

## Μάθημα 4

# SPLINES

### 4.1 Συνάρτηση spline

#### 4.1.1 Ορισμοί και σχετικά θεωρήματα

Στο Μάθημα *Πολυωνυμική παρεμβολή* εξετάστηκε το πρόβλημα της εύρεσης των πολυωνύμων παρεμβολής, δηλαδή πολυωνύμων που συνέπιπταν ή διαφορετικά διέρχονταν από ένα σύνολο σημείων της μορφής  $(x_i, f(x_i))$ ;  $i = 0, 1, \dots, n$ , όπου  $f(x)$  μια συνάρτηση με άγνωστο στις περισσότερες περιπτώσεις τύπο. Στο μάθημα αυτό θα δοθεί απάντηση στο παραπάνω πρόβλημα με τμηματικά πολυώνυμα (piecewise polynomials ή splines), δηλαδή πολυώνυμα που είναι διαφορετικού γενικά βαθμού και ορίζονται σε διαστήματα της μορφής  $[x_i, x_{i+1}]$ , όπου  $x_i < x_{i+1}$  για κάθε  $i = 0, 1, \dots, n$ .

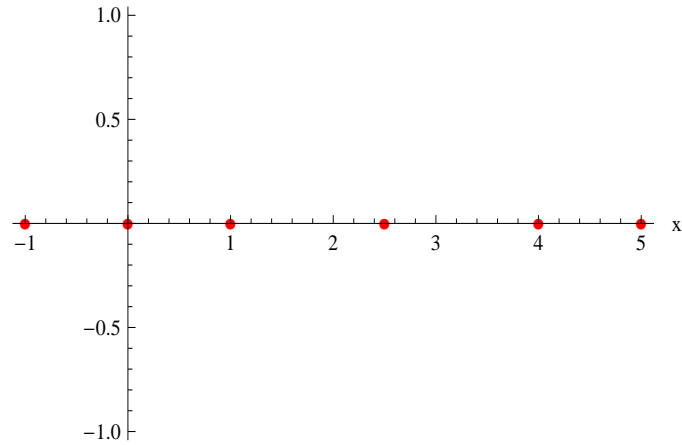
<sup>1</sup>Τα πολυώνυμα αυτά ορίζονται στη συνέχεια:

**Ορισμός 4.1.1 - 1 (spline).** Έστω  $x_0, x_1, \dots, x_n$  ένα σύνολο σημείων που είναι διατεταγμένα ως εξής (Σχ. 4.1.1 - 1):

$$x_0 < x_1 < \dots < x_n. \quad (4.1.1 - 1)$$

---

<sup>1</sup>Βλέπε βιβλιογραφία και: [https://en.wikipedia.org/wiki/Spline\\_\(mathematics\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Spline_(mathematics))  
Επίσης [mathworld.wolfram.com/Spline.html](http://mathworld.wolfram.com/Spline.html)



**Σχήμα 4.1.1 - 1:** Σημεία:  $x_0 = -1.0$ ,  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 1$ ,  $x_3 = 2.5$ ,  $x_4 = 4$ ,  $x_5 = 5$

Τότε μια συνάρτηση *spline* ή απλά στο εξής *spline*, έστω  $s$ , βαθμού  $m$  με κόμβους (*knots* ή *breakpoints*) στα σημεία (4.1.1 – 1), είναι η συνάρτηση που πληροί τις παρακάτω δύο ιδιότητες:

i) σε καθένα από τα διαστήματα

$$(-\infty, x_0), [x_0, x_1), \dots, [x_{n-1}, x_n), [x_n, +\infty) \quad (4.1.1 - 2)$$

η *spline*  $s$  είναι ένα πολυώνυμο βαθμού μικρότερου ή ίσου του  $m$ ,

ii) η *spline*  $s$  και οι παράγωγοί της τάξης  $1, 2, \dots, m - 1$  είναι συνεχείς συναρτήσεις στο  $\mathbb{R}$ .

### Παρατηρήσεις 4.1.1 - 1

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό έχουμε ότι η *spline* είναι:

i) ένα **τμηματικό** πολυώνυμο (*piecewise polynomial*), δηλαδή ένα πολυώνυμο αποτελούμενο από ένα σύνολο επιμέρους πολυωνύμων, που πληρούν τις παραπάνω δύο ιδιότητες.

- ii) Σε καθένα από τα υποδιαστήματα (4.1.1–2) είναι γενικά ένα διαφορετικού βαθμού πολυώνυμο.
- iii) Ο μέγιστος όλων των βαθμών των επιμέρους πολυωνύμων που ορίζουν μια spline, ορίζει και τον βαθμό της.

Ειδικά, όταν  $m = 3$ , η spline θα λέγεται **κυβική** (cubic spline).

- iv) Η **καμπυλότητα** (curvature) μιας καμπύλης  $C$  με εξίσωση  $y = f(x)$  δίνεται από τον τύπο

$$k = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}. \quad (4.1.1 - 3)$$

Επειδή οι καμπύλες των επιμέρους πολυωνύμων θα πρέπει να διέρχονται από τα σημεία  $(x_i, s(x_i))$ ;  $i = 0, 1, \dots, n$  κατά τρόπο τέτοιο που να ελαχιστοποιείται η κάμψη των, σύμφωνα και με την (4.1.1–3) θα πρέπει στους κόμβους  $x_i$ ;  $i = 0, 1, \dots, n$  η spline  $s$  να επαληθεύει, εκτός της συνθήκης

$$s(x_i - 0) = s(x_i + 0) \quad \text{για κάθε } i = 0, 1, \dots, n$$

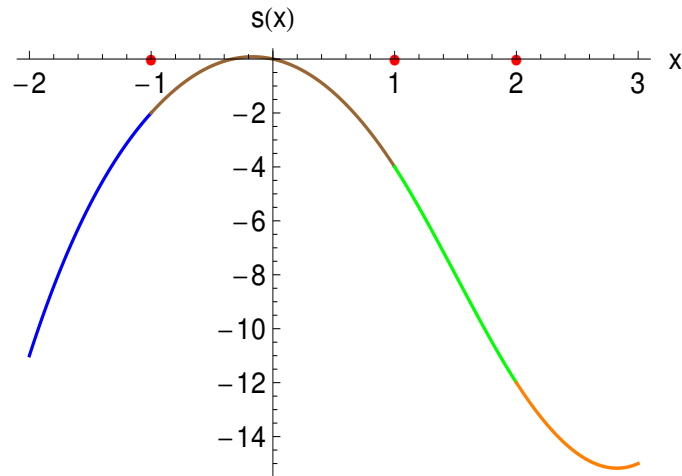
που εξασφαλίζει τη διέλευση από το σημείο  $(x_i, s(x_i))$ , **τουλάχιστον** επίσης και τις παρακάτω δύο συνθήκες:<sup>2</sup>

$$s^{(1)}(x_i - 0) = s^{(1)}(x_i + 0) \quad \text{και} \quad s^{(2)}(x_i - 0) = s^{(2)}(x_i + 0).$$

Αυτό όμως για να συμβαίνει θα πρέπει ο βαθμός της  $s$  να είναι τουλάχιστον 3, δηλαδή η  $s$  να είναι τουλάχιστον **κυβική**.

- v) Λόγω της ιδιότητας (iv) χρησιμοποιείται σε πλείστες όσες εφαρμογές όπως ενδεικτικά στις δισδιάστατες εικόνες, τις γραμματοσειρές, την τρισδιάστατη μοντελοποίηση κ.λπ.
- vi) Η συνέχεια στο  $\mathfrak{R}$  προϋποθέτει και τη μέγιστη δυνατή συνέχεια στα επιμέρους πολυώνυμα.

<sup>2</sup>Υπενθυμίζεται ότι αν  $s''(x) > 0$ , τότε το διάγραμμα της  $s(x)$  στρέφει τα **κοίλα άνω** ή είναι **κυρτό** και όταν  $s''(x) < 0$  είναι **κοίλο**.



**Σχήμα 4.1.1 - 2:** Παράδειγμα 4.1.1 - 1 με κόμβους στα σημεία  $x_0 = -1$ ,  $x_1 = 1$  και  $x_2 = 2$

vii) Αν όλα τα διαστήματα (4.1.1 - 2) έχουν το ίδιο μήκος, τότε έχουμε μια **ομοιόμορφη** (uniform) spline, διαφορετικά μια μη ομοιόμορφη (non uniform) spline.

