ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΑΘΗΝΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΝΑΥΠΗΓΙΚΗΣ

Μάθημα: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

Διδάσκων: Δρ. Μπράτσος Αθανάσιος

Ακαδημαϊκό έτος: 2013 – 2014

ΤΙΤΛΟΣ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗΣ ΑΣΚΗΣΗΣ: Προσεγγιστική Λύση Γραμμικών Συστημάτων

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ ΣΠΟΥΔΑΣΤΗ: Εμμανουήλ Δ. Μωράκης

ΑΡ. ΜΗΤΡΩΟΥ/ ΕΞΑΜΗΝΟ: 05145 / ΠΤΧ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΠΑΡΑΔΟΣΗΣ: 22/10/2013

Άσκηση 1

Ερώτημα i

Το σύστημά μας είναι το ακόλουθο:

$$3x_1 - x_2 = 2$$
$$x_1 + 4x_2 = 5$$

Το οποίο γράφεται ως:

$$x_1 = x_2/3 + 2/3$$
$$x_2 = -x_1/4 + 5/4$$

Θέτοντας ως $x_1^{(0)} = 0$, $x_2^{(0)} = 0$ και χρησιμοποιώντας την επαναληπτική σχέση τής μεθόδου του Jacobi έχουμε:

$$x_1^{(i+1)} = x_2^{(i)}/3 + 2/3$$
$$x_2^{(i+1)} = -x_1^{(i)}/4 + 5/4$$

Άρα για i = 0 οι παραπάνω σχέσεις γίνονται:

$$x_1^{(1)} = x_2^{(0)}/3 + 2/3 = 2/3$$
$$x_2^{(1)} = -x_1^{(0)}/4 + 5/4 = 5/4$$

$$|x_1^{(1)} - x_1^{(0)}| = |2/3 - 0| = 2/3 > 10^{-3}$$
$$|x_2^{(1)} - x_2^{(0)}| = |5/4 - 0| = 5/4 > 10^{-3}$$

Για i = 1 έχουμε:

$$x_1^{(2)} = x_2^{(1)}/3 + 2/3 = 5/12 + 2/3 = 13/12$$
$$x_2^{(2)} = -x_1^{(1)}/4 + 5/4 = -2/12 + 5/4 = 13/12$$

$$|x_1^{(2)} - x_1^{(1)}| = |13/12 - 2/3| = 5/12 > 10^{-3}$$
$$|x_2^{(2)} - x_2^{(1)}| = |13/12 - 5/4| = 2/12 > 10^{-3}$$

Συνεχίζοντας τις επαναλήψεις έως ότου φθάσουμε στο επιθυμητό σφάλμα, έχουμε:

i	$x_1^{(i+1)}$	$x_2^{(i+1)}$	$\|x_1^{(i+1)} - x_1^{(i)}\|$	$\|x_2^{(i+1)} - x_2^{(i)}\|$	$\|x_1^{(i+1)} - x_1^{(i)}\|$ <? 10^{-3}	$\|x_2^{(i+1)} - x_2^{(i)}\|$ <? 10^{-3}
2	1.02778	0.97917	0.05556	0.10417	No	No
3	0.99306	0.99306	0.03472	0.01389	No	No
4	0.99769	1.00174	0.00463	0.00868	No	No
5	1.00058	1.00058	0.00289	0.00116	No	No

6	1.00019	0.99986	0.00039	0.00072	Yes	Yes

Όπως βλέπουμε το επιθυμητό σφάλμα και για τα δύο x έρχεται στην $6^η$ επανάληψη, οπότε έχουμε: $\mathbf{x_1 = 1.00019}$ και $\mathbf{x_2 = 0.99986}$

Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας την επαναληπτική σχέση τής μεθόδου Gauss – Seidel έχουμε:

$$x_1^{(i+1)} = x_2^{(i)}/3 + 2/3$$
$$x_2^{(i+1)} = -x_1^{(i+1)}/4 + 5/4$$

Άρα για i = 0 και έχοντας θέσει ως $x_1^{(0)} = 0$ και $x_2^{(0)} = 0$ οι παραπάνω σχέσεις γίνονται:

$$x_1^{(1)} = x_2^{(0)}/3 + 2/3 = 2/3$$
$$x_2^{(1)} = -x_1^{(1)}/4 + 5/4 = -2/12 + 5/4 = 13/12$$

$$|x_1^{(1)} – x_1^{(0)}| = |2/3 – 0| = 2/3 > 10^{-3}$$
$$|x_2^{(1)} – x_2^{(0)}| = |13/12 – 0| = 13/12 > 10^{-3}$$

Για i = 1 έχουμε:

$$x_1^{(2)} = x_2^{(1)}/3 + 2/3 = 2/9 + 2/3 = 8/9$$
$$x_2^{(2)} = -x_1^{(2)}/4 + 5/4 = -8/36 + 5/4 = 37/36$$

$$|x_1^{(2)} – x_1^{(1)}| = |8/9 – 2/3| = 2/9 > 10^{-3}$$
$$|x_2^{(2)} – x_2^{(1)}| = |37/36 - 13/12| = 2/36 > 10^{-3}$$

