ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΑΘΗΝΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΝΑΥΠΗΓΙΚΗΣ

Μάθημα: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

Διδάσκων: Δρ. Μπράτσος Αθανάσιος

Ακαδημαϊκό έτος: 2013 – 2014

ΤΙΤΛΟΣ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗΣ ΑΣΚΗΣΗΣ: Προσεγγιστική Λύση Εξισώσεων

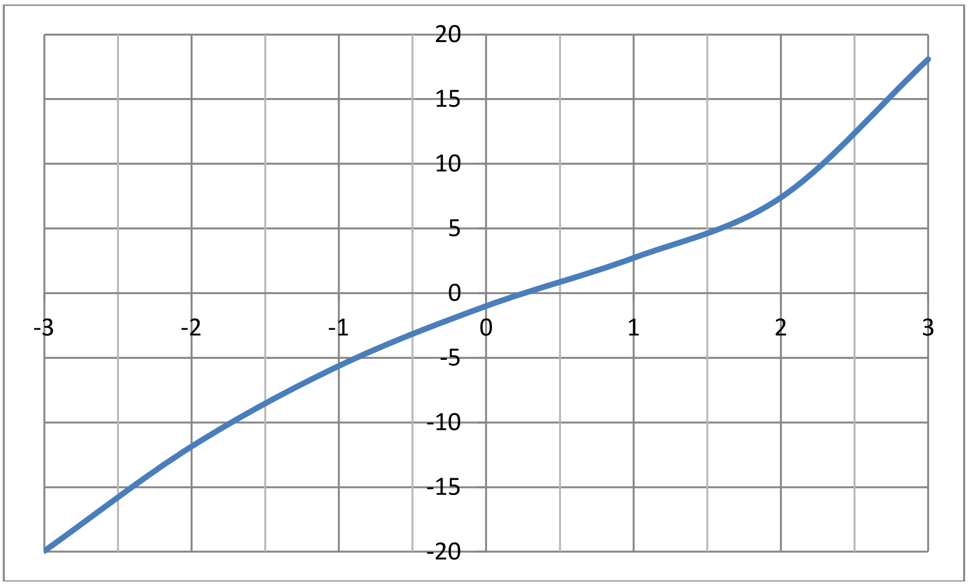
ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ ΣΠΟΥΔΑΣΤΗ: Εμμανουήλ Δ. Μωράκης

ΑΡ. ΜΗΤΡΩΟΥ/ ΕΞΑΜΗΝΟ: 05145 / ΠΤΧ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΠΑΡΑΔΟΣΗΣ: 18/10/2013

Παράγραφος 1.1

Ερώτημα 1



Όπως μπορούμε να δούμε από την γραφική παράσταση, μία ρίζα της συνάρτησης $f(x) = e^x – x^2 + 3x – 2$ βρίσκεται στο διάστημα [0,0.5]. Χρησιμοποιώντας την μέθοδο του μέσου σημείου έχουμε:

f(0) = -1 f(0.25) = -0.02847 f(0.5) = 0.89872

f(0) * f(0.25) = 0.028475 f(0.25) * f(0.5) = -0.02559

Αφού f(0.25) * f(0.5) < 0, τότε η ρίζα βρίσκεται στο διάστημα [0.25,0.5]. Έτσι έχουμε:

f(0.25) = -0.02847 f(0.375) = 0.43937 f(0.5) = 0.89872

f(0.25) * f(0.375) = -0.01251 f(0.375) * f(0.5) = 0.39487

Συνεχίζοντας την παραπάνω διαδικασία για ακόμη τρείς επαναλήψεις έχουμε:

$3^η$ επανάληψη

A/A	x	f(x)
i	0.25	-0.02847
ii	0.3125	0.20668
iii	0.375	0.43937

f(i) * f(ii)	-0.00589
f(ii) * f(iii)	0.09081

$4^η$ επανάληψη

Α/Α	x	f(x)
i	0.25	-0.02847
ii	0.28125	0.08943
iii	0.3125	0.20668

f(i) * f(ii)	-0.00255
f(ii) * f(iii)	0.01848

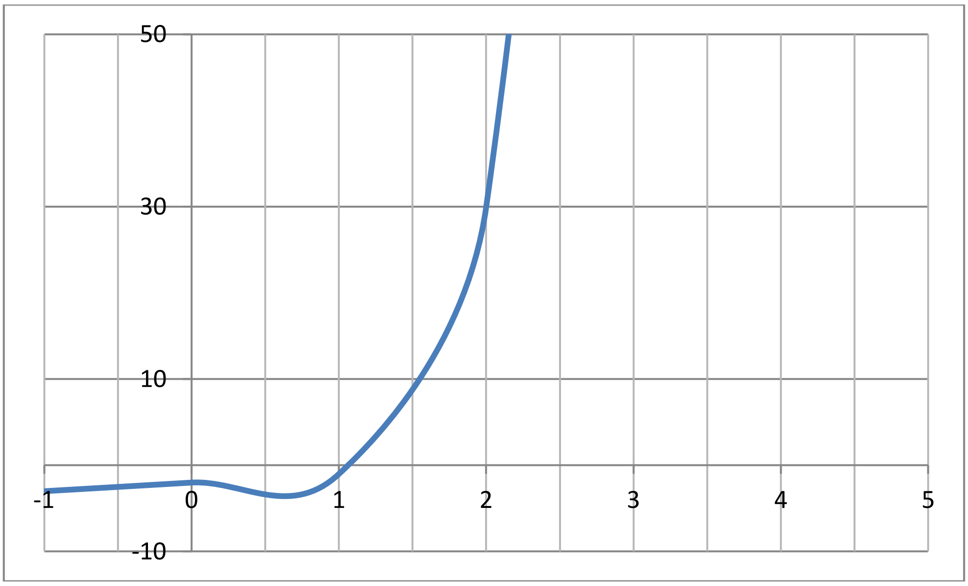
$5^η$ επανάληψη

Α/Α	x	f(x)
i	0.25	-0.02847
ii	0.265625	0.03056
iii	0.28125	0.08943

f(i) * f(ii)	-0.00087
f(ii) * f(iii)	0.00273

Άρα μία ρίζα της εξίσωσης μας είναι: (0.25 + 0.265625) / 2 = **0.2578125**

Ερώτημα 2



Όπως μπορούμε να δούμε από την γραφική παράσταση, μία ρίζα της συνάρτησης $f(x) = x^5 – 2$ η οποία είναι κοντά στον αριθμό $2^{1/5}$ βρίσκεται στο διάστημα [1,1.5]. Χρησιμοποιώντας την μέθοδο του μέσου σημείου έχουμε:

f(1) = -1 f(1.25) = 1.05176 f(1.5) = 5.59375

f(1) * f(1.25) = -1.05176 f(1.25) * f(1.5) = 5.88327

Αφού f(1) * f(1.25) < 0, τότε η ρίζα βρίσκεται στο διάστημα [1,1.25]. Έτσι έχουμε:

f(1) = -1 f(1.125) = -0.19797 f(1.25) = 1.051758 f(1) * f(1.125) = 0.19797 f(1.125) * f(1.25) = -0.20821

Συνεχίζοντας την παραπάνω διαδικασία για ακόμη τέσσερις επαναλήψεις έχουμε:

3^{η} επανάληψη

A/A	x	f(x)
i	1.125	-0.19797
ii	1.1875	0.361392
iii	1.25	1.051758

f(i) * f(ii)	-0.07154
f(ii) * f(iii)	0.38010

4^{η} επανάληψη

A/A	x	f(x)
i	1.125	-0.19797
ii	1.15625	0.066611
iii	1.1875	0.361392

f(i) * f(ii)	-0.01319
f(ii) * f(iii)	0.02407

5^{η} επανάληψη

A/A	x	f(x)
i	1.125	-0.19797
ii	1.140625	-0.0693
iii	1.15625	0.066611

f(i) * f(ii)	0.01372
f(ii) * f(iii)	-0.00462

6^{η} επανάληψη

A/A	x	f(x)
i	1.140625	-0.0693
ii	1.1484375	-0.00227
iii	1.15625	0.066611

f(i) * f(ii)	0.00016
f(ii) * f(iii)	-0.00015

Άρα η ρίζα της εξίσωσης μας είναι: (1.1484375 + 1.15625) / 2 = **1.15234375**

Η θεωρητική τιμή με προσέγγιση στο όγδοο δεκαδικό είναι: $2^{1/5}$ = 1.14869835

{[(1.15234375 - 1.14869835) / 1.15234375]*100} = 0.31634614

Άρα η επί τοις εκατό διαφορά των ριζών που βρήκαμε ως προς την προσεγγιστική μέθοδο είναι ~ 0.316%

Ερώτημα 3

Αφού το διάστημα που θέλουμε να βρούμε την ρίζα της συνάρτησης $f(x) = x^4 - x - 3$ είναι το [1,2], έχουμε: α =1, β = 2 και ε = 10^{-2}.