#### Παράδειγμα 4.1.1 - 1

Έστω η συνάρτηση (Σχ. 4.1.1 - 2):

$$s(x) = \begin{cases} x^3 + 2x + 1 & \text{αν } x \in (-\infty, -1) \text{ βαθμός } 3 \\ -3x^2 - x & x \in [-1, 1) \text{ } 2 \\ 2x^3 - 9x^2 + 5x - 2 & x \in [1, 2) \text{ } 3 \\ x^3 - 3x^2 - 7x + 6 & x \in [2, +\infty) \text{ } 3. \end{cases}$$

Δείξτε ότι ορίζει μια κυβική spline.

**Λύση.** Παρατηρούμε ότι:

- i) Οι κόμβοι είναι στα σημεία:  $x_0 = -1$ ,  $x_1 = 1$  και  $x_2 = 2$ .
- ii) Σε καθένα από τα διαστήματα ορισμού της  $s(x)$  είναι ένα πολυώνυμο το πολύ 3ου βαθμού. Άρα ο βαθμός της  $s(x)$  είναι  $m = 3$ . Τότε σύμφωνα

με τον Ορισμό 4.1.1 - 1 (ii) για να ορίζει η  $s(x)$  μια spline πρέπει η  $s(x)$  και οι παράγωγοι τάξης 1,  $m - 1 = 2$  να είναι συνεχείς συναρτήσεις στο  $\mathbb{R}$ . Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} x \in (-\infty, -1) \quad s(x) &= x^3 + 2x + 1, & s^{(1)}(x) &= 3x^2 + 2, \\ & & s^{(2)}(x) &= 6x. \\ x \in [-1, 1) \quad s(x) &= -3x^2 - x, & s^{(1)}(x) &= -6x - 1, \\ & & s^{(2)}(x) &= -6. \end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned} s(-1 - 0) &= -2 = s(-1 + 0), \\ s^{(1)}(-1 - 0) &= 5 = s^{(1)}(-1 + 0), \quad \text{και} \\ s^{(2)}(-1 - 0) &= -6 = s^{(2)}(-1 + 0), \end{aligned}$$

οπότε ισχύει ο Ορισμός 4.1.1 - 1 (ii) για το σημείο  $x_0 = -1$ . Όμοια αποδεικνύεται ότι ο Ορισμός 4.1.1 - 1 ισχύει και για τα σημεία  $x_1 = 1$  και  $x_2 = 2$ .

Επομένως η  $s$  είναι μια κυβική spline (Παρατηρήσεις 4.1.1 - 1 iii).

ii) Η  $s$  είναι μια μη ομοιόμορφη spline (Παρατηρήσεις 4.1.1 - 1 v).

■

### Παρατήρηση 4.1.1 - 1

Σε πολλές εφαρμογές το πεδίο ορισμού μιας spline περιορίζεται στο διάστημα  $[x_0, x_n]$ . Στις περιπτώσεις αυτές ο Ορισμός 4.1.1 - 1 τροποποιείται κατάλληλα, έτσι ώστε να περιλαμβάνει τα άκρα σημεία  $x_0$  και  $x_n$ . Συγκεκριμένα ο Ορισμός 4.1.1 - 1 στην περίπτωση αυτή γράφεται:

**Ορισμός 4.1.1 - 2.** Έστω  $x_0, x_1, \dots, x_n$  ένα σύνολο σημείων ενός διαστήματος  $[a, b]$ , που είναι διατεταγμένα ως εξής:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b. \quad (4.1.1 - 4)$$

Τότε μια *spline*, έστω  $s$ , στο  $[a, b]$  βαθμού  $m$  με εξωτερικούς κόμβους στα σημεία  $a = x_0$ ,  $b = x_n$  και εσωτερικούς στα  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ , είναι η συνάρτηση που πληροί τις παρακάτω δύο ιδιότητες:

i) σε καθένα από τα διαστήματα

$$[x_0, x_1), [x_1, x_2), \dots, [x_{n-1}, x_n] \quad (4.1.1 - 5)$$

η συνάρτηση  $s$  είναι ένα πολυώνυμο βαθμού μικρότερου ή ίσου του  $m$ ,

ii) η συνάρτηση  $s$  και οι παράγωγοι της τάξης  $1, 2, \dots, m-1$  είναι συνεχείς συναρτήσεις στους **εσωτερικούς** κόμβους.

Εφόσον η  $s(x)$  είναι μια *spline*, τότε λόγω και της ιδιότητας (ii) του Ορισμού 4.1.1 - 2, η (4.1.1 - 5) πολλές φορές για ευκολία γράφεται και

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]. \quad (4.1.1 - 6)$$

Μια εφαρμογή του Ορισμού 4.1.1 - 2 και της (4.1.1 - 6) δίνεται στο παράδειγμα που ακολουθεί:

#### Παράδειγμα 4.1.1 - 2

Έστω η συνάρτηση (Σχ. 4.1.1 - 3):

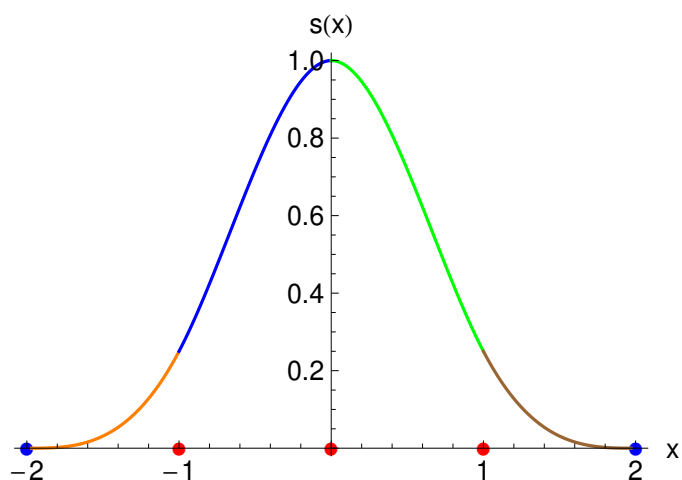
$$s(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(x+2)^3 & \text{αν } x \in [-2, -1] \text{ βαθμός } 3 \\ \frac{1}{4}(3|x|^3 - 6x^2 + 4) & x \in [-1, 1] \quad 3 \\ \frac{1}{4}(2-x)^3 & x \in [1, 2] \quad 3. \end{cases}$$

Δείξτε ότι η  $s(x)$  ορίζει όμοια μια κυβική *spline*.<sup>3</sup>

**Λύση.** Η  $s(x)$  λόγω του  $|x|^3$  γράφεται ως εξής:

$$s(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(x+2)^3 & \text{αν } x \in [-2, -1] \text{ βαθμός } 3 \\ \frac{1}{4}(-3x^3 - 6x^2 + 4) & x \in [-1, 0] \quad 3 \\ \frac{1}{4}(3x^3 - 6x^2 + 4) & x \in [0, 1] \quad 3 \\ \frac{1}{4}(2-x)^3 & x \in [1, 2] \quad 3. \end{cases}$$

<sup>3</sup>Η καμπύλη της  $s(x)$  περιγράφει στις Πιθανότητες και τη Στατιστική την κατανομή (distribution) Irwin-Hall.