Συνεχίζοντας τις επαναλήψεις έως ότου φθάσουμε στο επιθυμητό σφάλμα, έχουμε:

i	$x_1^{(i+1)}$	$x_2^{(i+1)}$	$\|x_1^{(i+1)} – x_1^{(i)}\|$	$\|x_1^{(i+1)} – x_2^{(i)}\|$	$\|x_1^{(i+1)} – x_1^{(i)}\|$ <? 10^{-3}	$\|x_2^{(i+1)} – x_2^{(i)}\|$ <? 10^{-3}
2	0.96296	1.00926	0.07407	0.01852	No	No
3	0.98765	1.00309	0.02469	0.00617	No	No
4	0.99588	1.00103	0.00823	0.00206	No	No
5	0.99863	1.00034	0.00274	0.00069	No	Yes
6	0.99954	-	0.00091	-	Yes	-

Όπως βλέπουμε το επιθυμητό σφάλμα έρχεται για το x_2 στην $5^η$ επανάληψη ενώ γα το x_1 στην $6^η$. Έτσι έχουμε: $\mathbf{x_1 = 0.99954}$ και $\mathbf{x_2 = 1.00034}$

Ερώτημα ii

Το σύστημά μας είναι το ακόλουθο:

$$-4x_1 + 2x_2 = -6$$
$$3x_1 - 5x_2 = 1$$

Το οποίο γράφεται ως:

$$x_1 = x_2/2 + 3/2$$
$$x_2 = 3x_1/5 – 1/5$$

Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας την επαναληπτική σχέση τής μεθόδου του Jacobi έχουμε:

$$x_1^{(i+1)} = x_2^{(i)}/2 + 3/2$$
$$x_2^{(i+1)} = 3x_1^{(i)}/5 – 1/5$$

Άρα για i = 0 και έχοντας θέσει ως $x_1^{(0)} = 0$ και $x_2^{(0)} = 0$ οι παραπάνω σχέσεις γίνονται:

$$x_1^{(1)} = x_2^{(0)}/2 + 3/2 = 3/2$$
$$x_2^{(1)} = 3x_1^{(0)}/5 – 1/5 = -1/5$$

$$|x_1^{(1)} – x_1^{(0)}| = |3/2 – 0| = 3/2 > 10^{-3}$$
$$|x_2^{(1)} – x_2^{(0)}| = |-1/5 - 0| = -1/5 > 10^{-3}$$

Για i = 1 έχουμε:

$$x_1^{(2)} = x_2^{(1)}/2 + 3/2 = -1/10 + 3/2 = 14/10$$
$$x_2^{(2)} = 3x_1^{(1)}/5 – 1/5 = 9/10 – 1/5 = 7/10$$

$$|x_1^{(2)} – x_1^{(1)}| = |14/10 – 3/2| = 1/10 > 10^{-3}$$
$$|x_2^{(2)} – x_2^{(1)}| = |7/10 + 1/5| = 9/10 > 10^{-3}$$

Συνεχίζοντας τις επαναλήψεις έως ότου φθάσουμε στο επιθυμητό σφάλμα, έχουμε:

i	$x_1^{(i+1)}$	$x_2^{(i+1)}$	$\|x_1^{(i+1)} – x_1^{(i)}\|$	$\|x_2^{(i+1)} – x_2^{(i)}\|$	$\|x_1^{(i+1)} – x_1^{(i)}\|$ <? 10^{-3}	$\|x_2^{(i+1)} – x_2^{(i)}\|$ <? 10^{-3}
2	1.85000	0.64000	0.45000	0.06000	No	No
3	1.82000	0.91000	0.03000	0.27000	No	No
4	1.95500	0.89200	0.13500	0.01800	No	No
5	1.94600	0.97300	0.00900	0.08100	No	No
6	1.98650	0.96760	0.04050	0.00540	No	No
7	1.98380	0.99190	0.00270	0.02430	No	No
8	1.99595	0.99028	0.01215	0.00162	No	No

9	1.99514	0.99757	0.00081	0.00729	Yes	No
10	-	0.99708	-	0.00049	-	Yes

Όπως βλέπουμε το επιθυμητό σφάλμα έρχεται για το x_1 στην $9^η$ επανάληψη ενώ γα το x_2 στην $10^η$. Έτσι έχουμε: **x_1 = 1.99514** και **x_2 = 0.99708**

Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας την επαναληπτική σχέση τής μεθόδου Gauss – Seidel έχουμε:

$$x_1^{(i+1)} = x_2^{(i)}/2 + 3/2$$
$$x_2^{(i+1)} = 3x_1^{(i+1)}/5 – 1/5$$

Άρα για i = 0 και έχοντας θέσει ως $x_1^{(0)} = 0$ και $x_2^{(0)} = 0$ οι παραπάνω σχέσεις γίνονται:

$$x_1^{(1)} = x_2^{(0)}/2 + 3/2 = 3/2$$
$$x_2^{(1)} = 3x_1^{(1)}/5 – 1/5 = 9/10 – 1/5 = 7/10$$

$$|x_1^{(1)} – x_1^{(0)}| = |3/2 – 0| = 3/2 > 10^{-3}$$
$$|x_2^{(1)} – x_2^{(0)}| = |7/10 – 0| = 7/10 > 10^{-3}$$

Για i = 1 έχουμε:

$$x_1^{(2)} = x_2^{(1)}/2 + 3/2 = 7/20 + 3/2 = 37/20$$
$$x_2^{(2)} = 3x_1^{(2)}/5 – 1/5 = 111/100 – 1/5 = 91/100$$

$$|x_1^{(1)} – x_1^{(0)}| = |37/20 – 3/2| = 7/20 > 10^{-3}$$
$$|x_2^{(1)} – x_2^{(0)}| = |91/100 – 7/10| = 21/100 > 10^{-3}$$

Συνεχίζοντας τις επαναλήψεις έως ότου φθάσουμε στο επιθυμητό σφάλμα, έχουμε:

i	$x_1^{(i+1)}$	$x_2^{(i+1)}$	$\|x_1^{(i+1)} – x_1^{(i)}\|$	$\|x_2^{(i+1)} – x_2^{(i)}\|$	$\|x_1^{(i+1)} – x_1^{(i)}\|$ <? 10^{-3}	$\|x_2^{(i+1)} – x_2^{(i)}\|$ <? 10^{-3}
2	1.95500	0.97300	0.10500	0.06300	No	No
3	1.98650	0.99190	0.03150	0.01890	No	No
4	1.99595	0.99757	0.00945	0.00567	No	No
5	1.99879	0.99927	0.00283	0.00170	No	No
6	1.99964	0.99978	0.00085	0.00051	Yes	Yes

Όπως βλέπουμε το επιθυμητό σφάλμα και για τα δύο x έρχεται στην $6^η$ επανάληψη, οπότε έχουμε: **x_1 = 1.99964** και **x_2 = 0.99978**

Ερώτημα iii

Το σύστημά μας είναι το ακόλουθο:

$$2x_1 - x_2 = 2$$
$$x_1 - 3x_2 + x_3 = -2$$
$$-x_1 + x_2 - 3x_3 = -6$$

Το οποίο γράφεται ως:

$$x_1 = x_2/2 + 1$$
$$x_2 = 1/3(x_1 + x_3) + 2/3$$
$$x_3 = 1/3(-x_1 + x_2) + 2$$

Θέτοντας ως $x_1^{(0)} = 0$, $x_2^{(0)} = 0$, $x_3^{(0)} = 0$ και χρησιμοποιώντας την επαναληπτική σχέση τής μεθόδου του Jacobi έχουμε:

$$x_1^{(i+1)} = x_2^{(i)}/2 + 1$$
$$x_2^{(i+1)} = 1/3(x_1^{(i)} + x_3^{(i)}) + 2/3$$
$$x_3^{(i+1)} = 1/3(-x_1^{(i)} + x_2^{(i)}) + 2$$

Άρα για i = 0 οι παραπάνω σχέσεις γίνονται:

$$x_1^{(1)} = x_2^{(0)}/2 + 1 = 1$$
$$x_2^{(1)} = 1/3(x_1^{(0)} + x_3^{(0)}) + 2/3 = 2/3$$
$$x_3^{(1)} = 1/3(-x_1^{(0)} + x_2^{(0)}) + 2 = 2$$

$$|x_1^{(1)} - x_1^{(0)}| = |1 - 0| = 1 > 10^{-3}$$
$$|x_2^{(1)} - x_2^{(0)}| = |2/3 - 0| = 2/3 > 10^{-3}$$
$$|x_3^{(1)} - x_3^{(0)}| = |2 - 0| = 2 > 10^{-3}$$

Συνεχίζοντας τις επαναλήψεις έως ότου φθάσουμε στο επιθυμητό σφάλμα, έχουμε:

i	$x_1^{(i+1)}$	$x_2^{(i+1)}$	$x_3^{(i+1)}$	$\|x_1^{(i+1)} - x_1^{(i)}\|$	$\|x_2^{(i+1)} - x_2^{(i)}\|$	$\|x_3^{(i+1)} - x_3^{(i)}\|$
1	1.33333	1.66667	1.88889	0.33333	1.00000	0.11111
2	1.83333	1.74074	2.11111	0.50000	0.07407	0.22222
3	1.87037	1.98148	1.96914	0.03704	0.24074	0.14198
4	1.99074	1.94650	2.03704	0.12037	0.03498	0.06790
5	1.97325	2.00926	1.98525	0.01749	0.06276	0.05178
6	2.00463	1.98617	2.01200	0.03138	0.02309	0.02675
7	1.99308	2.00554	1.99385	0.01155	0.01938	0.01816
8	2.00277	1.99564	2.00415	0.00969	0.00990	0.01031
9	1.99782	2.00231	1.99762	0.00495	0.00667	0.00653