Έτσι: —— = —— = $2^{-i} < 10^{-2} \rightarrow 2^{i} > 10^{2}$

Λογαριθμίζοντας με βάση το 10 έχουμε: $\log_{10}(2^{i}) > \log_{10}(10^{2}) \rightarrow i >$ ——— $\rightarrow$

$\rightarrow i > 6.64$, άρα οι επαναλήψεις θα είναι 7.

$1^{η}$ επανάληψη

Α/Α	x	f(x)
i	1	-3
ii	1.5	0.5625
iii	2	11

f(i) * f(ii)	-1.6875
f(ii) * f(iii)	6.1875

$2^{η}$ επανάληψη

Α/Α	x	f(x)
i	1	-3
ii	1.25	-1.80859
iii	1.5	0.5625

f(i) * f(ii)	5.425781
f(ii) * f(iii)	-1.01733

$3^{η}$ επανάληψη

Α/Α	x	f(x)
i	1.25	-1.80859
ii	1.375	-0.80054
iii	1.5	0.5625

f(i) * f(ii)	1.447846
f(ii) * f(iii)	-0.4503

$4^{η}$ επανάληψη

Α/Α	x	f(x)
i	1.375	-0.80054
ii	1.4375	-0.16747
iii	1.5	0.5625

f(i) * f(ii)	0.134062
f(ii) * f(iii)	-0.0942

$5^{η}$ επανάληψη

Α/Α	x	f(x)
i	1.4375	-0.16747
ii	1.46875	0.184876
iii	1.5	0.5625

f(i) * f(ii)	-0.03096
f(ii) * f(iii)	0.103993

6η επανάληψη

A/A	x	f(x)
i	1.4375	-0.16747
ii	1.453125	0.005612
iii	1.46875	0.184876

f(i) * f(ii)	-0.00094
f(ii) * f(iii)	0.001038

7η επανάληψη

A/A	x	f(x)
i	1.4375	-0.16747
ii	1.4453125	-0.08169
iii	1.453125	0.005612

f(i) * f(ii)	0.01368
f(ii) * f(iii)	-0.00046

Άρα η ρίζα της εξίσωσης μας είναι: (1.4453125 + 1.453125) / 2 = **1.44921875**

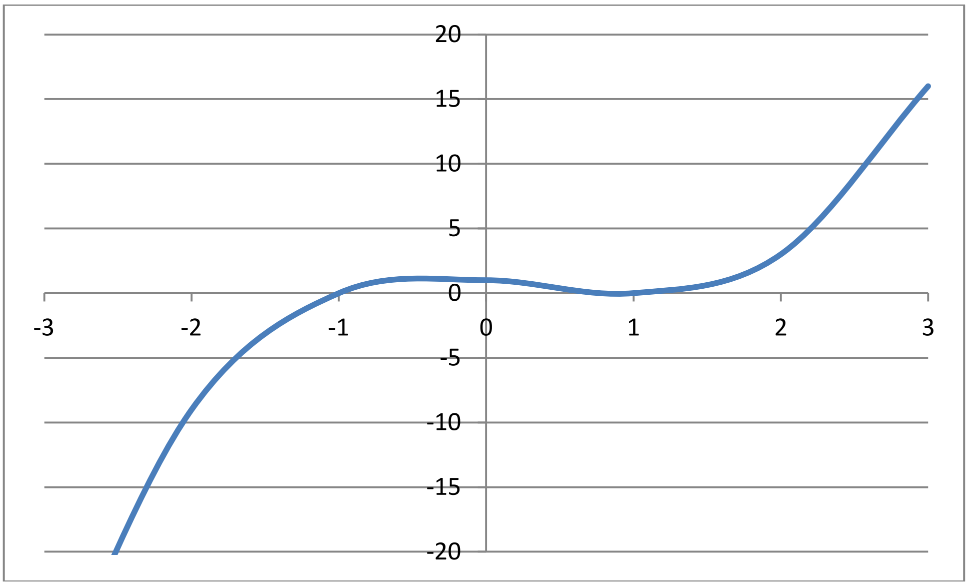
Ερώτημα 4

Το πρόγραμμα υπολογισμού της παραπάνω ρίζας σε Matlab είναι το ακόλουθο:

```
format long
left = 1;
right = 2;
middle = (right + left)/2;
n = 0;
while n<7
   yleft = left^4 - left -3;
   yright = right^4 - right -3;
   ymiddle = middle^4 - middle -3;
   if yleft * ymiddle < 0;
      right = middle ;
      left = left;
   else
      left = middle;
      right = right;
   end
   middle = (right + left) / 2;
   n = n + 1;
end
sprintf('%0.8f', middle)
```