Σχήμα 4.1.1 - 3: Παράδειγμα 4.1.1 - 3

- i) Οι εξωτερικοί κόμβοι είναι στα σημεία:  $x_0 = -2$  και  $x_4 = 2$ , ενώ οι εσωτερικοί στα  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 0$  και  $x_3 = 1$ .
- ii) Σε καθένα από τα διαστήματα ορισμού της η συνάρτηση  $s(x)$  είναι ένα πολυώνυμο 3ου βαθμού. Άρα ο βαθμός της  $s(x)$  είναι  $m = 3$ . Τότε σύμφωνα με τον Ορισμό 4.1.1 - 2 (ii) για να ορίζει η  $s(x)$  μια spline, πρέπει η  $s(x)$  και οι παράγωγοι τάξης 1,  $m - 1 = 2$  να είναι συνεχείς στους εσωτερικούς κόμβους. Έχουμε ότι:

$$x \in [-2, -1] \quad s(x) = \frac{1}{4}(x + 2)^3,$$

$$s^{(1)}(x) = \frac{3}{4}(x + 2)^2,$$

$$s^{(2)}(x) = \frac{6}{4}(x + 2).$$

$$x \in [-1, 0] \quad s(x) = \frac{1}{4}(-3x^3 - 6x^2 + 4),$$

$$s^{(1)}(x) = \frac{1}{4}(-9x^2 - 12x),$$

$$s^{(2)}(x) = \frac{1}{4}(-18x - 12).$$

Άρα

$$s(-1 - 0) = \frac{1}{4} = s(-1 + 0),$$

$$s^{(1)}(-1 - 0) = \frac{3}{4} = s^{(1)}(-1 + 0), \quad \text{και}$$

$$s^{(2)}(-1 - 0) = \frac{3}{2} = s^{(2)}(-1 + 0),$$

οπότε ισχύει ο Ορισμός 4.1.1 - 1 (ii) για το σημείο  $x_1 = -1$ . Όμοια αποδεικνύεται ότι ισχύει και για τα σημεία  $x_2 = 0$  και  $x_3 = 1$ , οπότε η  $s$  είναι μια κυβική spline (Παρατηρήσεις 4.1.1 - 1 iii).

ii) Η  $s$  είναι μια ομοιόμορφη spline (Παρατηρήσεις 4.1.1 - 1 v). ■

### Συνάρτησης αποκομμένης δύναμης

Εισάγεται στη συνέχεια η έννοια της συνάρτησης αποκομμένης δύναμης (truncated power function) ως εξής:<sup>4</sup>

**Ορισμός 4.1.1 - 3** Η συνάρτηση αποκομμένης δύναμης της μορφής  $x^m$  συμβολίζεται με  $x_+^m$  και ορίζεται από τη σχέση (Σχ. 4.1.1 - 4a):

$$x_+^m = \begin{cases} x^m & \text{αν } x \geq 0 \\ 0 & \text{αν } x < 0. \end{cases} \quad (4.1.1 - 7)$$

**Ορισμός 4.1.1 - 4** Η συνάρτηση αποκομμένης δύναμης της μορφής  $(x - x_i)^m$  συμβολίζεται με  $(x - x_i)_+^m$  και ορίζεται ως εξής (Σχ. 4.1.1 - 4b):

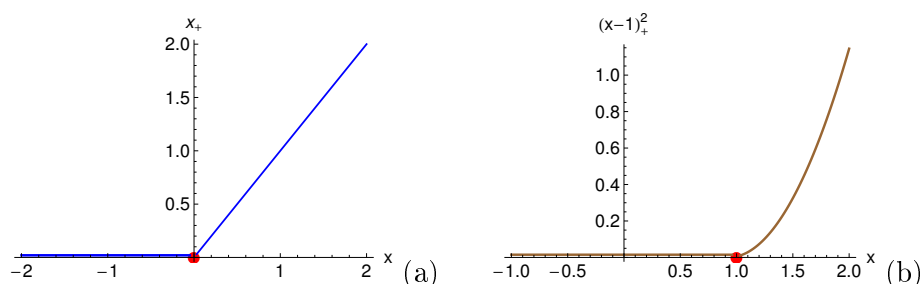
$$(x - x_i)_+^m = \begin{cases} (x - x_i)^m & \text{αν } x \geq x_i \\ 0 & \text{αν } x < x_i. \end{cases} \quad (4.1.1 - 8)$$

Η εντολή ορισμού της συνάρτησης (4.1.1 - 7), αντίστοιχα της (4.1.1 - 8) με το MATHEMATICA είναι:

<sup>4</sup>Βλέπε βιβλιογραφία και:

[https://en.wikipedia.org/wiki/Truncated\\_power\\_function](https://en.wikipedia.org/wiki/Truncated_power_function)





**Σχήμα** 4.1.1 - 4: (a) Η συνάρτηση αποκομμένης δύναμης της μορφής  $x_+$  βαθμού  $m = 1$  και (b) η  $(x - 1)_+^2$  βαθμού  $m = 2$

$$f[x_-] := \text{If}[x < 0, 0, x^m]$$

$$g[x_-] := \text{If}[x < x_i, 0, (x - x_i)^m]$$

**Παρατήρηση** 4.1.1 - 2

Η  $s(x) = (x - x_i)_+^m$  είναι μια spline βαθμού  $m$  με κόμβο στο σημείο  $x = x_i$ , για την οποία ισχύει ότι:

$$s^{(m)}(x) = \frac{d^m (x - x_i)_+^m}{d x^m} = m! (x - x_i)_+^0$$

$$= \begin{cases} m! & \text{αν } x \geq x_i \\ 0 & \text{αν } x < x_i. \end{cases} \quad (4.1.1 - 9)$$

Άρα η  $s^{(m)}(x)$  είναι ασυνεχής στο  $x_i$  με πλάτος ασυνέχειας (jump discontinuity)  $d = m!$

Η παραπάνω ορισθείσα συνάρτηση αποκομμένης δύναμης χρησιμοποιείται στην ευκολότερη παράσταση μιας spline. Συγκεκριμένα αποδεικνύεται ότι ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

**Θεώρημα** 4.1.1 - 1 Κάθε spline βαθμού  $m$  με κόμβους στα σημεία

$$x_0 < x_1 < \dots < x_n$$

γράφεται ως εξής:

$$\begin{aligned} s(x) &= a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m + c_0 (x - x_0)_+^m \\ &\quad + c_1 (x - x_1)_+^m + \dots + c_n (x - x_n)_+^m \quad (4.1.1 - 10) \\ &= \sum_{i=0}^m a_i x^i + \sum_{j=0}^n c_j (x - x_j)_+^m, \end{aligned}$$

όταν

$$c_j = \frac{s^{(m)}(x_j + 0) - s^{(m)}(x_j - 0)}{m!} \quad (4.1.1 - 11)$$

για κάθε  $j = 0, 1, \dots, n$ .

Ο αναγνώστης για την απόδειξη του θεωρήματος παραπέμπεται στη βιβλιογραφία.

**Πόρισμα 4.1.1 - 1** Όταν μια *spline*  $s$  βαθμού  $m$  με κόμβους στα σημεία

$$x_0 < x_1 < \dots < x_n$$

ορίζεται στο  $[x_0, x_n]$ , τότε γράφεται στη μορφή

$$\begin{aligned} s(x) &= b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m \\ &\quad + c_1 (x - x_1)_+^m + \dots + c_{n-1} (x - x_{n-1})_+^m \quad (4.1.1 - 12) \\ &= \sum_{i=0}^m b_i x^i + \sum_{j=1}^{n-1} c_j (x - x_j)_+^m \end{aligned}$$

όπου οι συντελεστές  $c_j$ ;  $j = 0, 1, \dots, n$  δίνονται από την (4.1.1 - 11).

**Απόδειξη.** Επειδή  $x \in [x_0, x_n]$ , από τον τύπο (4.1.1 - 10) προκύπτει ότι:

- αν  $x \geq x_0$ , σύμφωνα με τον Ορισμό 4.1.1 - 4 είναι  $(x - x_0)_+^m = (x - x_0)^m$ , και
- αν  $x \leq x_n$ , τότε  $(x - x_n)_+^m = 0$ .

Άρα ο τύπος (4.1.1 - 10) στην περίπτωση αυτή γράφεται

$$\begin{aligned} s(x) &= \overbrace{a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m + c_0 (x - x_0)_+^m}^{\text{τελικά μετά τις πράξεις: } b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m} \\ &\quad + c_1 (x - x_1)_+^m + \dots + c_{n-1} (x - x_{n-1})_+^m, \end{aligned}$$

δηλαδή η αποδεικτέα. ■

Εφαρμογές του πορίσματος θα δοθούν στην Παράγραφο 4.1.3.