10	2.00115	1.99848	2.00150	0.00333	0.00383	0.00387
11	1.99924	2.00088	1.99911	0.00191	0.00240	0.00239
12	2.00044	1.99945	2.00055	0.00120	0.00143	0.00144
13	1.99973	2.00033	1.99967	0.00072	0.00088	0.00088

i	$\lvert x_1^{(i+1)} - x_1^{(i)} \rvert$ <? 10^{-3}	$\lvert x_2^{(i+1)} - x_2^{(i)} \rvert$ <? 10^{-3}	$\lvert x_3^{(i+1)} - x_3^{(i)} \rvert$ <? 10^{-3}
1	No	No	No
2	No	No	No
3	No	No	No
4	No	No	No
5	No	No	No
6	No	No	No
7	No	No	No
8	No	No	No
9	No	No	No
10	No	No	No
11	No	No	No
12	No	No	No
13	Yes	Yes	Yes

Όπως βλέπουμε το επιθυμητό σφάλμα για όλα τα x έρχεται στην 13^{η} επανάληψη, οπότε έχουμε: **x_1 = 1.99973**, **x_2 = 2.00033** και **x_3 = 1.99967**

Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας την επαναληπτική σχέση τής μεθόδου Gauss – Seidel έχουμε:

$$x_1^{(i+1)} = x_2^{(i)}/2 + 1$$
$$x_2^{(i+1)} = 1/3(x_1^{(i+1)} + x_3^{(i)}) + 2/3$$
$$x_3^{(i+1)} = 1/3(-x_1^{(i+1)} + x_2^{(i+1)}) + 2$$

Άρα για i = 0 και έχοντας θέσει ως $x_1^{(0)} = 0$, $x_2^{(0)} = 0$ και $x_3^{(0)} = 0$ οι παραπάνω σχέσεις γίνονται:

$$x_1^{(1)} = x_2^{(0)}/2 + 1 = 1$$
$$x_2^{(1)} = 1/3(x_1^{(1)} + x_3^{(0)}) + 2/3 = 1$$
$$x_3^{(1)} = 1/3(-x_1^{(1)} + x_2^{(1)}) + 2 = 2$$

$$|x_1^{(1)} - x_1^{(0)}| = |1 - 0| = 1 > 10^{-3}$$
$$|x_2^{(1)} - x_2^{(0)}| = |1 - 0| = 1 > 10^{-3}$$
$$|x_3^{(1)} - x_3^{(0)}| = |2 - 0| = 2 > 10^{-3}$$

Συνεχίζοντας τις επαναλήψεις έως ότου φθάσουμε στο επιθυμητό σφάλμα, έχουμε:

i	$x_1^{(i+1)}$	$x_2^{(i+1)}$	$x_3^{(i+1)}$	$\lvert x_1^{(i+1)} - x_1^{(i)} \rvert$	$\lvert x_2^{(i+1)} - x_2^{(i)} \rvert$	$\lvert x_3^{(i+1)} - x_3^{(i)} \rvert$
1	1.50000	1.83333	2.11111	0.50000	0.83333	0.11111
2	1.91667	2.00926	2.03086	0.41667	0.17593	0.08025
3	2.00463	2.01183	2.00240	0.08796	0.00257	0.02846
4	2.00592	2.00277	1.99895	0.00129	0.00906	0.00345
5	2.00139	2.00011	1.99958	0.00453	0.00266	0.00062
6	2.00006	1.99988	-	0.00133	0.00024	-
7	1.99994	-	-	0.00012	-	-

i	$\lvert x_1^{(i+1)} - x_1^{(i)} \rvert <? 10^{-3}$	$\lvert x_2^{(i+1)} - x_2^{(i)} \rvert <? 10^{-3}$	$\lvert x_3^{(i+1)} - x_3^{(i)} \rvert <? 10^{-3}$
1	No	No	No
2	No	No	No
3	No	No	No
4	No	No	No
5	No	No	Yes
6	No	Yes	-
7	Yes	-	-

Όπως βλέπουμε το επιθυμητό σφάλμα για το x_3 έρχεται στην $5^η$ επανάληψη, για το x_2 στην $6^η$ επανάληψη, ενώ για το x_1 στην $7^η$. Οπότε έχουμε: **x_1 = 1.99994**, **x_2 = 1.99988** και **x_3 = 1.99958**

