 2: (a) διάγραμμα συνάρτησης $g(x) = x^5 - x^2 + 2x - 1$ και (b) $h(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$

Παρατήρηση 1.2.1 - 1

Αν και η σύγκλιση στη ρίζα μιας εξίσωσης με τη μέθοδο του μέσου σημείου είναι πολύ αργή, συμπέρασμα που άλλωστε άμεσα προκύπτει και από τις τιμές της συνάρτησης στα σημεία x_i στους Πίνακες 1.2.1 - 1-1.2.1 - 3, η μέθοδος χρησιμοποιείται σε πολλές εφαρμογές, κυρίως σε συνδυασμό με ταχύτερες

Πίνακας 1.2.1 - 3: Παράδειγμα 1.2.1 - 2: αποτελέσματα μεθόδου μέσου σημείου για την εξίσωση $h(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$

i	a_i	b_i	x_i	$h(x_i)$
1	1.0_-	1.5_+	1.25	2.875
2	1.0_-	1.5_+	1.25	-2.421875
3	1.25_-	1.5_+	1.375	0.1308594
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
20	1.368807	1.368809	*1.368 807 793*	-6.648612×10^{-6}

άλλες μεθόδους που θα εξεταστούν στη συνέχεια, για να δώσει μία αρχική τιμή σε αυτές.

1.2.2 Υπολογισμός φράγματος

Δίνεται τώρα ο υπολογισμός του φράγματος των σφαλμάτων των τιμών x_i της μεθόδου σε σχέση με τη ρίζα της εξίσωσης με τη βοήθεια του παρακάτω θεωρήματος:

Θεώρημα 1.2.2 - 1 (μεθόδου του μέσου σημείου). *Έστω η συνάρτηση $f(x)$ με πεδίο ορισμού το $[a, b]$ που είναι συνεχής για κάθε $x \in [a, b]$ και ισχύει $f(a)f(b) < 0$. Τότε, αν x^* είναι μια ρίζα της $f(x)$, για το* **σφάλμα** *της ακολουθίας x_i; $i = 1, 2, \ldots$, που δημιουργείται με τη μέθοδο του μέσου σημείου, ισχύει:*

$$|x_i - x^*| \leq \frac{b-a}{2^i}; \quad i = 1, 2, \ldots . \tag{1.2.2 - 1}$$

Παράδειγμα 1.2.2 - 1

Εφαρμόζοντας τη σχέση $(1.2.2 - 1)$ στο Παράδειγμα 1.2.1 - 1, όπου $a = 1$ και $b = 2$, για $i = 20$, έχουμε

$$|x_{20} - x^*| \leq \frac{2-1}{2^{20}} \approx 9.536\,743 \times 10^{-7}.$$

Στην πραγματικότητα το σφάλμα, όπως προκύπτει από τα αποτελέσματα του Πίνακα 1.2.1 - 1, είναι πολύ μικρότερο, επειδή

$$|x^* - x_{20}| = |1.365\,230\,013 - 1.365\,229\,607| \approx 4.064\,141 \times 10^{-7}.$$

Υπολογισμός επαναλήψεων

Τις περισσότερες φορές η $(1.2.2-1)$ χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό του απαραίτητου αριθμού επαναλήψεων, προκειμένου να έχουμε μία επιθυμητή ακρίβεια, έστω ε, της μεθόδου.

Παράδειγμα 1.2.2 - 2

Έστω ότι ζητείται η λύση στο Παράδειγμα 1.2.1 - 1 να παρουσιάζει ακρίβεια $\varepsilon = 10^{-9}$. Τότε σύμφωνα με την $(1.2.2-1)$ έχουμε

$$|x_i - x^*| \leq \frac{b-a}{2^i} = 2^{-i} < \varepsilon = 10^{-9}, \quad \text{οπότε} \quad 2^i > 10^9.$$

Λογαριθμίζοντας με βάση το 10 την τελευταία ανισότητα τελικά προκύπτει ότι

$$i > \frac{9}{\log_{10} 2} \approx 29.89735,$$

που σημαίνει ότι απαιτούνται τουλάχιστον 30 επαναλήψεις για να προκύψει προσέγγιση της ρίζας με σφάλμα μικρότερο του $\varepsilon = 10^{-9}$.

Θα πρέπει να τονιστεί στο σημείο αυτό ότι το φράγμα που δίνεται από την ανισότητα $(1.2.2-1)$ είναι απλά ενδεικτικό και, όταν χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό των απαραίτητων επαναλήψεων, δίνει στην πράξη αριθμούς κατά πολύ μεγαλύτερους.

Ασκήσεις

1. Με τη μέθοδο του μέσου σημείου να προσδιοριστεί η λύση της εξίσωσης

$$x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 4x + 4 = 0$$

στο διάστημα $[0, 2]$, όταν $|x_{i+1} - x_i| < 10^{-2}$.

2. Θεωρώντας την εξίσωση

$$x^5 - 7 = 0,$$

προσδιορίστε κατά προσέγγιση τη ρίζα $7^{1/5}$, όταν $|x_{i+1} - x_i| < 10^{-3}$.

3. Να υπολογιστεί ο απαιτούμενος αριθμός των επαναλήψεων, έτσι ώστε ο προσδιορισμός της ρίζας της εξίσωσης

$$x^3 - x - 1 = 0$$

στο διάστημα $[1, 2]$ να παρουσιάζει ακρίβεια $\varepsilon = 10^{-3}$.

4. Δείξτε ότι το Θεώρημα 1.2.1 - 1 δεν εφαρμόζεται, όταν η ρίζα είναι πολλαπλή άρτιας τάξης.

Απαντήσεις

1. Θεωρητική λύση: $x^* = 1.414\,214$. Αποτελέσματα:

i	a	b	$\frac{a+b}{2}$	$\lvert x_{i+1} - x_i\rvert$
1	0	2.0	1.0	0
2	1.0	2.0	1.5	0.5
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
8	1.406 25	1.421 875	*1.414 063*	0.007 813

2. Θεωρητική λύση: $x^* = 1.475\,773$. Αποτελέσματα:

i	a	b	$\frac{a+b}{2}$	$\lvert x_{i+1} - x_i\rvert$
1	0	2.0	1.5	0
2	1	2.0	1.5	0.5
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
11	1.474 609	1.476 563	*1.475 586*	0.000 977

3. Θεωρητική λύση: $x^* = 1.324\,718$. Σύμφωνα με την $(1.2.2 - 1)$ προκύπτει ότι $i = 10$. Αποτελέσματα:

i	a	b	$\frac{a+b}{2}$	$\lvert x_{i+1} - x_i\rvert$
1	1.0	2.0	1.5	0
2	1.0	1.5	1.375	0.25
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
10	1.324 219	1.326 172	*1.325 195*	0.000 977

4. Όταν η ρίζα είναι άρτιας τάξης, δεν υπάρχει αλλαγή προσήμου.

1.3 Μέθοδος των διαδοχικών προσεγγίσεων

1.3.1 Ορισμός και υπολογισμός

Έστω ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ γράφεται στη μορφή

$$x = g(x), \tag{1.3.1 - 1}$$

όπου η g θεωρείται ότι είναι μία συνεχής συνάρτηση. Η g στην περίπτωση αυτή λέγεται και **επαναληπτική συνάρτηση**.

Αν x^* είναι μία ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$, επειδή $f(x) = x - g(x)$, θα πρέπει

$$f(x^*) = x^* - g(x^*) = 0, \quad \text{δηλαδή} \quad g(x^*) = x^*.$$

Στην περίπτωση αυτή η ρίζα x^* λέγεται και **σταθερό σημείο** της $g(x)$.

Θεωρώντας τώρα μία **αρχική τιμή**, έστω x_0, η ακολουθία $x_{i+1} = g(x_i)$, όπως αυτή έχει ήδη οριστεί στην $(1.1.1-3)$, προκύπτει τότε από την $(1.3.1-1)$ και είναι της μορφής:

$$x_{i+1} = g(x_i)\,; \quad i = 0,\, 1,\, \ldots\,. \tag{1.3.1 - 2}$$

Επειδή η g έχει υποτεθεί ότι είναι μια συνεχής συνάρτηση, αν η ακολουθία $g(x_i)$ συγκλίνει, θα πρέπει

$$g(x^*) = \lim_{i\to+\infty} g(x_i) = \lim_{i\to+\infty} x_{i+1} = x^*,$$

δηλαδή το x^* θα είναι ένα σταθερό σημείο της συνάρτησης g και κατά συνέπεια η ζητούμενη ρίζα της f.