### Παράδειγμα 4.1.1 - 3

Έστω η spline του Παραδείγματος 4.1.1 - 1:

$$s(x) = \begin{cases} x^3 + 2x + 1 & \text{αν } x \in (-\infty, -1) \\ -3x^2 - x & x \in [-1, 1) \\ 2x^3 - 9x^2 + 5x - 2 & x \in [1, 2) \\ x^3 - 3x^2 - 7x + 6 & x \in [2, +\infty), \end{cases} \quad (4.1.1 - 13)$$

όπου οι κόμβοι είναι στα σημεία  $x_0 = -1$ ,  $x_1 = 1$  και  $x_2 = 2$ , ενώ ο βαθμός της  $s$  είναι  $m = 3$ . Τότε σύμφωνα με την (4.1.1 - 10) είναι

$$\begin{aligned} s(x) &= x^3 + 2x + 1 + c_0 (x - x_0)_+^3 + c_1 (x - x_1)_+^3 + c_2 (x - x_2)_+^3 \\ &= x^3 + 2x + 1 + c_0 (x + 1)_+^3 + c_1 (x - 1)_+^3 + c_2 (x - 2)_+^3 \end{aligned}$$

όπου από την (4.1.1 - 11) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{s^{(3)}(x_0 + 0) - s^{(3)}(x_0 - 0)}{3!} = \frac{0 - 6}{6} = -1 \\ c_1 &= \frac{s^{(3)}(x_1 + 0) - s^{(3)}(x_1 - 0)}{3!} = \frac{12 - 0}{6} = 2 \\ c_2 &= \frac{s^{(3)}(x_2 + 0) - s^{(3)}(x_2 - 0)}{3!} = \frac{6 - 12}{6} = -1. \end{aligned}$$

Άρα

$$s(x) = x^3 + 2x + 1 - (x + 1)_+^3 + 2(x - 1)_+^3 - (x - 2)_+^3. \quad (4.1.1 - 14)$$

Η επαλήθευση ότι η (4.1.1 - 14) ισούται με την (4.1.1 - 13) γίνεται σύμφωνα με τον Ορισμό 4.1.1 - 4 ως εξής:

$$x \in (-\infty, -1)$$

$$\begin{aligned} s(x) &= x^3 + 2x + 1 - \overbrace{(x + 1)_+^3 + 2(x - 1)_+^3 - (x - 2)_+^3}^0 \\ &= x^3 + 2x + 1, \end{aligned}$$

$$x \in [-1, 1)$$

$$\begin{aligned} s(x) &= x^3 + 2x + 1 - (x+1)^3 + \overbrace{2(x-1)^3 - (x-2)^3}^0 \\ &= x^3 + 2x + 1 - (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) = -3x^2 - x, \end{aligned}$$

$$x \in [1, 2)$$

$$\begin{aligned} s(x) &= x^3 + 2x + 1 - (x+1)^3 + 2(x-1)^3 - \overbrace{(x-2)^3}^0 \\ &= x^3 + 2x + 1 - (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) \\ &\quad + 2(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = 2x^3 - 9x^2 + 5x - 2, \end{aligned}$$

$$x \in [2, +\infty)$$

$$\begin{aligned} s(x) &= x^3 + 2x + 1 - (x+1)^3 + 2(x-1)^3 - (x-2)^3 \\ &= x^3 + 2x + 1 - (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) \\ &\quad + 2(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) - (x^3 - 6x^2 + 12x - 8) \\ &= x^3 - 3x^2 - 7x + 6. \end{aligned}$$

Η εντολή ορισμού της spline  $s(x)$  του Παραδείγματος 4.1.1 - 3 με το MATHEMATICA είναι:

```
s[x_]:=x^3+2x+1-If[x<-1,0,(x+1)^3]
+2 If[x<1,0,(x-1)^3]-If[x<2,0,(x-2)^3]
```

#### 4.1.2 Φυσική spline

**Ορισμός 4.1.2 - 1.** Μια spline βαθμού  $\nu$  θα λέγεται **φυσική** (natural), όταν:

i) είναι περιττού βαθμού, δηλαδή της μορφής  $\nu = 2m - 1$ , όταν  $m = 1, 2, \dots$ ,

ii) στα άκρα διαστήματα

$$(-\infty, x_0) \quad \text{και} \quad [x_n, +\infty)$$

η  $s$  είναι ένα πολώνυμο βαθμού  $\leq m - 1$ .

**Παρατηρήσεις 4.1.2 - 1**

- i) Επειδή σύμφωνα με τον Ορισμό 4.1.1 - 1 (ii) η spline και οι παράγωγοί της τάξης

$$1, 2, \dots, \overbrace{(2m-1)}^{2(m-1)} - 1$$

πρέπει να είναι συνεχείς συναρτήσεις, προκύπτει τότε ότι στους ακραίους κόμβους  $x_0$  και  $x_n$ , όπου λόγω του Ορισμού 4.1.2 - 1 (ii) η  $s$  είναι βαθμού  $m-1$ , θα πρέπει να ισχύει

$$s^{(j)}(x_0) = s^{(j)}(x_n) = 0 \quad (4.1.2 - 1)$$

για κάθε  $j = m, m+1, \dots, 2(m-1)$ .

- ii) Στην ειδική περίπτωση που η spline είναι **κυβική**, δηλαδή βαθμού  $\nu = 3 = 2 \cdot 2 - 1$ , οπότε  $m = 2$ , τότε, αν είναι και φυσική, στα άκρα διαστήματα πρέπει να είναι βαθμού  $m-1 = 2-1 = 1$ . Άρα η συνθήκη (4.1.2 - 1) στην περίπτωση αυτή, επειδή  $2(m-1) = 2(2-1) = 2$ , γράφεται

$$s^{(2)}(x_0) = s^{(2)}(x_n) = 0. \quad (4.1.2 - 2)$$

Αποδεικνύεται ότι και στην περίπτωση της φυσικής spline ισχύει θεώρημα ανάλογο του Θεωρήματος 4.1.1 - 1. Συγκεκριμένα ισχύει ότι:

**Θεώρημα 4.1.2 - 1.** Κάθε φυσική spline βαθμού  $2m-1$  με κόμβους στα σημεία

$$x_0 < x_1 < \dots < x_n$$

γράφεται ως εξής:

$$\begin{aligned} s(x) &= a_0 + a_1 x + \dots + a_{m-1} x^{m-1} + c_0 (x - x_0)_+^{2m-1} \\ &\quad + c_1 (x - x_1)_+^{2m-1} + \dots + c_n (x - x_n)_+^{2m-1} \quad (4.1.2 - 3) \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} a_i x^i + \sum_{j=0}^n c_j (x - x_j)_+^{2m-1}, \end{aligned}$$

όταν

$$c_j = \frac{s^{(2m-1)}(x_j + 0) - s^{(2m-1)}(x_j - 0)}{(2m-1)!} \quad (4.1.2 - 4)$$

για κάθε  $j = 0, 1, \dots, n$ , ενώ οι συντελεστές  $c_j$  επαληθεύουν τις σχέσεις

$$c_0 x_0^i + c_1 x_1^i + \dots + c_n x_n^i = 0 \quad (4.1.2 - 5)$$

για κάθε  $i = 0, 1, \dots, m-1$ .

Οι σχέσεις (4.1.2 - 5) αναλυτικά γράφονται ως εξής:

$$\begin{aligned} c_0 &+ c_1 &+ \dots &+ c_n &= 0 \\ c_0 x_0 &+ c_1 x_1 &+ \dots &+ c_n x_n &= 0 \\ c_0 x_0^2 &+ c_1 x_1^2 &+ \dots &+ c_n x_n^2 &= 0 \\ \vdots &&&&\vdots \\ c_0 x_0^{m-1} &+ c_1 x_1^{m-1} &+ \dots &+ c_n x_n^{m-1} &= 0. \end{aligned} \quad (4.1.2 - 6)$$

**Πόρισμα 4.1.2 - 1.** Κάθε κυβική φυσική spline με κόμβους στα σημεία

$$x_0 < x_1 < \dots < x_n$$

γράφεται στη μορφή

$$\begin{aligned} s(x) &= a_0 + a_1 x + c_0 (x - x_0)_+^3 + c_1 (x - x_1)_+^3 \\ &+ \dots + c_n (x - x_n)_+^3, \end{aligned} \quad (4.1.2 - 7)$$