Ερώτημα iv

Το σύστημά μας είναι το ακόλουθο:

$$4x_1 + x_2 + x_3 = 5$$
$$x_1 - 7x_2 + 2x_3 = -2$$
$$3x_1 \qquad + 4x_3 = 11$$

Το οποίο γράφεται ως:

$$x_1 = -1/4(x_2 + x_3) + 5/4$$
$$x_2 = 1/7(x_1 + 2x_3) + 2/7$$
$$x_3 = -3/4x_1 + 11/4$$

Θέτοντας ως $x_1^{(0)} = 0$, $x_2^{(0)} = 0$, $x_3^{(0)} = 0$ και χρησιμοποιώντας την επαναληπτική σχέση τής μεθόδου του Jacobi έχουμε:

$$x_1^{(i+1)} = -1/4(x_2^{(i)} + x_3^{(i)}) + 5/4$$
$$x_2^{(i+1)} = 1/7(x_1^{(i)} + 2x_3^{(i)}) + 2/7$$
$$x_3^{(i+1)} = -3/4x_1^{(i)} + 11/4$$

Άρα για i = 0 οι παραπάνω σχέσεις γίνονται:

$$x_1^{(1)} = -1/4(x_2^{(0)} + x_3^{(0)}) + 5/4 = 5/4$$
$$x_2^{(1)} = 1/7(x_1^{(0)} + 2x_3^{(0)}) + 2/7 = 2/7$$
$$x_3^{(1)} = -3/4x_1^{(0)} + 11/4 = 11/4$$

$$|x_1^{(1)} - x_1^{(0)}| = |1 - 0| = 1 > 10^{-3}$$
$$|x_2^{(1)} - x_2^{(0)}| = |2/3 - 0| = 2/3 > 10^{-3}$$
$$|x_3^{(1)} - x_3^{(0)}| = |2 - 0| = 2 > 10^{-3}$$

Συνεχίζοντας τις επαναλήψεις έως ότου φθάσουμε στο επιθυμητό σφάλμα, έχουμε:

i	$x_1^{(i+1)}$	$x_2^{(i+1)}$	$x_3^{(i+1)}$	$\|x_1^{(i+1)} - x_1^{(i)}\|$	$\|x_2^{(i+1)} - x_2^{(i)}\|$	$\|x_3^{(i+1)} - x_3^{(i)}\|$
1	0.49107	1.25000	1.81250	0.75893	0.96429	0.93750
2	0.48438	0.87372	2.38170	0.00670	0.37628	0.56920
3	0.43614	1.03540	2.38672	0.04823	0.16167	0.00502
4	0.39447	1.02994	2.42289	0.04167	0.00546	0.03617
5	0.38679	1.03432	2.45415	0.00768	0.00438	0.03125
6	0.37788	1.04215	2.45991	0.00891	0.00783	0.00576
7	0.37448	1.04253	2.46659	0.00340	0.00037	0.00668
8	0.37272	1.04253	2.46914	0.00176	-	0.00255
9	0.37208	-	2.47046	0.00064	-	0.00132
10	-	-	2.47094	-	-	0.00048

i	$\lvert x_1^{(i+1)} - x_1^{(i)} \rvert <? 10^{-3}$	$\lvert x_2^{(i+1)} - x_2^{(i)} \rvert <? 10^{-3}$	$\lvert x_3^{(i+1)} - x_3^{(i)} \rvert <? 10^{-3}$
1	No	No	No
2	No	No	No
3	No	No	No
4	No	No	No
5	No	No	No
6	No	No	No
7	No	Yes	No
8	No	-	No
9	Yes	-	No
10	-	-	Yes

Όπως βλέπουμε το επιθυμητό σφάλμα για το x_2 έρχεται στην $7^η$ επανάληψη, για το x_1 στην $9^η$ επανάληψη, ενώ για το x_3 στην $10^η$. Οπότε έχουμε: $\mathbf{x_1 = 0.37208}$, $\mathbf{x_2 = 1.04253}$ και $\mathbf{x_3 = 2.46914}$

Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας την επαναληπτική σχέση τής μεθόδου Gauss – Seidel έχουμε:

$$x_1^{(i+1)} = -1/4(x_2^{(i)} + x_3^{(i)}) + 5/4$$
$$x_2^{(i+1)} = 1/7(x_1^{(i+1)} + 2x_3^{(i)}) + 2/7$$
$$x_3^{(i+1)} = -3/4x_1^{(i+1)} + 11/4$$

Άρα για i = 0 και έχοντας θέσει ως $x_1^{(0)} = 0$, $x_2^{(0)} = 0$ και $x_3^{(0)} = 0$ οι παραπάνω σχέσεις γίνονται:

$$x_1^{(1)} = -1/4(x_2^{(0)} + x_3^{(0)}) + 5/4 = 5/4$$
$$x_2^{(1)} = 1/7(x_1^{(1)} + 2x_3^{(0)}) + 2/7 = 13/28$$
$$x_3^{(1)} = -3/4x_1^{(1)} + 11/4 = 29/16$$