Η μέθοδος αυτή του προσδιορισμού της ρίζας μιας εξίσωσης είναι γνωστή σαν η **μέθοδος των διαδοχικών προσεγγίσεων**[7] (fixed point iteration) και περιγράφεται στον Αλγόριθμο 1.3.1 - 1.

Υπενθυμίζεται στο σημείο αυτό ότι, όπως και στη μέθοδο του μέσου σημείου, ανάλογα κριτήρια διακοπής των επαναλήψεων ισχύουν και στην περίπτωση της μεθόδου των διαδοχικών προσεγγίσεων.

[7] Βλέπε βιβλιογραφία και: *https://en.wikipedia.org/wiki/Fixed-point_iteration*

Αλγόριθμος 1.3.1 - 1 (μεθόδου των διαδοχικών προσεγγίσεων)

Δεδομένα: αρχική τιμή x_0, ακρίβεια ε
μέγιστος αριθμός επαναλήψεων N
Για $i = 1, 2, \ldots, N$
  $x = g(x_0)$
  αν $f(x) = 0$ ή $|x_1 - x_0| < \varepsilon$ τύπωσε x STOP
  $x_0 = x$
τέλος i
Τύπωσε "ΜΕΘΟΔΟΣ ΜΗ ΑΚΡΙΒΗΣ"

Παράδειγμα 1.3.1 - 1

Έστω η εξίσωση:[8]

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$$

που μεταξύ των άλλων περιπτώσεων είναι δυνατόν να γραφεί και ως εξής:

$$x\left(x^2 + 2x + 10\right) = 20.$$

Τότε σύμφωνα με τη σχέση αυτή και τον τύπο $(1.3.1 - 1)$ θα έχουμε

$$x = \overbrace{\frac{20}{x^2 + 2x + 10}}^{g(x)} . \qquad (1.3.1 \text{ - } 3)$$

Από τη $(1.3.1 - 3)$ σε συνδυασμό με την $(1.3.1 - 2)$ προκύπτει η επαναληπτική σχέση:

$$x_{i+1} = \frac{20}{x_i^2 + 2x_i + 10}; \quad i = 0, 1, \ldots . \qquad (1.3.1 \text{ - } 4)$$

[8] Βλέπε εξίσωση $h(x) = 0$ στο Παράδειγμα 1.2.1 - 2.

Πίνακας 1.3.1 - 1: Παράδειγμα 1.3.1 - 1: αποτελέσματα μεθόδου διαδοχικών προσεγγίσεων

i	x_{i+1}	i	x_{i+1}
0	1.538 461 538	10	1.368 857 688
1	1.295 019 157	11	1.368 786 102
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
9	1.368 696 397	19	*1.368 808 075*

Έστω $x_0 = 1$ η αρχική τιμή. Τότε από την $(1.3.1 - 4)$ διαδοχικά έχουμε:

$$\text{για} \quad i = 0; \quad x_{0+1} = x_1 = \frac{20}{x_0^2 + 2x_0 + 1} = \frac{20}{1^2 + 2 \cdot 1 + 10} \approx 1.538\,461\,538$$

$$i = 1; \quad x_{1+1} = x_2 = \frac{20}{x_1^2 + 2x_1 + 1} = \frac{20}{1.538\,461\,538^2 + 2 \cdot 1.538\,461\,538 + 10} \approx 1.295\,019\,157$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

Από τα αποτελέσματα που δίνονται στον Πίνακα 1.3.1 - 1 προκύπτει ότι η ζητούμενη ρίζα με ακρίβεια 9 δεκαδικών ψηφίων στην 20η επανάληψη είναι η $x = 1.368\,808\,075$. Η θεωρητική ρίζα της εξίσωσης με προσέγγιση 9 δεκαδικών ψηφίων υπολογίστηκε ότι είναι η $x^* = 1.368\,808\,108$. Άρα υπάρχει σφάλμα $|x^* - x| = 3.3 \times 10^{-8}$. Το σφάλμα αυτό είναι μικρότερο από το αντίστοιχο σφάλμα 3.15×10^{-7} της μεθόδου του μέσου σημείου (βλέπε Παράδειγμα 1.2.1 - 2 Πίνακας 1.2.1 - 3).

Ο υπολογισμός της λύσης του Παραδείγματος 1.3.1 - 1 με το MATHEMATICA δίνεται στο Πρόγραμμα 1.3.1 - 1 και με το MATLAB στο 1.3.1 - 2.

Πρόγραμμα 1.3.1 - 1 (MATHEMATICA)

```
f[x_]:=20/(x^2+2x+10);
n=20;x=1;Print["i"," , ","x_i"];
Do[y=f[x]; Print[i," , ",N[y,10]];x=y,{i,1,n}]
```

Πρόγραμμα 1.3.1 - 2 (MATLAB)

```
>> x=1;
>> for i=1:20
>> y=20/(x^2+2*x+10);
>> x=y;
>> format long
>> y
>> end
```

Παράδειγμα 1.3.1 - 2

Έστω η εξίσωση

$$g(x) = x^2 - 4x + 3 = 0 \tag{1.3.1 - 5}$$

με ρίζες τις $x_1 = 1$ και $x_2 = 3$.

Ένας τρόπος υπολογισμού των ριζών με τη μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων είναι να γραφεί η εξίσωση $(1.3.1-5)$ σύμφωνα με τον τύπο $(1.3.1-1)$ σε μια από τις παρακάτω τέσσερις μορφές:

$$g_1(x) = \sqrt{3-4x}\,, \quad g_2(x) = \frac{3}{4-x}\,, \quad g_3(x) = \frac{x^2+3}{4}\,, \quad g_4(x) = \frac{x^2-3}{2(x-2)}\,.$$

Από τις παραπάνω μορφές σύμφωνα με την $(1.3.1{-}2)$ έχουμε τις επαναληπτικές σχέσεις:

$$x_1^{i+1} = g_1\left(x_1^i\right) = \sqrt{4x_1^i - 3}\,, \qquad x_2^{i+1} = g_2\left(x_2^i\right) = \frac{3}{4-x_2^i}\,,$$

$$x_3^{i+1} = g_3\left(x_3^i\right) = \frac{\left(x_3^i\right)^2+3}{4}\,, \qquad x_4^{i+1} = g_4\left(x_4^i\right) = \frac{\left(x_4^i\right)^2-3}{2\left(x_4^i-2\right)}\,.$$

Θεωρώντας και για τις τέσσερις παραπάνω επαναληπτικές σχέσεις σαν αρχική τιμή την $x_0 = 4.5$, έχουμε τα αποτελέσματα του Πίνακα 1.3.1 - 2. Είναι προφανές ότι η ακολουθία g_1 συγκλίνει αργά στη ρίζα 3, η g_2 όμοια αργά στη ρίζα 1, η g_3 αποκλίνει, ενώ η g_4 συγκλίνει γρήγορα στη ρίζα 3.