όταν

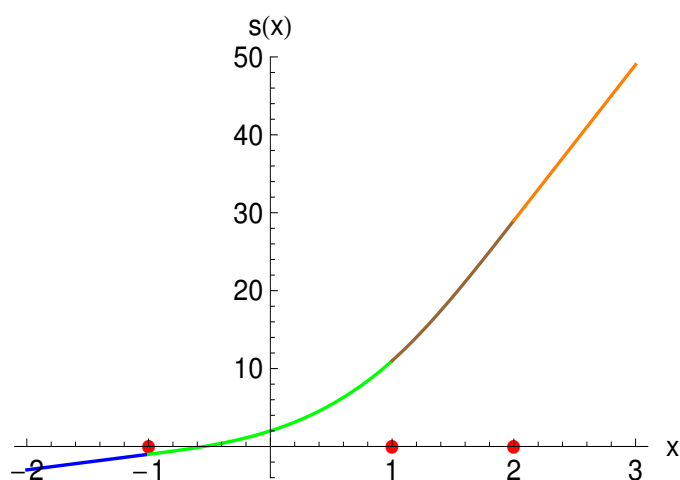
$$c_j = \frac{s^{(3)}(x_j + 0) - s^{(3)}(x_j - 0)}{3!} \quad (4.1.2 - 8)$$

για κάθε  $j = 0, 1, \dots, n$ , ενώ οι συντελεστές  $c_j$  επαληθεύουν τις σχέσεις

$$\begin{aligned} c_0 &+ c_1 &+ \dots &+ c_n &= 0, \\ c_0 x_0 &+ c_1 x_1 &+ \dots &+ c_n x_n &= 0. \end{aligned} \quad (4.1.2 - 9)$$

Η απόδειξη προκύπτει άμεσα από το Θεώρημα 4.1.3 - 2.

Όμοια, όπως και στο Πόρισμα 4.1.1 - 1, εφαρμογές των παραπάνω θα δοθούν στην Παράγραφο 4.1.3.



Σχήμα 4.1.2 - 1: Παράδειγμα 4.1.2 - 1

**Παράδειγμα 4.1.2 - 1**

Έστω η spline (Σχ. 4.1.2 - 1)

$$s(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{αν } x \in (-\infty, -1) \text{ βαθμός } 1 \\ x^3 + 3x^2 + 5x + 2 & x \in [-1, 1) \text{ } 3 \\ -2x^3 + 12x^2 - 4x + 5 & x \in [1, 2) \text{ } 3 \\ 20x - 11 & x \in [2, +\infty) \text{ } 1. \end{cases}$$

Εύκολα αποδεικνύεται<sup>5</sup> ότι η  $s$  είναι μια κυβική spline με κόμβους στα σημεία  $x_0 = -1$ ,  $x_1 = 1$  και  $x_2 = 2$ . Επειδή στα διαστήματα  $(-\infty, -1)$  και  $[2, +\infty)$  η  $s$  είναι 1ου βαθμού, σύμφωνα με τον Ορισμό 4.1.2 - 1 η  $s$  θα είναι μια **κυβική φυσική spline**.

Τότε από την (4.1.2 - 7) έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} s(x) &= 2x + 1 + c_0 (x - x_0)_+^3 + c_1 (x - x_1)_+^3 + c_2 (x - x_2)_+^3 \\ &= 2x + 1 + c_0 (x + 1)_+^3 + c_1 (x - 1)_+^3 + c_2 (x - 2)_+^3, \end{aligned}$$

<sup>5</sup>Η απόδειξη αφήνεται σαν άσκηση (βλέπε Παράδειγμα 4.1.1 - 1).

όπου από την (4.1.2 - 8) προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}c_0 &= \frac{s^{(3)}(x_0 + 0) - s^{(3)}(x_0 - 0)}{3!} = \frac{6 - 0}{6} = 1, \\c_1 &= \frac{s^{(3)}(x_1 + 0) - s^{(3)}(x_1 - 0)}{3!} = \frac{-12 - 6}{6} = -3, \\c_2 &= \frac{s^{(3)}(x_2 + 0) - s^{(3)}(x_2 - 0)}{3!} = \frac{0 + 12}{6} = 2.\end{aligned}$$

Άρα

$$s(x) = 2x + 1 + (x + 1)_+^3 - 3(x - 1)_+^3 + 2(x - 2)_+^3.$$

Τότε προφανώς ισχύει η (4.1.2 - 8), δηλαδή

$$s^{(2)}(-1) = s^{(2)}(2) = 0,$$

ενώ σύμφωνα με την (4.1.2 - 9) είναι

$$\begin{aligned}c_0 + c_1 + c_2 &= 1 - 3 + 2 = 0, \\c_0 \cdot (-1) + c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 2 &= -1 - 3 + 4 = 0.\end{aligned}$$

Η εντολή ορισμού της spline  $s(x)$  με το MATHEMATICA είναι:

```
s[x_] := 2x + 1 + If[x < -1, 0, (x + 1)^3]
        - 3 If[x < 1, 0, (x - 1)^3] + 2 If[x < 2, 0, (x - 2)^3]
```

### 4.1.3 Υπολογισμός spline

Αρχικά ορίζεται η έννοια της παρεμβολής μέσω της spline ως εξής:

**Ορισμός 4.1.3 - 1 (spline παρεμβολής).** Η spline  $s(x)$  θα λέγεται ότι παρεμβάλλεται ή ότι ορίζει μια παρεμβολή (spline interpolation) στα σημεία

$$S = \{(x_i, y_i) \quad \mu\epsilon \quad i = 0, 1, \dots, n\},$$

όπου  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ , όταν

$$s(x_i) = y_i \quad \gamma\iota\alpha \quad \kappa\acute{\alpha}\theta\epsilon \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (4.1.3 - 1)$$



**Ορισμός 4.1.3 - 2.** Η spline  $s(x)$  θα λέγεται ότι παρεμβάλλεται ή ότι ορίζει μια παρεμβολή στη συνάρτηση  $f(x)$  στους κόμβους  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ , όταν

$$s(x_i) = f(x_i) \quad \text{για κάθε } i = 0, 1, \dots, n. \quad (4.1.3 - 2)$$

### Παρατήρηση 4.1.3 - 1

Οι (4.1.3 - 1), αντίστοιχα οι (4.1.3 - 2) θα λέγονται στο εξής και **συνθήκες παρεμβολής**.

### Παράδειγμα 4.1.3 - 1

Έστω η κυβική spline  $s(x)$  του Παραδείγματος 4.1.1 - 1:

$$s(x) = \begin{cases} x^3 + 2x + 1 & \text{αν } x \in (-\infty, -1) \\ -3x^2 - x & x \in [-1, 1) \\ 2x^3 - 9x^2 + 5x - 2 & x \in [1, 2) \\ x^3 - 3x^2 - 7x + 6 & x \in [2, +\infty) \end{cases}$$

με κόμβους στα σημεία

$$x_0 = -1, \quad x_1 = 1 \quad \text{και} \quad x_2 = 2.$$

Τότε, επειδή<sup>6</sup>

$$s(x_0 - 0) = s(-1 - 0) = -2 = y_0,$$

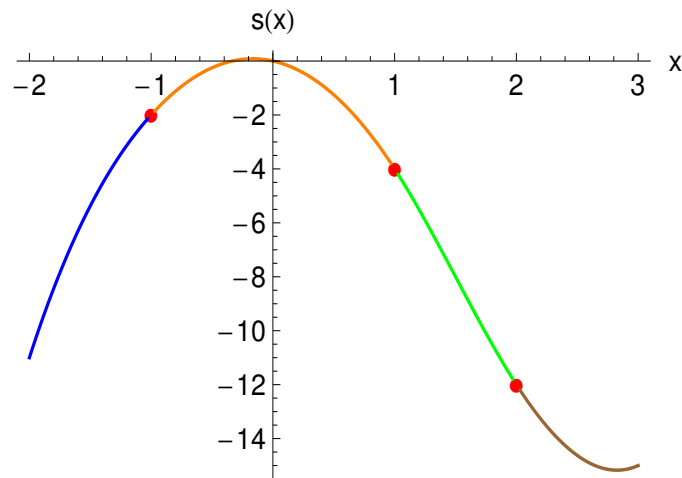
$$s(x_1 - 0) = s(1 - 0) = -4 = y_1,$$

$$s(x_2 - 0) = s(2 - 0) = -12 = y_2,$$

η  $s(x)$  ορίζει μια κυβική spline παρεμβολής, που διέρχεται από τα σημεία (Σχ. 4.1.3 - 1):

$$(x_0, y_0) = (-1, -2), \quad (x_1, y_1) = (1, -4) \quad \text{και} \quad (x_2, y_2) = (2, -12).$$

<sup>6</sup>Επειδή λόγω του ορισμού της spline είναι  $s(x_i - 0) = s(x_i + 0)$  για κάθε  $i = 0, 1, 2$ , αρκεί να υπολογιστούν μόνον οι τιμές  $s(x_i - 0) = y_i$ ;  $i = 0, 1, 2$ .