Συνεχίζοντας τις επαναλήψεις έως ότου φθάσουμε στο επιθυμητό σφάλμα, έχουμε:

i	$x_1^{(i+1)}$	$x_2^{(i+1)}$	$x_3^{(i+1)}$	$\lvert x_1^{(i+1)} - x_1^{(i)} \rvert$	$\lvert x_2^{(i+1)} - x_2^{(i)} \rvert$	$\lvert x_3^{(i+1)} - x_3^{(i)} \rvert$
1	0.68080	0.90083	2.23940	0.56920	0.43654	0.42690
2	0.46494	0.99196	2.40129	0.21586	0.09113	0.16190
3	0.40169	1.02918	2.44874	0.06326	0.03722	0.04744
4	0.38052	1.03971	2.46461	0.02117	0.01053	0.01587
5	0.37392	1.04331	2.46956	0.00660	0.00359	0.00495
6	0.37178	1.04441	2.47116	0.00214	0.00111	0.00160
7	0.37111	1.04478	2.47167	0.00068	0.00036	0.00051

i	$\|x_1^{(i+1)} – x_1^{(i)}\|$ <? 10^{-3}	$\|x_2^{(i+1)} – x_2^{(i)}\|$ <? 10^{-3}	$\|x_3^{(i+1)} – x_3^{(i)}\|$ <? 10^{-3}
1	No	No	No
2	No	No	No
3	No	No	No
4	No	No	No
5	No	No	No
6	No	No	No
7	Yes	Yes	Yes

Όπως βλέπουμε το επιθυμητό σφάλμα για όλα τα x έρχεται στην $7^η$ επανάληψη, οπότε έχουμε: **x_1 = 0.37111**, **x_2 = 1.04478** και **x_3 = 2.47167**

Άσκηση 2

Ερώτημα i

Για να είναι ο πίνακας ενός συστήματος αυστηρά διαγώνια ορισμένος θα πρέπει $|\alpha_{ii}| > \sum_{j\neq i}|a_{ij}|$ για κάθε i,j = 1, 2, …, n.

Το σύστημά μας είναι το ακόλουθο:

$$x_1 - 2x_2 = -1$$
$$2x_1 + x_2 = 3$$

Και ο πίνακας:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας τού συστήματος δεν είναι αυστηρά διαγώνια ορισμένος επειδή: 1 < |-2| και 1 < 2

Εάν το σύστημα γραφεί ως:

$$2x_1 + x_2 = 3$$
$$x_1 - 2x_2 = -1$$

Και ο πίνακας ως:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Τότε ο πίνακας τού συστήματος είναι αυστηρά διαγώνια ορισμένος επειδή: 2 > 1 και |-2| > 1

Έτσι οι προκύπτουσες μέθοδοι των Jacobi και Gauss – Seidel είναι:

$$x_1^{(i+1)} = -x_2^{(i)}/2 + 3/2$$
$$x_2^{(i+1)} = x_1^{(i)}/2 + 1/2$$

και

$$x_1^{(i+1)} = -x_2^{(i)}/2 + 3/2$$
$$x_2^{(i+1)} = x_1^{(i+1)}/2 + 1/2$$

Χρησιμοποιώντας τις επαναληπτικές μεθόδους έχουμε:

Jacobi						
i	$x_1^{(i+1)}$	$x_2^{(i+1)}$	$\lvert x_1^{(i+1)} - x_1^{(i)}\rvert$	$\lvert x_2^{(i+1)} - x_2^{(i)}\rvert$	$\lvert x_1^{(i+1)} - x_1^{(i)}\rvert$ <? 10^{-3}	$\lvert x_2^{(i+1)} - x_2^{(i)}\rvert$ <? 10^{-3}
-1	0	0	-	-	-	-
0	1.50000	0.50000	1.50000	0.50000	No	No
1	1.25000	1.25000	0.25000	0.75000	No	No
2	0.87500	1.12500	0.37500	0.12500	No	No
3	0.93750	0.93750	0.06250	0.18750	No	No
4	1.03125	0.96875	0.09375	0.03125	No	No
5	1.01563	1.01563	0.01563	0.04688	No	No
6	0.99219	1.00781	0.02344	0.00781	No	No
7	0.99609	0.99609	0.00391	0.01172	No	No
8	1.00195	0.99805	0.00586	0.00195	No	No
9	1.00098	1.00098	0.00098	0.00293	Yes	No
10	-	1.00049	-	0.00049	-	Yes

Gauss – Seidel						
i	$x_1^{(i+1)}$	$x_2^{(i+1)}$	$\lvert x_1^{(i+1)} - x_1^{(i)}\rvert$	$\lvert x_2^{(i+1)} - x_2^{(i)}\rvert$	$\lvert x_1^{(i+1)} - x_1^{(i)}\rvert$ <? 10^{-3}	$\lvert x_2^{(i+1)} - x_2^{(i)}\rvert$ <? 10^{-3}
-1	0	0	-	-	-	-
0	1.50000	1.25000	1.50000	1.25000	No	No
1	0.87500	0.93750	0.62500	0.31250	No	No
2	1.03125	1.01563	0.15625	0.07813	No	No
3	0.99219	0.99609	0.03906	0.01953	No	No
4	1.00195	1.00098	0.00977	0.00488	No	No
5	0.99951	0.99976	0.00244	0.00122	No	No
6	1.00012	1.00006	0.00061	0.00031	Yes	Yes