Πίνακας 1.3.1 - 2: Παράδειγμα 1.3.1 - 2: αποτελέσματα εφαρμογής μεθόδου διαδοχικών προσεγγίσεων στις μορφές x_k^{i+1}; $k = 1, 2, 3, 4$.

i	x_1^{i+1}	x_2^{i+1}	x_3^{i+1}	x_4^{i+1}
0	3.317	6.000	3.813	3.083
1	3.204	-1.500	4.384	3.003
2	3.133	0.546	5.554	*3.000*
3	3.087	0.868	8.463	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
9	3.007	1.000	1.155×10^{22}	

1.3.2 Θεώρημα σύγκλισης

Άμεσο συμπέρασμα του Πίνακα 1.3.1 - 2 είναι ότι η σύγκλιση, αντίστοιχα η απόκλιση των ακολουθιών x_k^{i+1}; $k = 1, 2, 3, 4$, συνδέεται ευθέως με την κλίση της επαναληπτικής συνάρτησης $x = g(x)$. Ειδικότερα στην περίπτωση αυτή αποδεικνύεται ότι ισχύει:

Θεώρημα 1.3.2 - 1 (σύγκλισης μεθόδου διαδοχικών προσεγγίσεων). *Έστω η εξίσωση $f(x) = 0$, που γράφεται στη μορφή $x = g(x)$, όπου g μία συνεχής συνάρτηση για κάθε $x \in [a, b]$. Τότε, αν υπάρχει $d \in (0, 1)$, έτσι ώστε*

$$|g(x) - g(y)| \leq d\,|x - y|, \tag{1.3.2 - 1}$$

για κάθε $x, y \in [a, b]$, η εξίσωση $x = g(x)$ έχει ένα μοναδικό σταθερό σημείο, έστω $x^* \in [a, b]$ και η ακολουθία $x_{i+1} = g(x_i)$; $i = 0, 1, \ldots$ συγκλίνει στο x^* για κάθε αρχική τιμή x_0 με $x_0 \in [a, b]$.

Ορισμός 1.3.2 - 1. *Μία συνάρτηση f που πληροί τη συνθήκη $(1.3.2 - 1)$ λέγεται* **συστολή** *(contraction) της f στο διάστημα $[a, b]$.*

Άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 1.3.2 - 1 είναι το εξής:

Πόρισμα 1.3.2 - 1. *Έστω η εξίσωση $f(x) = 0$, που γράφεται στη μορφή $x = g(x)$, όταν g συνεχής συνάρτηση για κάθε $x \in [a, b]$. Αν η g είναι* *παραγωγίσιμη στο* (a, b) *και υπάρχει μια θετική σταθερά* d *με* $d < 1$, *έτσι ώστε*

$$\left|g'(x)\right| \leq d < 1 \quad \text{για κάθε} \quad x \in (a, b), \tag{1.3.2 - 2}$$

τότε η εξίσωση $x = g(x)$ *έχει ένα μοναδικό σταθερό σημείο, έστω* $x^* \in [a, b]$ *και η ακολουθία* $x_{i+1} = g(x_i)$; $i = 0,\, 1,\, \ldots$ *συγκλίνει στο* x^* *για κάθε αρχική τιμή* x_0 *με* $x_0 \in [a, b]$.

Σημειώσεις 1.3.2 - 1

- Η συνθήκη (1.3.2−2) είναι **ικανή**, όχι όμως και αναγκαία, με την έννοια ότι αν ισχύει, τότε η ακολουθία $x_{i+1} = g(x_i)$; $i = 0,\, 1,\, \ldots$ συγκλίνει στη ρίζα x^* για κάθε αρχική τιμή x_0 με $x_0 \in [a, b]$, ενώ, αν δεν ισχύει, τότε ενδέχεται η ακολουθία να συγκλίνει.

  Παράδειγμα 1.3.2 - 1

  Έστω η εξίσωση

  $$f(x) = 3x - 4x^2 = 0, \quad \text{για κάθε} \quad x \in [0.1, +\infty)$$

  που γράφεται στη μορφή:

  $$x = 4x(1 - x) = g(x), \quad \text{για κάθε} \quad x \in [0.1, +\infty).$$

  Τότε, επειδή $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$, η g δεν ορίζεται στο διάστημα $[0.1, +\infty)$, ενώ $\lim_{x \to +\infty} g'(x) = +\infty$, δηλαδή δεν ισχύει η συνθήκη (1.3.2−2). Όμως η g, όπως εύκολα προκύπτει από τον παραπάνω ορισμό της, έχει σαν σταθερό σημείο το $x^* = \frac{3}{4}$, όπου $x^* \in [0.1, +\infty)$.

- Αν

  $$\left|g'(x)\right| \geq 1 \quad \text{για κάθε} \quad x \in (a, b), \tag{1.3.2 - 3}$$

  τότε η εξίσωση $x = g(x)$ **αποκλίνει**.

Παράδειγμα 1.3.2 - 2

Έστω η εξίσωση

$$f(x) = x^2 - 2x - 3 = 0 \tag{1.3.2 - 4}$$

με ρίζες $x_1^* = -1$ και $x_2^* = 3$.

Έστω ότι η $(1.3.2 - 4)$ γράφεται ως $\quad x^2 = 2x + 3$, δηλαδή

$$x = \sqrt{2x + 3} = g(x),$$

οπότε προκύπτει η επαναληπτική σχέση

$$x_{i+1} = \sqrt{2x_i + 3}\,; \quad i = 0,\, 1,\, \ldots\,. \tag{1.3.2 - 5}$$

Τότε

$$g'(x) = \frac{1}{2}\,(2x+3)^{-1/2} \cdot 2 = \frac{1}{(2x+3)^{3/2}}\,,$$

οπότε σύμφωνα με το Πόρισμα 1.3.2 - 2 η επαναληπτική σχέση $(1.3.2 - 5)$, επειδή

- $g'(-1) = 1$ **δεν συγκλίνει** στο -1.
- $g'(3) = \frac{1}{3} < 1$ **συγκλίνει** στο 3 (Πίνακας 1.3.2 - 1).

Έστω τώρα ότι η $(1.3.2 - 4)$ γράφεται ως $\quad x^2 - 3 = 2x$, οπότε

$$x = \frac{x^2 - 3}{2} = g(x),$$

σύμφωνα με την οποία προκύπτει η επαναληπτική σχέση

$$x_{i+1} = \frac{x_i^2 - 3}{2}\,; \quad i = 0,\, 1,\, \ldots\,. \tag{1.3.2 - 6}$$

Τότε όμοια

$$g'(x) = x,$$

οπότε σύμφωνα με το Πόρισμα 1.3.2 - 2 η επαναληπτική σχέση $(1.3.2 - 6)$, επειδή

- $g'(-1) = -1$ **δεν συγκλίνει** στο -1.

Πίνακας 1.3.2 - 1: Παράδειγμα 1.3.2 - 1: αποτελέσματα εφαρμογής της μεθόδου των διαδοχικών προσεγγίσεων στην επαναληπτική σχέση $x_{i+1} = \sqrt{2x_i + 3}$; $i = 1, 2, \ldots, 11$, όταν η αρχική τιμή είναι $x_0 = -0.5$, αντίστοιχα $x_0 = 0.7$

i	$x_{i+1}^{(x_0=-0.5)}$	$x_{i+1}^{(x_0=0.5)}$
0	1.414 214	2.097 618
1	2.414 214	2.682394
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
11	*2.999 969*	*2.999 994*

– $g'(3) = 3$ όμοια **δεν συγκλίνει** στο 3.

Σχετικά με το φράγμα της μεθόδου αποδεικνύεται ότι ισχύουν τα παρακάτω δύο πορίσματα:

Πόρισμα 1.3.2 - 2. *Έστω ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ επαληθεύει τις υποθέσεις του Θεωρήματος 1.3.2 - 1. Τότε*

$$|x_i - x^*| \leq d^i \max\{x_0 - a, b - x_0\}.$$

Πόρισμα 1.3.2 - 3. *Όμοια ότι η $f(x) = 0$ επαληθεύει το Θεώρημα 1.3.2 - 1. Τότε*

$$|x_i - x^*| \leq \frac{d^i}{1-d}|x_1 - x_0| \quad \text{για κάθε} \quad i \geq 1.$$

Από τα Πορίσματα 1.3.2 - 2 και 1.3.2 - 3 προκύπτει τότε ότι υπάρχει μία συσχέτιση μεταξύ της ταχύτητας σύγκλισης της μεθόδου και του φράγματος d της 1ης παραγώγου. Συγκεκριμένα η ταχύτητα εξαρτάται από τον παράγοντα $d^i/(1-d)$ και γίνεται πολύ γρήγορη, όταν το d είναι πολύ μικρό, ενώ είναι αργή, όταν το d τείνει στο 1.