**Σχήμα 4.1.3 - 1:** Παράδειγμα 4.1.3 - 1 με κόμβους στα σημεία  $x_0 = -1$ ,  $x_1 = 1$  και  $x_2 = 2$

#### Παράδειγμα 4.1.3 - 2

Όμοια, έστω η κυβική spline  $s(x)$  του Παραδείγματος 4.1.1 - 3:

$$s(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(x+2)^3 & \text{αν } x \in [-2, -1] \\ \frac{1}{4}(3|x|^3 - 6x^2 + 4) & x \in [-1, 1] \\ \frac{1}{4}(2-x)^3 & x \in [1, 2] \end{cases}$$

με εσωτερικούς κόμβους στα σημεία

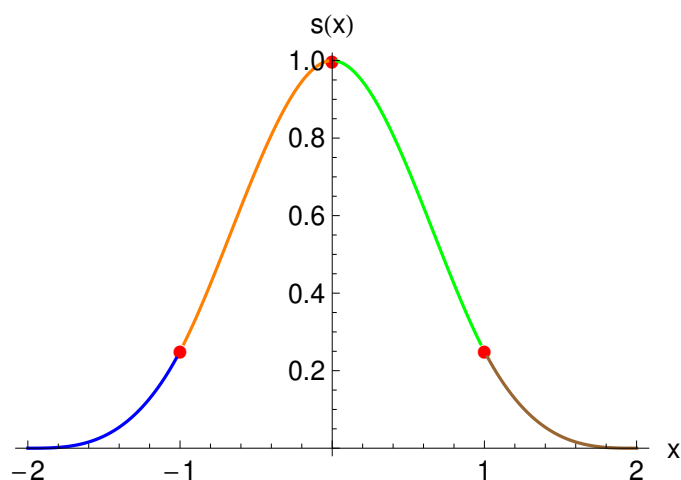
$$x_0 = -1, \quad x_1 = 1 \quad \text{και} \quad x_2 = 2.$$

Τότε, επειδή

$$s(-1-0) = \frac{1}{4} = y_0, \quad s(0-) = 1 = y_1 \quad \text{και} \quad s(1-0) = \frac{1}{4} = y_2,$$

η  $s(x)$  ορίζει επίσης μια κυβική spline παρεμβολής, που διέρχεται από τα σημεία (Σχ. 4.1.3 - 2):

$$(x_0, y_0) = \left(-1, \frac{1}{4}\right), \quad (x_1, y_1) = (0, 1) \quad \text{και} \quad (x_2, y_2) = \left(1, \frac{1}{4}\right).$$



Σχήμα 4.1.3 - 2: Παράδειγμα 4.1.3 - 2

Σχετικά με την ύπαρξη των spline παρεμβολής αποδεικνύεται ότι ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

**Θεώρημα 4.1.3 - 1** (ύπαρξης spline παρεμβολής). Υπάρχει ακριβώς μια spline, έστω  $s$ , με πεδίο ορισμού το  $[a, b]$  βαθμού  $2m - 1$  και κόμβους στα σημεία

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

όπου

$$n + 1 \geq m, \quad (4.1.3 - 3)$$

που επαληθεύει τις συνθήκες παρεμβολής

$$s(x_i) = y_i \quad \text{για κάθε } i = 0, 1, \dots, n \quad (4.1.3 - 4)$$

και τις συνθήκες στα άκρα  $a = x_0$  και  $b = x_n$

$$s^{(j)}(x_0) = u_j \quad \text{και} \quad s^{(j)}(x_n) = w_j \quad (4.1.3 - 5)$$

για κάθε  $j = 1, 2, \dots, m - 1$  ή  $j = m, m + 1, \dots, 2(m - 1)$ .

**Παρατηρήσεις 4.1.3 - 1**

Οι συνθήκες (4.1.3 - 5):

- θα λέγονται στο εξής επίσης και **συνοριακές συνθήκες παρεμβολής**,
- για την περίπτωση μιας **κυβικής spline**<sup>7</sup> γράφονται

$$s^{(1)}(x_0) = u_j \quad \text{και} \quad s^{(1)}(x_n) = w_j. \quad (4.1.3 - 6)$$

**Παράδειγμα 4.1.3 - 3**

Να υπολογιστεί η κυβική spline  $s$  με κόμβους στα σημεία  $x_0 = -1$ ,  $x_1 = 1$  και  $x_2 = 2$ , που επαληθεύει τις συνθήκες παρεμβολής (4.1.3 - 4):

$$s(-1) = -2, \quad s(1) = -4, \quad s(2) = -12 \quad (4.1.3 - 7)$$

και τις συνοριακές (4.1.3 - 5):

$$s^{(1)}(-1) = 5, \quad s^{(1)}(2) = -7. \quad (4.1.3 - 8)$$

**Λύση.** Σύμφωνα με τα δεδομένα οι κόμβοι είναι

$$x_0 = -1, \quad x_1 = 1 \text{ (εσωτερικός κόμβος)} \quad \text{και} \quad x_2 = 2.$$

Άρα ο αριθμός των κόμβων είναι  $n = 3$  και ο βαθμός της spline επίσης 3. Επειδή ο βαθμός 3 της spline γράφεται

$$3 = 2 \cdot \overbrace{2}^m - 1, \quad \text{οπότε} \quad m = 2 \quad \text{και} \quad n + 1 = 3 + 1 = 4 \geq 2 = m,$$

η συνθήκη (4.1.3 - 3) επαληθεύεται και η spline υπάρχει.

<sup>8</sup>Από το Πρόρισμα 4.1.1 - 1 προκύπτει ότι επειδή ο βαθμός της είναι 3 και ο εσωτερικός κόμβος το  $x_1$ , η  $s(x)$  θα είναι της μορφής

$$s(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + c(x - 1)_+^3. \quad (4.1.3 - 9)$$

<sup>7</sup>Ο βαθμός 3 γράφεται  $3 = 2 \cdot 2 - 1$ , οπότε  $m = 2$ .

<sup>8</sup>Όταν  $x \in [x_0, x_n]$  και η spline  $s$  είναι βαθμού  $m$ , θα έχει τη μορφή

$$s(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m + c_1 (x - x_1)_+^m + \dots + c_{n-1} (x - x_{n-1})_+^m$$

όπου  $x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1}$  είναι οι **εσωτερικοί κόμβοι**.

Τότε από την εφαρμογή των συνθηκών παρεμβολής (4.1.3-8) στην (4.1.3-9), επειδή σύμφωνα με τον Ορισμό 4.1.1 - 4 είναι

$$(x-1)_+^3 = \begin{cases} 0 & \text{αν } x < 1 \\ (x-1)^3 & \text{αν } x \geq 1, \end{cases}$$

προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} s(-1) &= b_0 + b_1(-1) + b_2(-1)^2 + b_3(-1)^3 + c \overbrace{(x-1)_+^3}^0 \\ &= b_0 - b_1 + b_2 - b_3 = -2 \\ s(1) &= b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + c \overbrace{(x-1)_+^3}^0 \\ &= b_0 + b_1 + b_2 + b_3 = -4, \\ s(2) &= b_0 + b_1 2 + b_2 2^2 + b_3 2^3 + c(2-1)^3 \\ &= b_0 + 2b_1 + 4b_2 + 8b_3 + c = -12, \end{aligned}$$

δηλαδή

$$\begin{aligned} b_0 - b_1 + b_2 - b_3 &= -2 \\ b_0 + b_1 + b_2 + b_3 &= -4 & (4.1.3 - 10) \\ b_0 + 2b_1 + 4b_2 + 8b_3 + c &= -12. \end{aligned}$$