Παράγραφος 1.2

Ερώτημα 1



Αν και οι δύο πρώτες ρίζες της εξίσωσης $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$, είναι προφανείς (-1 και 1), θα υποθέσω ότι δεν γνωρίζω τις ρίζες και θα ξεκινήσω με $x_0 = 0.95$

Έτσι για την εξίσωση $x = -1 + \frac{}{} + \frac{}{2}$ έχουμε για i=0, $x_{0+1} = x_1 = -1 + \frac{}{} + \frac{}{} \approx 1.16066$

Στη συνέχεια έχουμε: $x_2 = -1 + \frac{}{} + \frac{}{} = 0.603889$

Επαναλαμβάνοντας την διαδικασία για άλλες 8 φορές έχουμε:

i	x_i	$g(x_i)$
1	0.95000	1.16066
2	1.16066	0.60389
3	0.60389	3.39807
4	3.39807	-0.61911
5	-0.61911	-0.00629
6	-0.00629	25089.05710
7	25089.05710	-0.99996
8	-0.99996	-0.99996
9	-0.99996	-0.99996
10	-0.99996	-0.99996

Άρα προσεγγιστικά μία ρίζα μας είναι η x = **-0.99996**

Ερώτημα 2

Αφού $x_0 = 1$ τότε έχω: $x_1 = \text{——}^{1/2} = 0.70711$

Για τις επόμενες 3 επαναλήψεις έχουμε:

i	x_i	$g(x_i)$
2	0.70711	0.68659
3	0.68659	0.68310
4	0.68310	0.68247

Άρα προσεγγιστικά η ρίζα μας είναι η x = **0.68247**

Ερώτημα 3

Για να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = x – 2^{-x} = 0$ έχει μια ακριβώς λύση στο διάστημα [1/3,1] θα πρέπει να βρούμε τα f(1/3) και f(1).

Η εξίσωση θα γραφεί ως: $x = 2^{-x} = g(x)$

Έτσι έχουμε: f(1/3) = -0.46037 και f(1) = 0.5, άρα σίγουρα υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα της εξίσωσης μέσα στο διάστημα [1/3,1]. Για τον λόγο αυτό θα πρέπει να γίνει έλεγχος της μονοτονίας της g(x). Έτσι έχουμε:

$g'(x) = -2^{-x}\log_{10}(2)$, ενώ g'(1/3) = -0.23893 και g'(1) = -0.15051, δηλαδή η g' είναι μια μονότονη συνάρτηση στο D με $|g'(x)| < 1$, όπου προφανώς $g(x) \in (1/3,1)$ για κάθε $x \in D$.

Για να προσδιορίσουμε την λύση της θα λάβουμε ως $x_0 = 0.7$. Έτσι έχουμε:

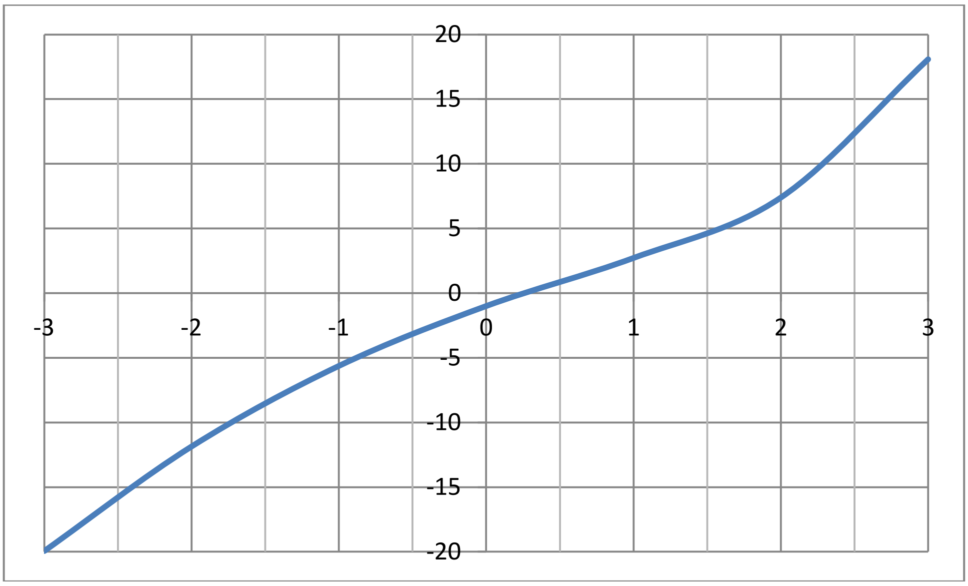
$X_1 = 2^{-0.7} \rightarrow x_1 = 0.61557$. Ομοίως για τις επόμενες τρείς επαναλήψεις θα έχουμε:

i	x_i	$g(x_i)$
1	0.7	0.61557
2	0.615572	0.65267
3	0.652671	0.63610
4	0.636102	0.64345