Υπενθυμίζεται στο σημείο αυτό ότι, όπως και στη μέθοδο του μέσου σημείου, ανάλογα κριτήρια διακοπής των επαναλήψεων ισχύουν και στην περίπτωση της μεθόδου των διαδοχικών προσεγγίσεων.

Ασκήσεις

1. Έστω η εξίσωση

$$x^4 + 2x^2 - x - 3 = 0$$

που γράφεται ως:

$i)\quad x = \left(3 + x - 2x^2\right)^{1/4}$

$ii)\quad x = \left(\dfrac{3+x}{x^2+2}\right)^{1/2}$

$iii)\quad x = \left[\left(3 + x - x^4\right)/2\right]^{1/2}$

$iv)\quad x = \dfrac{3x^4 + 2x^2 + 3}{4x^3 + 4x - 1}\,.$

Αν $x_0 = 1$, για κάθε περίπτωση να οριστεί η αντίστοιχη επαναληπτική σχέση και σύμφωνα με αυτή να υπολογιστεί ο όρος x_5. Ποια μορφή προσεγγίζει καλύτερα τη ρίζα της εξίσωσης $1.124\,123$;

2. Για να υπολογιστεί η $7^{1/5}$, θεωρείται η εξίσωση

$$x^5 - 7 = 0$$

από την οποία προκύπτουν οι επαναληπτικές σχέσεις:

$i)\quad x_{i+1} = \left(1 + \dfrac{7 - x_i^3}{x_i^3}\right)^{1/2}$

$ii)\quad x_{i+1} = x_i - \dfrac{x_i^5 - 7}{x_i^2}$

$iii)\quad x_{i+1} = x_i - \dfrac{x_i^5 - 7}{5x_i^4}$

$iv)\quad x_{i+1} = x_i - \dfrac{x_i^5 - 7}{12}.$

Αν $x_0 = 1$, να ταξινομηθούν οι παραπάνω σχέσεις βάσει της ταχύτητας σύγκλισής τους στη ρίζα $x^* = 1.475\,773$.

3. Δείξτε ότι η εξίσωση

$$x - 2^{-x} = 0$$

έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $[1/3, 1]$ την οποία και να προσδιορίσετε με ακρίβεια $|x_{i+1} - x_i| = 10^{-3}$. Εξετάστε αν εφαρμόζεται το Πόρισμα 1.3.2 - 2.

Απαντήσεις

1. Η επαναληπτική σχέση της (i) είναι: $x_{i+1} = \left(3 + x_i - 2x_i^2\right)^{1/4}$; $i = 0, 1, \ldots$. Όμοια και οι άλλες περιπτώσεις. Αποτελέσματα:

i	x_1^{i+1}	x_2^{i+1}	x_3^{i+1}	x_4^{i+1}
0	1.189 207	1.154 701	1.224 745	1.142 857
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
4	1.133 932	1.124 244	1.232 183	1.124 123

2. Στην 5η επανάληψη προκύπτουν τα αποτελέσματα:

i	x_1^{i+1}	x_2^{i+1}	x_3^{i+1}	x_4^{i+1}
0	2.645 751	7.000 000	2.200 000	1.500 000
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
4	28.347 340	$1.607\,457 \cdot 10^{68}$	*1.476 022*	1.497 577

3. Έστω $f(x) = x - 2^{-x}$. Τότε $f(1/3)f(1) = -0.230\,184$, οπότε υπάρχει ρίζα στο διάστημα $[1/3, 1]$. Είναι $x^* = 0.641\,186$. Τότε, αν $f(x) = x - 2^{-x} = 0$, έχουμε $x = 2^{-x}$, οπότε η επαναληπτική σχέση είναι $x_{i+1} = 2^{-x_i}$. Τα αποτελέσματα, όταν $x_0 = 0.5$, είναι:

i	x_{i+1}	$\lvert x_{i+1} - x_i \rvert$
0	0.707 107	0.207 107
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
9	*0.641 142*	0.000 143

1.4 Μέθοδος του Newton

1.4.1 Ορισμός και υπολογισμός

Η μέθοδος των Newton-Raphson ή απλά μέθοδος του Newton[9] είναι η πλέον γνωστή και η περισσότερο χρησιμοποιούμενη μέθοδος υπολογισμού των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$.

[9]Sir ISAAC NEWTON (1643-1727): Άγγλος φυσικός και μαθηματικός που θεωρείται σαν ένας από τους σημαντικότερους επιστήμονες στην ιστορία της ανθρωπότητας. Το έργο του *Principia*, που δημοσιεύτηκε το 1687, θεωρείται θεμελιώδες στον χώρο των Θετικών Επιστημών. Στη Φυσική μεταξύ των άλλων διατύπωσε τους νόμους της βαρύτητας, ενώ στα Μαθηματικά μαζί με τον Leibniz συνέβαλε στη θεμελίωση του Διαφορικού και Ολοκληρωτικού Λογισμού, ανέπτυξε την ομώνυμη προσεγγιστική μέθοδο που δημοσιεύτηκε το 1685 κ.λπ.

Υπάρχουν πολλοί τρόποι παρουσίασης της μεθόδου, όπως μέσω της γραφικής παράστασης της συνάρτησης ή όπως κυρίως συνηθίζεται με το πολυώνυμο του Taylor. Έστω ότι η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού $[a, b]$ έχει παραγώγους μέχρι και δεύτερης τάξης συνεχείς συναρτήσεις στο $[a, b]$. Αν $\xi \in [a, b]$, τότε από τον τύπο του Taylor[10] έχουμε

$$f(x) \approx f(\xi) + (x - \xi)f'(\xi) + \frac{(x - \xi)^2}{2} f''(\xi).$$

Υποθέτοντας ότι η τιμή $x = x^*$ είναι ρίζα της f, δηλαδή $f\left(x^*\right) = 0$, η παραπάνω σχέση γράφεται

$$0 = f(\xi) + \left(x^* - \xi\right) f'(\xi) + \frac{\left(x^* - \xi\right)^2}{2} f''\left(\xi\right). \qquad (1.4.1 - 1)$$

Η μέθοδος του Newton προκύπτει από την $(1.4.1 - 1)$ θεωρώντας ότι ο αριθμός $|x^* - \xi|$ είναι πολύ μικρός, οπότε ο όρος $\left(x^* - \xi\right)^2$ είναι δυνατόν να παραλειφθεί. Τότε

$$0 \approx f(\xi) + \left(x^* - \xi\right) f'(\xi)$$

που, όταν λυθεί ως προς x^*, δίνει

$$x^* \approx \xi - \frac{f(\xi)}{f'(\xi)}. \qquad (1.4.1 - 2)$$

Η $(1.4.1 - 2)$ είναι της μορφής $(1.3.1-1)$, δηλαδή $x = g(x)$ και όταν συνδυαστεί με την $(1.3.1 - 2)$, ορίζει την παρακάτω επαναληπτική σχέση:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f\left(x_i\right)}{f'\left(x_i\right)}; \quad i = 0,\, 1,\, \ldots \qquad (1.4.1 - 3)$$

προσδιορισμού της ρίζας x^* της εξίσωσης $f(x) = 0$. Η μέθοδος αυτή είναι γνωστή σαν **μέθοδος του Newton**[11] και περιγράφεται στον Αλγόριθμο 1.4.1 - 1.

---

[10] Βλέπε Μαθήματα *Ανώτερων Μαθηματικών - Παράγωγος συνάρτησης.*

[11] Βλέπε βιβλιογραφία και: *https://en.wikipedia.org/wiki/Newton%27s_method* και επίσης *mathworld.wolfram.com/NewtonMethod.html*

Αλγόριθμος 1.4.1 - 1 (μεθόδου του Newton)

Δεδομένα: αρχική τιμή x_0, ακρίβεια ε
μέγιστος αριθμός επαναλήψεων N
Για $i = 1, 2, \ldots, N$
$\quad x = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$
$\quad$ αν $f(x) = 0$ ή $|x_1 - x_0| < \varepsilon$ τύπωσε x STOP
$\quad x_0 = x$
τέλος i
Τύπωσε "ΜΕΘΟΔΟΣ ΜΗ ΑΚΡΙΒΗΣ"

Σημειώσεις 1.4.1 - 1

i) Στις εφαρμογές και τις ασκήσεις του μαθήματος θα δίνεται η αρχική τιμή x_0.

ii) Τα κριτήρια διακοπής των επαναλήψεων των παραγράφων 1.2 και 1.3 ισχύουν και στην περίπτωση της μεθόδου του Newton.