Από την (4.1.3 - 9) παραγωγίζοντας έχουμε

$$s^{(1)}(x) = b_1 + 2b_2 x + 3b_3 x^2 + 3c(x-1)_+^2,$$

οπότε από την εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών παρεμβολής (4.1.3 – 8) στην παραπάνω σχέση προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} s^{(1)}(-1) &= b_1 + 2b_2(-1) + 3b_3(-1)^2 + 3c \overbrace{(x-1)_+^2}^0 \\ &= b_1 - 2b_2 + 3b_3 = 5, \\ s^{(1)}(2) &= b_1 + 2b_2 \cdot 2 + 3b_3 \cdot 2^2 + 3c(2-1)^2 \\ &= b_1 + 4b_2 + 12b_3 + 3c = -7, \end{aligned}$$

δηλαδή

$$\begin{aligned} b_1 - 2b_2 + 3b_3 &= 5 \\ b_1 + 4b_2 + 12b_3 + 3c &= -7. \end{aligned} \quad (4.1.3 - 11)$$

Τότε από τη λύση του συστήματος των εξισώσεων (4.1.3–10) και (4.1.3–11) τελικά έχουμε

$$b_0 = 0, \quad b_1 = -1, \quad b_2 = -3, \quad b_3 = 0 \quad \text{και} \quad c = 2.$$

Άρα η spline  $s$  είναι της μορφής

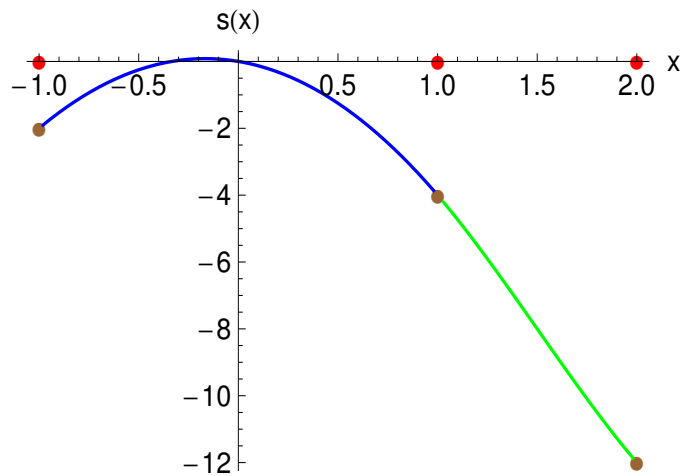
$$s(x) = -x - 3x^2 + 2(x-1)_+^3, \quad \text{όταν} \quad x \in [-1, 2]$$

που συμπίπτει στο διάστημα  $[-1, 2]$  με την αντίστοιχη

$$s(x) = \begin{cases} -3x^2 - x & \text{αν} \quad x \in [-1, 1) \\ 2x^3 - 9x^2 + 5x - 2 & \text{αν} \quad x \in [1, 2]. \end{cases}$$

του Παραδείγματος 4.1.1 - 1.

Στο Πρόγραμμα 4.1.3 - 1 δίνεται ο υπολογισμός, η γραφική παράσταση της spline  $s(x)$ , όταν  $x \in [-2, 3]$ , των κόμβων της και των σημείων παρεμβολής με το MATHEMATICA.



**Σχήμα** 4.1.3 - 3: Παράδειγμα 4.1.3 - 3 με σημεία παρεμβολής  $(-1, -2)$ ,  $(1, -4)$  και  $(2, -12)$  με συνοριακές συνθήκες  $s^{(1)}(-1) = 5$  και  $s^{(1)}(2) = -7$

#### Πρόγραμμα 4.1.3 - 1 (κυβικής spline)

```
x0 = -1; x1 = 1; x2 = 2;
y0 = -2; y1 = -4; y2 = -12;
s[x_] := b0 + b1 x + b2 x^2 + b3 x^3
        + c If[x < x1, 0, (x - x1)^3]
y = D[s[x], x] /. x -> x0;
z = D[s[x], x] /. x -> x2;
sol = Solve[{s[x0] == y0, s[x1] == y1, s[x2] == y2,
            y == 5, z == -7}, {b0, b1, b2, b3, c}]
s1[x_] := s[x] /. sol
Print["Spline s(x)=", s1[x]]
data = {{x0, 0}, {x1, 0}, {x2, 0}};
fgr1 = ListPlot[data, PlotStyle -> Red, PlotMarkers -> "."];
data1 = {{x0, y0}, {x1, y1}, {x2, y2}};
fgr2 = ListPlot[data1, PlotStyle -> Brown,
            PlotMarkers -> "."];
fgr3 = Show[Plot[s1[x], {x, x0, x1}, PlotStyle -> Blue],
            Plot[s1[x], {x, x1, x2}, PlotStyle -> Green]];
fgr = Show[fgr1, fgr2, fgr3, AxesLabel -> {"x", "s(x)"}]
```

■

**Υπολογισμός φυσικών spline**

Σχετικά με τον υπολογισμό των φυσικών spline ισχύει το παρακάτω γενικό θεώρημα:

**Θεώρημα 4.1.3 - 2.** Υπάρχει ακριβώς μια φυσική spline, έστω  $s$ , με πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$  βαθμού  $2m - 1$  και κόμβους στα σημεία

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b,$$

όταν

$$\mathbf{n + 1 \geq m}, \quad (4.1.3 - 12)$$

που επαληθεύει τις συνθήκες παρεμβολής

$$s(x_i) = y_i \quad \text{για κάθε } i = 0, 1, \dots, n, \quad (4.1.3 - 13)$$

όταν  $y_i \in \mathbb{R}$ .

**Παράδειγμα 4.1.3 - 4**

Να υπολογιστεί η κυβική φυσική spline με κόμβους στα σημεία

$$x_0 = -1, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2$$

που επαληθεύει τις συνθήκες παρεμβολής

$$s(-1) = -1, \quad s(1) = 11, \quad \text{και} \quad s(2) = 29. \quad (4.1.3 - 14)$$

**Λύση.** Ο αριθμός των κόμβων είναι  $n = 3$ , ενώ ο βαθμός της spline 3, που γράφεται:

$$3 = 2 \cdot \overbrace{2}^m - 1, \quad \text{δηλαδή} \quad m = 2.$$

Άρα  $n + 1 = 3 + 1 = 4 \geq 2 = m$ , οπότε επαληθεύεται η συνθήκη (4.1.3 - 12) και η spline υπάρχει.

Από το <sup>9</sup>Πόρισμα 4.1.2 - 1 προκύπτει ότι η spline θα έχει τη μορφή

$$s(x) = a_0 + a_1 x + c_0 (x + 1)_+^3 + c_1 (x - 1)_+^3 + c_2 (x - 2)_+^3. \quad (4.1.3 - 15)$$

<sup>9</sup>Κάθε **κυβική φυσική** spline ( $2m - 1 = \mathbf{3} = 2 \cdot 2 - 1$ , οπότε  $m = 2$ ) με κόμβους στα σημεία

$$x_0 < x_1 < \dots < x_n$$



Τότε από την εφαρμογή των συνθηκών παρεμβολής (4.1.3 – 14) στην (4.1.3 – 15) προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} s(-1) &= a_0 + a_1(-1) + \overbrace{c_0(x+1)_+^3 + c_1(x-1)_+^3 + c_2(x-2)_+^3}^0 \\ &= a_0 - a_1 = -1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s(1) &= a_0 + a_1 + c_0(1+1)^3 + \overbrace{c_1(x-1)_+^3 + c_2(x-2)_+^3}^0 \\ &= a_0 + a_1 + 8c_0 = 11, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s(2) &= a_0 + a_1 \cdot 2 + c_0(1+2)^3 + c_1(2-1)^3 + \overbrace{c_2(x-2)_+^3}^0 \\ &= a_0 + 2a_1 + 27c_0 + c_1 = 29, \end{aligned}$$

δηλαδή

$$\begin{aligned} a_0 - 3a_1 &= -1 \\ a_0 + a_1 + 8c_0 &= 11 \\ a_0 + 2a_1 + 27c_0 + c_1 &= 29. \end{aligned} \quad (4.1.3 - 16)$$

Από την (4.1.2 – 9) έχουμε

$$\begin{aligned} c_0 + c_1 + c_2 &= 0 \\ c_0 x_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2 &= 0, \end{aligned}$$