Άρα προσεγγιστικά η λύση της εξίσωσης στο [1/3,1] είναι x = **0.64345**

Παράγραφος 1.3

Ερώτημα 1-1



Όπως μπορούμε να δούμε από την γραφική παράσταση, μία ρίζα της εξίσωσης $f(x) = e^x - x^2 + 3x - 2$ βρίσκεται στο διάστημα [0,0.5]. Χρησιμοποιώντας την μέθοδο του Newton – Raphson για 5 επαναλήψεις και λαμβάνοντας ως $x_0 = 0.5$ έχουμε:

$$f'(x) = e^x - 2x + 3$$

$$x_1 = x_0 - [f(x_0) / f'(x_0)] \rightarrow x_1 = 0.5 - (0.89872/3.64872) = 0.25369$$

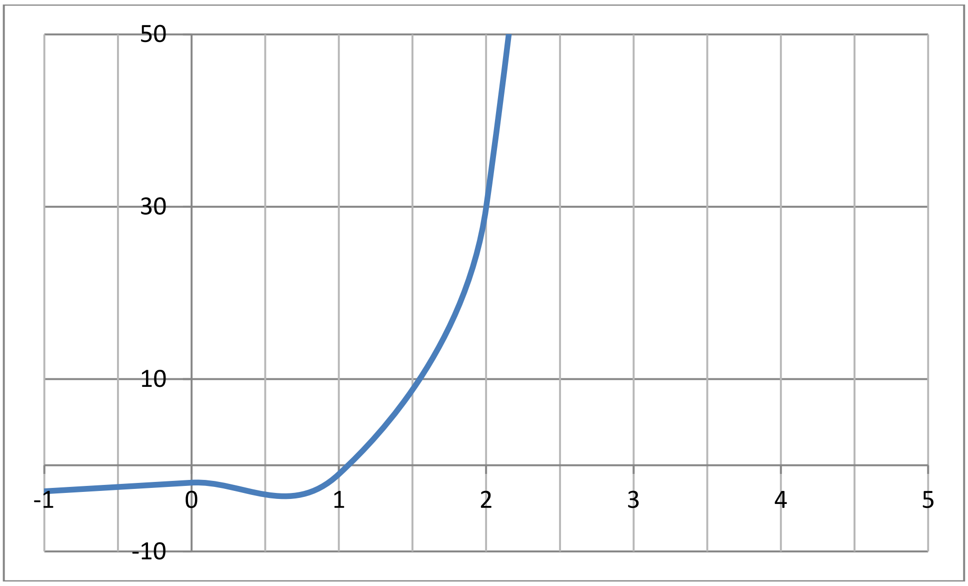
$$x_2 = x_1 - [f(x_1) / f'(x_1)] \rightarrow x_2 = 0.25369 - (-0.01452/3.78139) = 0.25753$$

Ομοίως για τις επόμενες τρεις επαναλήψεις έχουμε:

i	x_{i-1}	$f(x_{i-1})$	$f'(x_{i-1})$	$f(x_{i-1})/f'(x_{i-1})$	x_i
3	0.25753	-0.00001	3.77867	0.00000	**0.25753**
4	0.25753	0.00000	3.77867	0.00000	**0.25753**
5	0.25753	0.00000	3.77867	0.00000	**0.25753**

Άρα μια ρίζα τής εξίσωσής μας είναι η x = **0.27573**

Ερώτημα 1-2



Όπως μπορούμε να δούμε από την γραφική παράσταση, μία τιμή κοντά στη ρίζα της συνάρτησης $f(x) = x^5 – 2$ είναι η $x_0 = 1$. Χρησιμοποιώντας την μέθοδο του Newton – Raphson για 6 επαναλήψεις έχουμε:

$$f'(x) = 5x^4$$

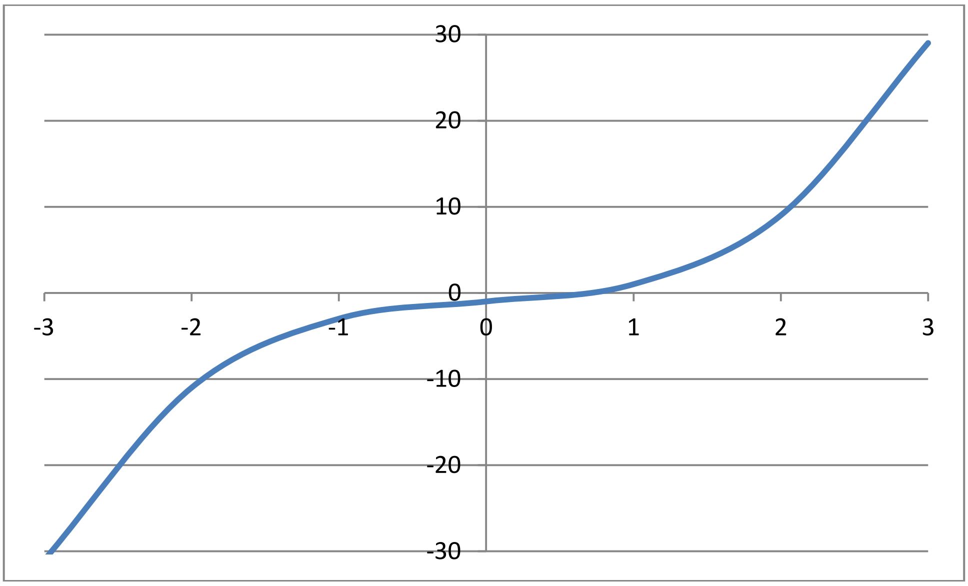
$$x_1 = x_0 - [f(x_0) / f'(x_0)] \rightarrow x_1 = 1 – (-1/5) = 1.20$$

Ομοίως για τις επόμενες 5 επαναλήψεις έχουμε:

i	x_{i-1}	$f(x_{i-1})$	$f'(x_{i-1})$	$f(x_{i-1}/f'x_{i-1})$	x_i
2	1.2	0.48832	10.368	0.04710	1.15290
3	1.15290	0.03686	8.83361	0.00417	1.14873
4	1.14873	0.00027	8.70643	0.00003	1.14870
5	1.14870	0	8.70551	0	1.14870
6	1.14870	0	8.70551	0	1.14870

Άρα μια ρίζα τής εξίσωσής μας είναι η x = **1.14870**

Ερώτημα 1-3



Όπως μπορούμε να δούμε από την γραφική παράσταση, μία τιμή κοντά στη ρίζα της συνάρτησης $f(x) = x^3 + x - 1$ είναι η $x_0 = 1$. Χρησιμοποιώντας την μέθοδο του Newton – Raphson για 4 επαναλήψεις έχουμε:

$$f'(x) = 3x^2 +1$$

$$x_1 = x_0 - [f(x_0) / f'(x_0)] \rightarrow x_1 = 1 - (1/4) = 0.75$$

Ομοίως για τις επόμενες 3 επαναλήψεις έχουμε:

i	x_{i-1}	$f(x_{i-1})$	$f'(x_{i-1})$	$f(x_{i-1})/f'(x_{i-1})$	x_i
2	0.75000	0.17188	2.68750	0.06395	0.68605
3	0.68605	0.00894	2.41198	0.00371	0.68234
4	0.68234	0.00003	2.39676	0.00001	0.68233

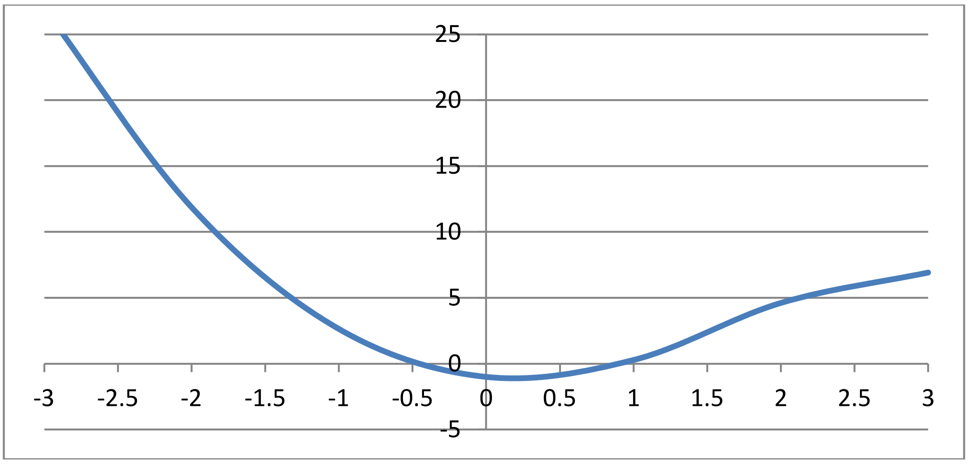
Άρα μια ρίζα τής εξίσωσής μας είναι η x = **0.68233**