Παράδειγμα 1.4.1 - 1

Έστω η εξίσωση (βλέπε Παραδείγματα 1.2.1 - 2 και 1.3.1 - 1)

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0.$$

Τότε

$$f'(x) = 3x^2 + 4x + 10,$$

οπότε από τον τύπο $(1.4.1 - 3)$: $x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i - \frac{x_i^3 + 2x_i^2 + 10x_i - 20}{3x_i^2 + 4x_i + 10} \\ &= \frac{2\left(x_i^3 + x_i^2 + 10\right)}{3x_i^2 + 4x_i + 10}\,; \quad i = 0, 1, \ldots . \end{aligned} \tag{1.4.1 - 4}$$

Πίνακας 1.4.1 - 1: Παράδειγμα 1.4.1 - 1: αποτελέσματα μεθόδου Newton με αρχική τιμή $x_0 = 1$

i	x_{i+1}	i	x_{i+1}
0	1.411 764 706	3	*1.368 808 108*
1	1.369 336 471	4	1.368 808 108
2	1.368 808 189		

Αν $x_0 = 1$ η αρχική τιμή, από την $(1.4.1 - 4)$ διαδοχικά έχουμε

$$\text{για} \quad i = 0; \quad x_{0+1} = x_1 = \frac{2\left(x_0^3 + x_0^2 + 10\right)}{3x_0^2 + 4x_0 + 10} = \frac{2\left(1^3 + 1^2 + 10\right)}{3 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 10} \approx 1.411\,764\,706$$

$$i = 1; \quad x_{1+1} = x_2 \overbrace{=}^{x_1 = 1.411\,764\,706} \frac{2\left(x_1^3 + x_1^2 + 10\right)}{3x_1^2 + 4x_1 + 10} = \cdots \approx 1.369\,336\,471$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots$$

Από τα αποτελέσματα των παραπάνω υπολογισμών που δίνονται στον Πίνακα 1.4.1 - 1, προκύπτει ότι η ζητούμενη ρίζα με ακρίβεια 9 δεκαδικών ψηφίων στην 4η επανάληψη είναι η $x = 1.368\,808\,075$. Η τιμή αυτή είχε υπολογιστεί στην 20η επανάληψη στο Παράδειγμα 1.3.1 - 1. Επειδή η θεωρητική ρίζα της εξίσωσης με προσέγγιση 9 δεκαδικών ψηφίων είναι η $x^* = 1.368\,808\,108$, υπάρχει σφάλμα $|x^* - x| = 3.3 \times 10^{-8}$. Το σφάλμα αυτό είναι μικρότερο από το αντίστοιχο σφάλμα 3.15×10^{-7} της μεθόδου του μέσου σημείου (βλέπε Παράδειγμα 1.2.1 - 2 Πίνακας 1.2.1 - 3).

Η παραπάνω διαδικασία επαναλήφθηκε με αρχική τιμή $x_0 = 1.375$, που έχει προκύψει από την 3η επανάληψη της μεθόδου του μέσου σημείου (βλέπε Παράδειγμα 1.2.1 - 2 Πίνακας 1.2.1 - 2). Σύμφωνα με τα αποτελέσματα που δίνονται στον Πίνακα 1.4.1 - 2 προκύπτει ότι η ζητούμενη ρίζα με ακρίβεια 6 δεκαδικών ψηφίων στη 2η επανάληψη είναι η $x = \mathit{1.368\,808}$ (η αύξηση

Πίνακας 1.4.1 - 2: Παράδειγμα 1.4.1 - 1: αποτελέσματα μεθόδου Newton με αρχική τιμή $x_0 = 1.375$

i	x_{i+1}
0	1.368 819
1	1.*368 808*
2	1.368 808

της ακρίβειας υπολογισμού της ρίζας δεν μετέβαλε το αποτέλεσμα). Αυτό επιβεβαιώνει την Παρατήρηση 1.2.1 - 1.

Υπολογισμός τετραγωνικής ρίζας

Ο υπολογισμός της τετραγωνικής ρίζας ενός θετικού αριθμού, έστω A, είναι ισοδύναμος με την εύρεση της θετικής ρίζας της εξίσωσης

$$f(x) = x^2 - A = 0.$$

Τότε, επειδή

$$f'(x) = 2x,$$

από τον τύπο $(1.4.1 - 3)$: $x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$ προκύπτει ότι

$$x_{i+1} = \frac{1}{2}\left(x_i + \frac{A}{x_i}\right) \; ; \quad i = 0,\, 1,\, \ldots \, . \qquad (1.4.1 - 5)$$

Παράδειγμα 1.4.1 - 2

Έστω ότι ζητείται ο υπολογισμός της $\sqrt{5}$. Τότε σύμφωνα με τον τύπο $(1.4.1-5)$ είναι $A = 5$, οπότε, αν $x_0 = 2$, προκύπτουν τα αποτελέσματα του Πίνακα 1.4.1 - 3. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα αυτά, στην 4η επανάληψη έχουμε ακρίβεια 9 δεκαδικών ψηφίων.

Στο Πρόγραμμα 1.4.1 - 1, αντίστοιχα Πρόγραμμα 1.4.1 - 2 δίνεται η λύση του Παραδείγματος 1.4.1 - 2 με το MATHEMATICA, αντίστοιχα MATLAB εφαρμόζοντας τον γενικό τύπο $(1.4.1 - 6)$.

Πίνακας 1.4.1 - 3: Παράδειγμα 1.4.1 - 2: αποτελέσματα μεθόδου Newton

i	x_{i+1}	i	x_{i+1}
0	2.25	3	*2.236 067 977*
1	2.236 111 111	4	2.236 067 977
2	2.236 067 978		

Πρόγραμμα 1.4.1 - 1 (MATHEMATICA)

```
f[x_]:=((n-1)x+a/x^(n-1))/n;          ορισμός τύπου
n=2;a=2;x=1;m=4;                      m αριθμός επαναλήψεων
Print["i"," , ","x_i"];
Do[y=f[x];Print[i," , ",N[y,10]];x=y,{i,1,m}]
```

Πρόγραμμα 1.4.1 - 2 (MATLAB)

```
>> n=2;a=2;x=1;
>> for i=1:4
>> y=((n-1)*x+a/x^(n-1))/n;
>> x=y;
>> format long
>> y
>> end
```

Υπολογισμός ν - τάξης ρίζας

Η παραπάνω διαδικασία εφαρμόζεται επίσης και στον υπολογισμό της ν-τάξης ρίζας του αριθμού A με την εξίσωση

$$f(x) = x^{\nu} - A = 0.$$

Τότε $f'(x) = \nu x^{\nu-1}$, οπότε από τον τύπο $(1.4.1-3)$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

έχουμε την επαναληπτική σχέση

$$x_{i+1} = \frac{1}{\nu}\left[(\nu-1)x_i + \frac{A}{x_i^{\nu-1}}\right]; \quad i = 0, 1, \ldots . \qquad (1.4.1 - 6)$$

Σημειώσεις 1.4.1 - 2

i) Μεγάλη σημασία για τη σύγκλιση της μεθόδου του Newton έχει η κατάλληλη εκλογή της αρχικής τιμής x_0, κάτι που έγινε εμφανές στη θεωρητική απόδειξη του τύπου $(1.4.1-3)$, όταν θεωρήθηκε ότι ο όρος $(x^* - \xi)^2$ είναι αρκούντως μικρός, έτσι ώστε να είναι δυνατόν να παραλειφθεί. Έχει παρατηρηθεί ότι η μη σωστή εκλογή της αρχικής τιμής x_0 είναι δυνατόν να οδηγήσει σε απόκλιση της μεθόδου.

ii) Αποδεικνύεται ότι η *μέθοδος του Newton συγκλίνει τετραγωνικά* στη ρίζα x^*, όταν έχει γίνει κατάλληλη εκλογή της αρχικής τιμής x_0 και $f'(x^*) \neq 0$ (βλέπε Ορισμό 1.1.1 - 3).

iii) Ένα μεγάλο μειονέκτημα της μεθόδου του Newton είναι η γνώση της παραγώγου $f'(x)$ της συνάρτησης που, όπως είναι γνωστό στον αναγνώστη από προβλήματα των εφαρμογών, η παράγωγος αυτή τις περισσότερες φορές είναι δύσκολο ή και αδύνατον να υπολογιστεί. Στις περιπτώσεις αυτές υπάρχουν άλλες μέθοδοι λύσης του προβλήματος, οι οποίες χρησιμοποιούν τον κατά προσέγγιση υπολογισμό της παραγώγου, μία των οποίων δίνεται στη συνέχεια.