οπότε

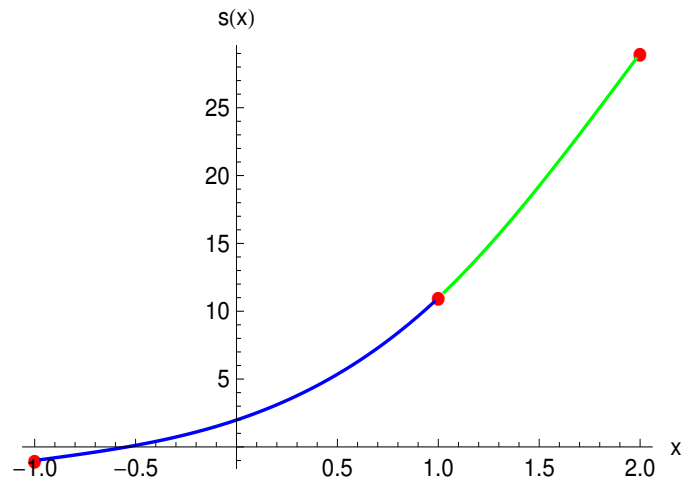
$$\begin{aligned} c_0 + c_1 + c_2 &= 0 \\ -c_0 + c_1 + 2c_2 &= 0. \end{aligned} \quad (4.1.3 - 17)$$

γράφεται ως εξής:

$$s(x) = a_0 + a_1 x + c_0(x-x_0)_+^3 + c_1(x-x_1)_+^3 + \dots + c_n(x-x_n)_+^3,$$

όταν οι συντελεστές  $c_j$  επαληθεύουν τις σχέσεις

$$\begin{aligned} c_0 + c_1 + \dots + c_n &= 0, \\ c_0 x_0 + c_1 x_1 + \dots + c_n x_n &= 0. \end{aligned}$$



**Σχήμα 4.1.3 - 4:** Παράδειγμα 4.1.3 - 4 με σημεία παρεμβολής  $(-1, -1)$ ,  $(1, 11)$  και  $(2, 29)$

Από τη λύση του συστήματος των εξισώσεων (4.1.3 – 16) και (4.1.3 – 17) τελικά προκύπτουν οι εξής συντελεστές:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 2, \quad c_0 = 1, \quad c_1 = -3 \quad \text{και} \quad c_2 = 2.$$

Άρα σύμφωνα με την (4.1.3 – 15) η spline  $s$ , όταν  $x \in \mathbb{R}$ , θα είναι της μορφής (Σχ. 4.1.3 - 4)

$$s(x) = s(x) = 1 + 2x + (x + 1)_+^3 - 3(x - 1)_+^3 + 2(x - 2)_+^3$$

που συμπίπτει με την αντίστοιχη μορφή του Παραδείγματος 4.1.2 - 1.

Στο Πρόγραμμα 4.1.3 - 2 δίνεται ο υπολογισμός, η γραφική παράσταση της  $s(x)$  όταν  $x \in [-2, 3]$  και των σημείων παρεμβολής με το MATHEMATICA.

**Πρόγραμμα 4.1.3 - 2** (κυβικής φυσικής spline)

```
x0 = -1;x1 = 1;x2 = 2;y0 = -1;y1 = 11;y2 = 29;
s[x_] := a0 + a1 x + c0 If[x < x0, 0, (x - x0)^3]
        + c1 If[x < x1, 0, (x - x1)^3]
        + c2 If[x < x2, 0, (x - x2)^3]
y = c0 + c1 + c2;
z = c0 x0 + c1 x1 + c2 x2;
```

```

sol = Solve[{s[x0] == y0, s[x1] == y1, s[x2] == y2,
            y == 0, z == 0}, {a0, a1, c0, c1, c2}]
s1[x_] := s[x] /. sol
Print["Spline s(x)=", s1[x]]
Plot[s1[x], {x, -2, 3}]
data = {{x0, y0}, {x1, y1}, {x2, y2}};
fgr1 = ListPlot[data, PlotStyle -> Red,
                PlotMarkers -> "."];
fgr2 = Show[Plot[s1[x], {x, x0, x1}, PlotStyle -> Blue],
            Plot[s1[x], {x, x1, x2}, PlotStyle -> Green]];
fgr = Show[fgr1, fgr2, PlotRange -> All,
            AxesLabel -> {"x", "s(x)"}]

```

■

## Ασκήσεις

1. Αν  $x \in [-1, 2]$ , να γραφεί η spline του Παραδείγματος 4.1.1 - 3 στη μορφή (4.1.1 - 12).
2. Δείξτε ότι η  $s(x) = (x - x_i)_+^m$  ορίζει μια spline βαθμού  $m$  με κόμβο το σημείο  $x_i$ .
3. Αιτιολογήστε τον ελάχιστο αριθμό κόμβων που απαιτούνται για μια κυβική, αντίστοιχα 5ου βαθμού (quintic) spline.
4. Να υπολογιστεί η κυβική φυσική spline, που διέρχεται από τα σημεία παρεμβολής

$$(0, 0), \quad (1, 2), \quad (2, 1) \quad \text{και} \quad (3, 0).$$

5. Να γραφεί το πρόγραμμα με το MATHEMATICA, αντίστοιχα το MATLAB, που υπολογίζει τη λύση της Άσκησης 4 και στη συνέχεια να γίνει η γραφική παράσταση της spline, των κόμβων και των σημείων παρεμβολής.
6. Να γραφούν τα αντίστοιχα Προγράμματα των 4.1.3 - 1 και 4.1.3 - 2 με το MATLAB. Ποια η μορφή των προγραμμάτων με το MATHEMATICA, αντίστοιχα το MATLAB για την περίπτωση μιας spline 5ου βαθμού;
7. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^1 e^{-x^2} dx \quad \text{με θεωρητική τιμή:} \quad I \approx 0.746824$$

χρησιμοποιώντας μια κυβική spline με 3, αντίστοιχα 4 ισαπέχοντες κόμβους, όταν

- i) οι συνθήκες (4.1.3 – 5) συμπίπτουν με τις τιμές της παραγώγου της ολοκληρωτέας συνάρτησης στα άκρα σημεία,
- ii) η spline είναι φυσική.

Σε κάθε περίπτωση να γίνει σύγκριση με τη θεωρητική τιμή.

# Βιβλιογραφία

- [1] Ακρίβης, Γ. & Δουγαλής, Β. (1995). *Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης. ISBN 978-960-524-022-6.
- [2] Στεφανάκος, Χ. (2009). *Προγραμματισμός H/Y με MATLAB*. Γκιούρδας Εκδοτική. ISBN 978-960-387-856-8.
- [3] Ahlberg, J.H. & Nilson, E.N. & Walsh, J.L. (1967). *The theory of splines and their applications*. New York: Academic Press. ISBN: 978-0-12-044750-3.
- [4] Atkinson, K. E. (1989). *An Introduction to Numerical Analysis*. John Wiley & Sons (2nd ed.). ISBN 0-471-50023-2.
- [5] Burden, R. L. & Faires, D. J. (2010). *Numerical Analysis*. Brooks/Cole (7th ed.). ISBN 978-0-534-38216-2.
- [6] de Boor, C. (2001). *A Practical guide to splines*. Springer-Verlang New York Inc. ISBN 978-0-387-95366-3.
- [7] Don, E. (2006). *Schaum's Outlines - Mathematica*. Εκδόσεις Κλειδάριθμος. ISBN 978-960-209-961-2.
- [8] Greville, T. N. E. (1969). *Theory and applications of spline functions*. New York: Academic Press. ISBN 0-12-302950-3.
- [9] Leader, L. J. (2004). *Numerical Analysis and Scientific Computation*. Addison-Wesley. ISBN 978-0-201-73499-7.

- [10] Schatzman, M. (2002). *Numerical Analysis: A Mathematical Introduction*. Oxford: Clarendon Press. ISBN 978-0-19-850279-1.
- [11] Stoer, J. & Bulirsch, R. (2002). *Introduction to Numerical Analysis*. Springer (3rd ed.). ISBN 978-0-387-95452-3.
- [12] Sli, E. & Mayers, D. (2003). *An Introduction to Numerical Analysis*. Cambridge University Press. ISBN 978-0-521-00794-8.

### Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- [http://en.wikipedia.org/wiki/Main\\_Page](http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page)
- <http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm>
- <http://mathworld.wolfram.com/>
- <http://eom.springer.de/>