Πληρώντας την προϋπόθεση τού σφάλματος που μας δίνεται έχουμε:

Κατά Jacobi: $\mathbf{x_1 = 1.00098}$ και $\mathbf{x_2 = 1.00049}$

και

Κατά Gauss – Seidel: $\mathbf{x_1 = 1.00012}$ και $\mathbf{x_2 = 1.00006}$

Ερώτημα ii

Το σύστημά μας είναι το ακόλουθο:

$$-x_1 + 4x_2 = 1$$
$$3x_1 - 2x_2 = 2$$

Και ο πίνακας:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας τού συστήματος δεν είναι αυστηρά διαγώνια ορισμένος επειδή: $|-1| < 4$ και $|-2| < 3$

Εάν το σύστημα γραφεί ως:

$$3x_1 - 2x_2 = 2$$
$$-x_1 + 4x_2 = 1$$

Και ο πίνακας ως:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Τότε ο πίνακας τού συστήματος είναι αυστηρά διαγώνια ορισμένος επειδή: $3 > |-2|$ και $4 > |-1|$

Έτσι οι προκύπτουσες μέθοδοι των Jacobi και Gauss – Seidel είναι:

$$x_1^{(i+1)} = 2x_2^{(i)}/3 + 2/3$$
$$x_2^{(i+1)} = x_1^{(i)}/4 + 1/4$$

και

$$x_1^{(i+1)} = 2x_2^{(i)}/3 + 2/3$$
$$x_2^{(i+1)} = x_1^{(i+1)}/4 + 1/4$$

Χρησιμοποιώντας τις επαναληπτικές μεθόδους έχουμε:

Jacobi						
i	$x_1^{(i+1)}$	$x_2^{(i+1)}$	$\|x_1^{(i+1)} - x_1^{(i)}\|$	$\|x_2^{(i+1)} - x_2^{(i)}\|$	$\|x_1^{(i+1)} - x_1^{(i)}\|$ <? 10^{-3}	$\|x_2^{(i+1)} - x_2^{(i)}\|$ <? 10^{-3}
-1	0	0	-	-	-	-
0	0.66667	0.25000	0.66667	0.25000	No	No
1	0.83333	0.41667	0.16667	0.16667	No	No
2	0.94444	0.45833	0.11111	0.04167	No	No

3	0.97222	0.48611	0.02778	0.02778	No	No
4	0.99074	0.49306	0.01852	0.00694	No	No
5	0.99537	0.49769	0.00463	0.00463	No	No
6	0.99846	0.49884	0.00309	0.00116	No	No
7	0.99923	0.49961	0.00077	0.00077	Yes	Yes

Gauss – Seidel						
i	$x_1^{(i+1)}$	$x_2^{(i+1)}$	$\lvert x_1^{(i+1)} - x_1^{(i)} \rvert$	$\lvert x_2^{(i+1)} - x_2^{(i)} \rvert$	$\lvert x_1^{(i+1)} - x_1^{(i)} \rvert$ <? 10^{-3}	$\lvert x_2^{(i+1)} - x_2^{(i)} \rvert$ <? 10^{-3}
-1	0	0	-	-	-	-
0	0.66667	0.41667	0.66667	0.41667	No	No
1	0.94444	0.48611	0.27778	0.06944	No	No
2	0.99074	0.49769	0.04630	0.01157	No	No
3	0.99846	0.49961	0.00772	0.00193	No	No
4	0.99974	0.49994	0.00129	0.00032	No	Yes
5	0.99996	-	0.00021	-	Yes	-

Πληρώντας την προϋπόθεση τού σφάλματος που μας δίνεται έχουμε:

Κατά Jacobi: $\mathbf{x_1 = 0.99923}$ και $\mathbf{x_2 = 0.49961}$

και

Κατά Gauss – Seidel: $\mathbf{x_1 = 0.99996}$ και $\mathbf{x_2 = 0.49994}$

Ερώτημα iii

Το σύστημά μας είναι το ακόλουθο:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 \quad &= -7 \\ x_1 + 3x_2 - 10x_3 &= 9 \\ 3x_1 \quad + x_3 &= 13 \end{aligned}$$

Και ο πίνακας:

$$A = \begin{matrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & -10 \\ 3 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Ο πίνακας τού συστήματος δεν είναι αυστηρά διαγώνια ορισμένος επειδή: $2 < |-3|$, $3 < 1 + |-10|$ και $0 < 3$