1.4.2 Μέθοδος των χορδών

Σύμφωνα με τον ορισμό της παραγώγου έχουμε ότι

$$f'(x_i) = \lim_{x \to x_i} \frac{f(x) - f(x_i)}{x - x_i}.$$

Έστω ότι $x = x_{i-1}$. Τότε η παραπάνω σχέση γράφεται

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i-1}) - f(x_i)}{x_{i-1} - x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}},$$

οπότε, αντικαθιστώντας στην $(1.4.1-3)$:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

προκύπτει ότι

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_i - x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}, \quad \text{για κάθε} \quad i = 1, 2, \ldots . \qquad (1.4.2 - 1)$$

Αλγόριθμος 1.4.2 - 1 (μεθόδου των χορδών)

Δεδομένα: αρχικές τιμές x_0, x_1 ακρίβεια ε

μέγιστος αριθμός επαναλήψεων N

$y_0 = f(x_0)\,,\;\; y_1 = f(x_1)$

Για $i = 1, 2, \ldots, N$

$\quad x = x_1 - \dfrac{y_1 (x_1 - x_0)}{y_1 - y_0}$

$\quad$ αν $f(x) = 0$ ή $|y_1 - y_0| < \varepsilon$, τύπωσε x STOP

$\quad x_0 = x_1, \quad y_0 = y_1, \quad x_1 = x, \quad y_1 = f(x)$

τέλος i

Τύπωσε "ΜΕΘΟΔΟΣ ΜΗ ΑΚΡΙΒΗΣ"

Η μέθοδος που ορίζεται από την $(1.4.2-1)$ είναι γνωστή σαν η **μέθοδος των χορδών** (secant method) και η εφαρμογή της απαιτεί **δύο αρχικές τιμές**. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα η αρίθμηση του δείκτη i να αρχίζει από την τιμή 1 σε αντίθεση με τις προηγούμενες μεθόδους, που άρχιζε από την τιμή 0. Η μέθοδος περιγράφεται στον Αλγόριθμο 1.4.2 - 1.

Παράδειγμα 1.4.2 - 1

Να λυθεί η εξίσωση

$$f(x) = \cos x - x = 0$$

με τη μέθοδο των χορδών, όταν οι αρχικές τιμές τιμές είναι $x_0 = 0.5, \quad x_1 = \dfrac{\pi}{4}$ και η ακρίβεια $|x_{i+1} - x_i| = 10^{-4}$.

Λύση. Η $(1.4.2-1)$ γράφεται

$$x_{i+1} = x_i - \frac{(\cos x_i - x_i)\,(x_i - x_{i-1})}{(\cos x_i - x_i) - (\cos x_{i-1} - x_{i-1})} \quad \text{για κάθε } i = 1,\, 2,\, \ldots\,,$$

Τότε διαδοχικά έχουμε

$$\text{για} \quad i=1; \quad x_{1+1}=x_2 \quad = x_1 - \frac{(\cos x_1 - x_1)(x_1 - x_0)}{(\cos x_1 - x_1) - (\cos x_0 - x_0)}$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{\left(\cos\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{\pi}{4} - 0.5\right)}{\left(\cos\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) - (\cos 0.5 - 0.5)}$$

$$\approx 0.736\,384$$

$$\text{για} \quad i=2; \quad x_{2+1}=x_3 \quad = x_2 - \frac{(\cos x_2 - x_2)(x_2 - x_1)}{(\cos x_2 - x_2) - (\cos x_1 - x_1)}$$

$$= 0.736 - \frac{(\cos 0.736 - 0.736)\left(0.736 - \frac{\pi}{4}\right)}{(\cos 0.736 - 0.736) - \left(\cos\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$\approx 0.739\,058$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

από την οποία προκύπτουν τα αποτελέσματα του Πίνακα 1.4.2 - 1, όπου ο όρος x_5 δίνει ακρίβεια 7 δεκαδικών ψηφίων, ενώ η ακρίβεια αυτή συνέβαινε στον όρο x_3 του Πίνακα 1.4.1 - 1. ■

Σημείωση 1.4.2 - 1

Αποδεικνύεται ότι η τάξη σύγκλισης της μεθόδου των χορδών είναι

$$p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618,$$

δηλαδή η μέθοδος συγκλίνει πιο αργά σε σύγκριση με τη μέθοδο του Newton ($p=2$).

Σαν συμπέρασμα είναι δυνατόν να γραφεί ότι η μέθοδος του Newton σαν ταχύτερη ή η μέθοδος των χορδών τελικά είναι εκείνες που χρησιμοποιούνται

Πίνακας 1.4.2 - 1: Παράδειγμα 1.4.2 - 1: αποτελέσματα μεθόδου των χορδών, όταν $x_0 = 0.5, \quad x_1 = \frac{\pi}{4} = 0.785\,398$

i	x_{i+1}	$\|x_{i+1} - x_i\|$
1	0.736 384 1690	0.049 014
2	0.739 058 1394	0.002 674
3	0.739 085 1492	0.000 027
4	*0.739 085 1334*	$0.161\,222 \cdot 10^{-7}$

στη λύση των περισσότερων προβλημάτων, όταν υπάρχουν ακριβείς αρχικές τιμές. Αυτές οι αρχικές τιμές συνήθως υπολογίζονται ή από τη μέθοδο του μέσου σημείου ή από τη μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων.

1.4.3 Μέθοδος του Newton για πολλαπλές ρίζες

Στη συνέχεια εξετάζεται η μέθοδος του Newton για την περίπτωση όπου η ρίζα x^* της εξίσωσης $f(x) = 0$ είναι πολλαπλή. Υπενθυμίζεται ότι:

Ορισμός 1.4.3 - 1. *Μία ρίζα x^* της $f(x) = 0$ θα έχει πολλαπλότητα p, όταν*

$$f(x^*) = f'(x^*) = \ldots = f^{(p-1)}(x^*) = 0 \quad \textit{και} \quad f^{(p)}(x^*) \neq 0. \qquad (1.4.3 - 1)$$

Σύμφωνα με τον ορισμό η ρίζα $x^* = 1$ της εξίσωσης

$$f(x) = (x-1)^2 = 0$$

έχει πολλαπλότητα $p = 2$, ενώ η ρίζα $x^* = -2$ της

$$g(x) = (x+2)^3 = 0$$

έχει $p = 3$.

Στην περίπτωση ύπαρξης πολλαπλής ρίζας για τη σύγκλιση της μεθόδου του Newton ισχύει:

Πίνακας 1.4.3 - 1: Παράδειγμα 1.4.3 - 1: αποτελέσματα μεθόδου του Newton

x_1^{i+1}	i	x_2^{i+1}
2.0	0	2.0
1.25	1	1.5
1.025	2	1.25
1.000 304	3	1.125
1.0	4	1.0625
	5	*1.03125*

Πρόταση 1.4.3 - 1. *Αν η x^* είναι μία ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ με πολλαπλότητα p, τότε η μέθοδος του Newton συγκλίνει γραμμικά στη ρίζα x^* με ασυμπτωτική σταθερά λάθους*

$$1 - \frac{1}{p}\,.$$

Παράδειγμα 1.4.3 - 1

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο του Newton στις εξισώσεις

$$f_1(x) = x^2 - 1 = 0 \quad \text{με ρίζες} \quad x^* = 1,\, -1$$

και

$$f_2(x) = (x-1)^2 \quad \text{με ρίζα} \quad x^* = 1 \quad \text{πολλαπλότητας} \quad p = 2,$$

όταν η αρχική τιμή είναι και στις δύο περιπτώσεις $x_0 = 2$, προκύπτουν τα αποτελέσματα του Πίνακα 1.4.3 - 1. Είναι προφανές ότι η σύγκλιση στη ρίζα 1 της εξίσωσης $f_1(x) = 0$ είναι ταχύτερη (τετραγωνική) από τη σύγκλιση της $f_2(x) = 0$ που είναι γραμμική με ασυμπτωτική σταθερά λάθους $1/2$.