Σύγκριση αποτελεσμάτων Newton – Raphson με τις άλλες μεθόδους

Όπως μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε, τα αποτελέσματα που λαμβάνουμε με την μέθοδο Newtown – Raphson είναι παρόμοια με τα αποτελέσματα που έχουμε λάβει με τις μεθόδους του μέσου σημείου και των διαδοχικών προσεγγίσεων. Το μεγάλο πλεονέκτημα της μεθόδου αυτής είναι ότι τα αποτελέσματα έρχονται με μεγαλύτερη προσέγγιση σε λιγότερες επαναλήψεις. Τα αποτελέσματα με στρογγυλοποίηση στο 5^o δεκαδικό φαίνονται παρακάτω:

Newton - Raphson	**Άλλη μέθοδος**
0.27573	0.25781
1.14870	1.15234
0.68233	0.68247

Ερώτημα 2



Όπως μπορούμε να δούμε από την γραφική παράσταση τής συνάρτησης $f(x) = 3x^2 - e^x$, η πρώτη ρίζα βρίσκεται στο [-0.25,-0,75], ενώ η δεύτερη στο [0,5,1].

Χρησιμοποιώντας την μέθοδο των χορδών έχουμε:

$$x_0 = -0.25,\ f(x_0) = -0.59130 \qquad x_1 = -0.75,\ f(x_1) = 1.21513$$

$$x_2 = x_1 - \{[f(x_1) * (x_1 - x_0)] / [f(x_1) - f(x_0)]\} = -0.41367$$

Ομοίως για τις επόμενες επαναλήψεις έχουμε:

i	x_{i-1}	x_i	$f(x_{i-1})$	$f(x_i)$	x_{i+1}
2	-0.75	-0.41367	1.21513	-0.14787	-0.45015
3	-0.41367	-0.45015	-0.14787	-0.02962	-0.45929
4	-0.45015	-0.45929	-0.02962	0.00112	-0.45896
5	-0.45929	-0.45896	0.001117	-7.8E-06	-0.45896

Όπως βλέπουμε στην 5η επανάληψη έχουμε ακρίβεια στο 5ο δεκαδικό, οπότε σταματάμε την διαδικασία.

Άρα η πρώτη ρίζα τής εξίσωσής μας είναι η x = **-0.45896**

Χρησιμοποιώντας την ίδια διαδικασία για το διάστημα [0.5,1] ώστε να βρούμε την δεύτερη ρίζα, λαμβάνουμε τον πίνακα που φαίνεται παρακάτω:

i	xi-1	xi	f(xi-1)	f(xi)	xi+1
1	0.50000	1.00000	-0.89872	0.28172	0.88067
2	1.00000	0.88067	0.28172	-0.08577	0.90852
3	0.88067	0.90852	-0.08577	-0.00441	0.91003
4	0.90852	0.91003	-0.00441	0.00008	0.91001

5	0.91003	0.91001	0.00008	0.00000	0.91001

Όπως βλέπουμε στην $5^{η}$ επανάληψη έχουμε πάλι ακρίβεια στο $5^{ο}$ δεκαδικό, οπότε σταματάμε την διαδικασία.

Άρα η πρώτη ρίζα τής εξίσωσής μας είναι η x = **0.91001**

<u>Χρησιμοποιώντας την μέθοδο Regula Falsi έχουμε:</u>

$$\alpha = -0.25,\ f(\alpha) = -0.59130 \qquad \beta = -0{,}75\ f(\beta) = 1.21513$$

$$x_1 = \beta - \frac{\qquad}{\qquad} f(\beta) = -0.41367$$

$$f(x_1) = -0.14787$$

$$f(\alpha) * f(x_1) = 0.08743$$

Επειδή $f(x_1) <> 0$ και $f(\alpha) * f(x_1) > 0$ το καινούριο διάστημα είναι $[x_1,\beta]$.