Στην περίπτωση πολλαπλής ρίζας είναι δυνατόν να έχουμε επίσης **τετραγωνική σύγκλιση**, όταν χρησιμοποιηθεί η επαναληπτική σχέση

$$x_{i+1} = x_i - p\,\frac{f\left(x_i\right)}{f'\left(x_i\right)}\,, \tag{1.4.3 - 2}$$

Πίνακας 1.4.3 - 2: Παράδειγμα 1.4.3 - 2: αποτελέσματα μεθόδου $(1.4.3-2)$

i	x_{i+1}	$\lvert x_{i+1}-x_i \rvert$
0	1.083 333	0.583 333
1	1.001 667	0.081 667
2	1.000 001	0.001 667
3	*1.0*	$6.938\,661\times 10^{-7}$

όταν p είναι η πολλαπλότητα της ρίζας της εξίσωσης $f(x)=0$ όπου υποτίθεται ότι υπάρχει η $f^{(3)}(x)$ και είναι συνεχής συνάρτηση σε ένα ανοικτό διάστημα, έστω D, που περιέχει τη ρίζα x^*.

Παράδειγμα 1.4.3 - 2

Έστω η εξίσωση

$$f(x)=x^4+4x^3-2x^2-12x+9=0$$

με ρίζες 1 και -3 με πολλαπλότητα και των δύο $p=2$. Τότε προφανώς είναι $f'(x)=4x^3+12x^2-4x-12$, οπότε ο τύπος $(1.4.3-2)$ γράφεται

$$x_{i+1}=x_i-2\,\frac{x_i^4+4x_i^3-2x_i^2-12x_i+9}{4x_i^3+12x_i^2-4x_i-12}=\frac{x_i^2+3}{2x_i+2}\,.$$

Αν $x_0=0.5$, δηλαδή γίνεται προσέγγιση της ρίζας $x^*=1$, τότε έχουμε τα αποτελέσματα του Πίνακα 1.4.3 - 2.

Στην περίπτωση που δεν χρησιμοποιηθεί ο τύπος $(1.4.3-2)$, αλλά η μέθοδος του Newton, τότε από τον τύπο $(1.4.1-3)$:

$$x_{i+1}=x_i-\frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

προκύπτει ότι

$$x_{i+1}=x_i-\frac{x_i^4+4x_i^3-2x_i^2-12x_i+9}{4x_i^3+12x_i^2-4x_i-12}=\frac{3x_i^2+2x_i+3}{4x_i+4}\,.$$

Πίνακας 1.4.3 - 3: Παράδειγμα 1.4.3 - 2: αποτελέσματα μεθόδου του Newton

i	x_{i+1}	$\lvert x_{i+1} - x_i \rvert$
0	0.791 667	0.291 667
1	0.901 890	0.110223
⋮	⋮	⋮
9	*0.999 636*	0.000 365

Αν όμοια $x_0 = 0.5$, τότε έχουμε τα αποτελέσματα του Πίνακα 1.4.3 - 3, που επαληθεύουν τα συμπεράσματα της Πρότασης 1.4.3 - 1, δηλαδή ότι η σύγκλιση της μεθόδου του Newton σε περίπτωση πολλαπλής ρίζας δεν είναι τετραγωνική, αλλά τάξης

$$1 - \frac{1}{p} = 1 - \frac{1}{2} = 0.5.$$

1.4.4 Μέθοδος του Schröder

Τελικά μία μέθοδος που εφαρμόζεται τόσο στην περίπτωση της απλής όσον και της πολλαπλής ρίζας, έστω x^*, είναι εκείνη η οποία στηρίζεται στον υπολογισμό με κάποια επαναληπτική μέθοδο της ρίζας της συνάρτησης

$$\tilde{f}(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}\,.$$

Ο υπολογισμός της ρίζας της $\tilde{f}$ στην περίπτωση αυτή, όταν χρησιμοποιηθεί η μέθοδος του Newton, γίνεται από την επαναληπτική σχέση

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f\left(x_i\right) f'\left(x_i\right)}{\left[f'\left(x_i\right)\right]^2 - f\left(x_i\right) f''\left(x_i\right)}\,; \quad i = 0,\, 1,\, , \ldots . \qquad (1.4.4 - 1)$$

Η μέθοδος αυτή που είναι γνωστή σαν η **τροποποιημένη μέθοδος του Newton** (modified Newton's method) ή και **μέθοδος του Schröder**[12] εκτός από

[12] Scavo, T.R. and Thoo, J.B. (1995). On the Geometry of Halley's Method. *Amer. Math. Monthly vol. 102.* pp. 417–426.

τον αυξημένο αριθμό πράξεων, έχει και το πρόβλημα του υπολογισμού της δεύτερης τάξης παραγώγου της f. Γενικά η μέθοδος αυτή παρουσιάζει μεγάλα σφάλματα στρογγυλοποίησης, κυρίως όταν στην $(1.4.4-1)$ ο παρανομαστής είναι διαφορά δύο πολύ μικρών αριθμών.

Παράδειγμα 1.4.4 - 1

Για τη σύγκριση της κανονικής με την τροποποιημένη μέθοδο του Newton, έστω η εξίσωση

$$f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$$

όπου μία ρίζα της είναι η $x^* = 1.365\,230\,010$, ενώ προφανώς είναι:

$$f'(x) = 3x^2 + 8x \quad \text{και} \quad f''(x) = 6x + 8.$$

Τότε η μέθοδος του Newton, που δίνεται από τον τύπο $(1.4.1-3)$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f\left(x_i\right)}{f'\left(x_i\right)},$$

δίνει την παρακάτω επαναληπτική σχέση

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i^3 + 4x_i^2 - 10}{3x_i^2 + 8x_i},$$

ενώ η τροποποιημένη μέθοδος του Newton την

$$x_{i+1} = x_i - \frac{\left(x_i^3 + 4x_i^2 - 10\right)\left(3x_i^2 + 8x_i\right)}{\left(3x_i^2 + 8x_i\right)^2 - \left(x_i^3 + 4x_i^2 - 10\right)\left(6x_i + 8\right)}.$$

Αν $x_0 = 1.5$, έχουμε τα αποτελέσματα του Πίνακα 1.4.4 - 1.

Παράδειγμα 1.4.4 - 2

Έστω η εξίσωση

$$f(x) = \left(\frac{x}{2} - \sin x\right)^2 = 0$$

που προφανώς μία ρίζα της, εφόσον υπάρχει, θα πρέπει να έχει πολλαπλότητα 2. Τότε με αρχική τιμή $x_0 = \pi/2$ έχουμε τα αποτελέσματα του Πίνακα 1.4.4 - 2.

Schröder, E. (1870). Über unendlich viele Algorithmen zur Auflösung der Gleichungen. *Math. Ann. vol. 2.* pp. 317–365.

Πίνακας 1.4.4 - 1: Παράδειγμα 1.4.4 - 1: αποτελέσματα μεθόδων Newton και Schröder

i	x_{i+1} (Newton)	x_{i+1} (Schröder)
0	1.3733 3333	1.3568 9898
1	1.3652 6201	1.3651 9585
2	*1.3652 3001*	*1.3652 3001*

Πίνακας 1.4.4 - 2: Παράδειγμα 1.4.4 - 2: αποτελέσματα μεθόδων Newton, $(1.4.3-2)$ και Schröder

i	x_{i+1} (Newton)	x_{i+1} $(1.4.3-2)$	x_{i+1} (Schröder)
0	1.78540	2.0	1.80175
1	1.84456	1.90100	1.88963
2	1.87083	1.89551	1.89547
3	1.88335	*1.89549*	*1.89549*
$\vdots$	$\vdots$		
9	1.89531		
$\vdots$	$\vdots$		
16	*1.89549*		

Ασκήσεις

1. Εφαρμόστε τη μέθοδο του Newton με ακρίβεια $|x_{i+1} - x_i| = 10^{-5}$ στη λύση των παρακάτω εξισώσεων:

i) $x - \cos x = 0 \quad$ αν $\quad x_0 = \pi/4$,

ii) $x^3 + 3x^2 - 1 = 0 \quad$ αν $\quad x_0 = -0.5$,

iii) $x^3 - x - 1 = 0 \quad$ αν $\quad x_0 = 1.3$,

iv) $x - 0.5\sin x - 0.2 = 0 \quad$ αν $\quad x_0 = \pi/5$.

2. Εφαρμόζοντας τον τύπο $(1.4.1-6)$ και αρχική τιμή $x_0 = 1$ να υπολογιστεί η ρίζα $7^{1/5}$ με ακρίβεια $|x_{i+1} - x_i| = 10^{-5}$. Στη συνέχεια να γίνει σύγκριση με τα αποτελέσματα της Άσκησης 2 της παραγράφου 1.3.

3. Να λυθεί η Άσκηση 2 με τη μέθοδο των χορδών, όταν $x_0 = 1$ και $x_1 = 1.5$ και να γίνει σύγκριση των αποτελεσμάτων.

4. Έστω η εξίσωση

$$x^3 - 3x + 2 = 0$$

που μια ρίζα της είναι η $x^* = 1$ με πολλαπλότητα $p = 2$. Να λυθεί με την επαναληπτική σχέση (1.4.3−2), αντίστοιχα τη μέθοδο του Schröder η εξίσωση, όταν $x_0 = 0.5$ με ακρίβεια $|x_{i+1} - x_i| = 10^{-3}$. Στη συνέχεια να γίνει σύγκριση των αποτελεσμάτων.

Απαντήσεις

1. Σύμφωνα με τον τύπο $(1.4.1-3)$: $x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$ έχουμε:
(i) $x_{i+1} = \frac{\cos x_i + x \sin x_i}{1+\sin x_i}$, οπότε

i	x_{i+1}	$\|x_{i+1} - x_i\|$
0	0.739 536	0.045 862
⋮	⋮	⋮
2	*0.739 085*	$4.489\,085 \cdot 10^{-8}$

(ii) $x_{i+1} = \frac{2x_i^3 + 3x_i^2 + 1}{3x_i^2 + 6x_i}$, οπότε

i	x_{i+1}	$\lvert x_{i+1}-x_i\rvert$
0	$-0.666\,667$	$0.166\,667$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
3	*-0.652 704*	$2.169\,993\cdot 10^{-9}$

(iii) $x_{i+1}=\frac{2x_i^3+1}{3x_i^2-1}$, οπότε

i	x_{i+1}	$\lvert x_{i+1}-x_i\rvert$
0	$1.325\,307$	$0.025\,307$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
2	*1.324 718*	$3.232\,163\cdot 10^{-7}$

(iv) $x_{i+1}=x_i-\frac{-0.2+x_i-0.5\sin x_i}{1-0.5\cos x_i}$, οπότε

i	x_{i+1}	$\lvert x_{i+1}-x_i\rvert$
0	$0.402\,579$	$0.225\,739$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
3	*0.390 175*	$1.351\,099\cdot 10^{-10}$

2. Σύμφωνα με τον τύπο $(1.4.1-6)$: $x_{i+1}=\frac{1}{\nu}\left[(\nu-1)x_i+\frac{A}{x_i^{\nu-1}}\right]$ έχουμε $x_{i+1}=\frac{1}{5}\left[4x_i+\frac{7}{x_i^5}\right]$, οπότε

i	x_{i+1}	$\lvert x_{i+1}-x_i\rvert$
0	$2.200\,000$	$1.200\,000$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
6	*1.475 773*	$8.418\,205\cdot 10^{-8}$

3. Η $(1.4.2-1)$ για την εξίσωση $f(x)=x^5-7=0$ γράφεται

$$x_{i+1}=x_i-\frac{\left(x_i^5-7-x_i\right)\left(x_i-x_{i-1}\right)}{\left(x_i^5-7-x_i\right)-\left(x_{i-1}^5-7-x_{i-1}\right)}\quad \text{για κάθε } i=1,\,2,\,\ldots\,,$$

οπότε

i	x_{i+1}	$\lvert x_{i+1}-x_i\rvert$
1	$1.454\,976$	$0.045\,024$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
5	*1.475 773*	$0.179\,811\cdot 10^{-7}$

4. Προφανώς είναι $f'(x)=3x^2-3$ και $f''(x)=6x$.

Επαναληπτική σχέση $(1.4.3-2)$

Ο τύπος $(1.4.3-2)$ γράφεται

$$x_{i+1} = x_i - 2\,\frac{x_i^3 - 3x_i^2 + 2}{3x_i^2 - 3} = \frac{x_i^2 + +x_i + 4}{3x_i + 3}\,,$$

οπότε

i	x_{i+1}	$\lvert x_{i+1} - x_i \rvert$
0	1.055 556	0.555 556
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
3	*1.0*	$4.173\,968 \cdot 10^{-8}$

Μέθοδος του Schröder

Ο τύπος $(1.4.4-1)$ γράφεται

$$x_{i+1} = x_i - \frac{\left(x_i^3 - 3x_i^2 + 2\right)\left(3x_i^2 - 3\right)}{\left(3x_i^2 - 3\right)^2 - 6x_i\left(x_i^3 - 3x_i^2 + 2\right)} = \frac{4x_i + 2}{x_i^2 + 2x_i + 3}\,,$$

οπότε

i	x_{i+1}	$\lvert x_{i+1} - x_i \rvert$
0	0.941 177	0.441 177
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
3	*0.999 9999*	0.000 600

Βιβλιογραφία

[1] Ακρίβης, Γ. & Δουγαλής, Β. (1995). *Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης. Αθήνα. ISBN 978–960–524–022–6.

[2] Μπράτσος, Α. (2011). *Εφαρμοσμένα Μαθηματικά*. Εκδόσεις Α. Σταμούλη. ISBN 978–960–351–874–7.

[3] Μπράτσος, Α. (2002). *Ανώτερα Μαθηματικά*. Εκδόσεις Α. Σταμούλη. ISBN 960–351–453–5/978–960–351–453–4.

[4] Στεφανάκος, Χ. (2009). *Προγραμματισμός Η/Υ με MATLAB*. Γκιούρδας Εκδοτική. ISBN 978–960–387–856–8.

[5] Atkinson, K. E. (1989). *An Introduction to Numerical Analysis*. John Wiley & Sons (2nd ed.). ISBN 0–471–50023–2.

[6] Burden, R. L. & Faires, D. J. (2010). *Numerical Analysis*. Brooks/Cole (7th ed.). ISBN 978–0–534–38216–2.

[7] Conte, S. D. & de Boor, C. (1980). *Elementary Numerical Analysis: An Algorithmic Approach*. McGraw–Hill Inc (3rd ed.). ISBN 978–0–07–012447–9.

[8] Don, E. (2006). *Schaum's Outlines – Mathematica*. Εκδόσεις Κλειδάριθμος. ISBN 978–960–209–961–2.

[9] Leader, L. J. (2004). *Numerical Analysis and Scientific Computation*. Addison–Wesley. ISBN 978–0–201–73499–7.

[10] Schatzman, M. (2002). *Numerical Analysis: A Mathematical Introduction.* Oxford: Clarendon Press. ISBN 978–0–19–850279–1.

[11] Stoer, J. & Bulirsch, R. (2002). *Introduction to Numerical Analysis.* Springer (3rd ed.). ISBN 978–0–387–95452–3.

[12] Sli, E. & Mayers, D. (2003). *An Introduction to Numerical Analysis.* Cambridge University Press. ISBN 978–0–521–00794–8.

Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm
- http://mathworld.wolfram.com/
- http://eom.springer.de/