Επαναλαμβάνοντας την παραπάνω διαδικασία έχουμε:

i	α	β	f(α)	f(β)	xi	f(xi)	f(α) * f(xi)
2	-0.41367	-0.75000	-0.14787	1.21513	-0.45015	-0.02962	0.00438
3	-0.45015	-0.75000	-0.02962	1.21513	-0.45729	-0.00566	0.00017
4	-0.45729	-0.75000	-0.00566	1.21513	-0.45865	-0.00107	0.00001
5	-0.45865	-0.75000	-0.00107	1.21513	-0.45890	-0.00020	0.00000

Σταματάμε την διαδικασία στην $5^{η}$ επανάληψη επειδή βλέπουμε ότι η $f(x_5) \sim 0$

Άρα η πρώτη ρίζα τής εξίσωσής μας είναι η x = **-0.45890**

Χρησιμοποιώντας την ίδια διαδικασία για το διάστημα [0.5,1] ώστε να βρούμε την δεύτερη ρίζα, λαμβάνουμε τον πίνακα που φαίνεται παρακάτω:

i	α	β	f(α)	f(β)	x_i	$f(x_i)$	$f(\alpha) * f(x_i)$
1	0.50000	1.00000	-0.89872	0.28172	0.88067	-0.08577	0.07708
2	0.88067	1.00000	-0.08577	0.28172	0.90852	-0.00441	0.00038
3	0.90852	1.00000	-0.00441	0.28172	0.90993	-0.00022	0.00000
4	0.90993	1.00000	-0.00022	0.28172	0.91000	-0.00001	0.00000

Σταματάμε την διαδικασία στην $4^{η}$ επανάληψη επειδή βλέπουμε ότι η $f(x_4) \sim 0$

Άρα η δεύτερη ρίζα τής εξίσωσής μας είναι η x = **0.91000**

Τα αποτελέσματα που λάβαμε από τις μεθόδους είναι τα παρακάτω:

Μέθοδος χορδών		**Regula Falsi**	
x_1	x_2	x_1	x_2
-0.45896	0.91001	-0.4589	0.91

Όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε οι διαφορές των αποτελεσμάτων είναι ελάχιστες.

Ερώτημα 3

Ο αριθμός $2^{1/4}$ μπορεί να γραφεί ως $\overline{2}$. Έτσι έχουμε:

$$A = 2 \quad n = 4 \quad x_0 = 1$$

$$x_1 = 1/n * \{[(n-1) * x_0] + (A/x_0^{n-1})\} = 1.25$$

Ομοίως για τις επόμενες 3 επαναλήψεις έχουμε:

i	A	n	x_{i-1}	x_i
2	2	4	1.25	1.19350
3	2	4	1.19350	1.18923
4	2	4	1.18923	1.18921

Άρα η λύση σύμφωνα με την παραπάνω μέθοδο είναι $x_4 = 1.18921$

Επίσης στρογγυλοποιώντας τον αριθμό $2^{1/4}$ στο πέμπτο δεκαδικό έχουμε: $2^{1/4} = 1.18921$, οπότε όπως διαπιστώνουμε τα αποτελέσματα είναι όμοια.

Ερώτημα 4

Χρησιμοποιώντας την μέθοδο του Schroder για την $f(x) = x^2 + 2xe^x + e^{2x}$, με $x_0 = 0$ έχουμε:

$$f(0) = 1,\ p = 2$$

$$f'(x) = 2x + 2e^x + 2e^x x + 2e^{2x},\ f'(0) = 4$$

$$x_1 = x_0 - p[f(x_0)/f'(x_0)] = -0.5$$

Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία έχουμε:

i	x_{i-1}	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	x_i
2	-0.5	0.011349	0.34229	-0.56631
3	-0.56631	1.7E-06	0.00409	-0.56714

Σταματάμε την διαδικασία στην $3^η$ επανάληψη, επειδή έχουμε φτάσει στην ακρίβεια που θέλουμε ($3^ο$ δεκαδικό).

Χρησιμοποιώντας την τροποποιημένη μέθοδο του Newton με $x_0 = 0$ έχουμε:

$$f(0) = 1$$

$$f'(x) = 2x + 2e^x + 2e^x x + 2e^{2x},\ f'(0) = 4$$

$$f''(x) = 2xe^x + 4e^x + 4e^{2x} + 2,\ f''(0) = 10$$

$$x_1 = x_0 - [f(x_0) * f'(x_0)] / \{[f'(x_0)]^2 - f(x_0) * f''(x_0)\} = -0.66667$$

Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία έχουμε:

i	x_{i-1}	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	$f''(x_i)$	x_i
2	-0.66667	0.023485	-0.46386	4.423501	-0.56877
3	-0.56877	6.49E-06	-0.00798	4.903218	-0.56714

Σταματάμε την διαδικασία στην $3^η$ επανάληψη, επειδή έχουμε φτάσει στην ακρίβεια που θέλουμε ($3^ο$ δεκαδικό).

Σημείωση: Σε κάποιες ασκήσεις έχει γίνει στρογγυλοποίηση μετά το $5^ο$ δεκαδικό ψηφίο για να υπάρχει μεγαλύτερη ακρίβεια στην συνέχεια της επανάληψης.