Εάν το σύστημα γραφεί ως:

$$\begin{aligned} 3x_1 \quad + x_3 &= 13 \\ 2x_1 - 3x_2 \quad &= -7 \\ x_1 + 3x_2 - 10x_3 &= 9 \end{aligned}$$

Και ο πίνακας ως:

$$A = \begin{matrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & -10 \end{matrix}$$

Τότε ο πίνακας τού συστήματος είναι αυστηρά διαγώνια ορισμένος επειδή: $3 > 1$, $|-3| > 2$ και $|-10| > 3 + 1$

Έτσι οι προκύπτουσες μέθοδοι των Jacobi και Gauss – Seidel είναι:

$$\begin{aligned} x_1^{(i+1)} &= - x_3^{(i)}/3 + 13/3 \\ 3x_2^{(i+1)} &= 2x_1^{(i)}/3 + 7/3 \\ 10x_3^{(i+1)} &= (x_1^{(i)} + 3x_2^{(i)})/10 - 9/10 \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} x_1^{(i+1)} &= - x_3^{(i)}/3 + 13/3 \\ 3x_2^{(i+1)} &= 2x_1^{(i+1)}/3 + 7/3 \\ 10x_3^{(i+1)} &= (x_1^{(i+1)} + 3x_2^{(i+1)})/10 - 9/10 \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τις επαναληπτικές μεθόδους έχουμε:

Jacobi						
i	$x_1^{(i+1)}$	$x_2^{(i+1)}$	$x_3^{(i+1)}$	$\lvert x_1^{(i+1)} - x_1^{(i)} \rvert$	$\lvert x_2^{(i+1)} - x_2^{(i)} \rvert$	$\lvert x_3^{(i+1)} - x_3^{(i)} \rvert$
-1	0	0	0	-	-	-
0	4.33333	2.33333	-0.90000	4.33333	2.33333	0.90000
1	4.63333	5.22222	0.23333	0.30000	2.88889	1.13333
2	4.25556	5.42222	1.13000	0.37778	0.20000	0.89667
3	3.95667	5.17037	1.15222	0.29889	0.25185	0.02222
4	3.94926	4.97111	1.04678	0.00741	0.19926	0.10544
5	3.98441	4.96617	0.98626	0.03515	0.00494	0.06052
6	4.00458	4.98960	0.98829	0.02017	0.02343	0.00203
7	4.00390	5.00305	0.99734	0.00068	0.01345	0.00905
8	4.00390	5.00260	1.00131	-	0.00045	0.00397
9	-	-	1.00117	-	-	0.00014

Jacobi			
i	$\lvert x_1^{(i+1)} - x_1^{(i)} \rvert <? 10^{-3}$	$\lvert x_2^{(i+1)} - x_2^{(i)} \rvert <? 10^{-3}$	$\lvert x_3^{(i+1)} - x_3^{(i)} \rvert <? 10^{-3}$
-1	-	-	-
0	No	No	No
1	No	No	No
2	No	No	No
3	No	No	No
4	No	No	No
5	No	No	No
6	No	No	No
7	Yes	No	No
8	-	Yes	No
9	-	-	Yes

Gauss – Seidel						
i	$x_1^{(i+1)}$	$x_2^{(i+1)}$	$x_3^{(i+1)}$	$\lvert x_1^{(i+1)} - x_1^{(i)} \rvert$	$\lvert x_2^{(i+1)} - x_2^{(i)} \rvert$	$\lvert x_3^{(i+1)} - x_3^{(i)} \rvert$
-1	0	0	0	-	-	-
0	4.33333	5.22222	1.10000	4.33333	5.22222	1.10000
1	3.96667	4.97778	0.99000	0.36667	0.24444	0.11000
2	4.00333	5.00222	1.00100	0.03667	0.02444	0.01100
3	3.99967	4.99978	0.99990	0.00367	0.00244	0.00110
4	4.00003	5.00002	1.00001	0.00037	0.00024	0.00011

Gauss – Seidel			
i	$\lvert x_1^{(i+1)} – x_1^{(i)} \rvert <? 10^{-3}$	$\lvert x_2^{(i+1)} – x_2^{(i)} \rvert <? 10^{-3}$	$\lvert x_3^{(i+1)} – x_3^{(i)} \rvert <? 10^{-3}$
-1	-	-	-
0	No	No	No
1	No	No	No
2	No	No	No
3	No	No	No
4	Yes	Yes	Yes

Πληρώντας την προϋπόθεση τού σφάλματος που μας δίνεται έχουμε:

Κατά Jacobi: $\mathbf{x_1 = 4.00390}$, $\mathbf{x_2 = 5.00260}$ και $\mathbf{x_3 = 1.00117}$

και

Κατά Gauss – Seidel: $\mathbf{x_1 = 4.00003}$, $\mathbf{x_2 = 5.00002}$ και $\mathbf{x_3 = 1.00001}$

Ερώτημα iv

Το σύστημά μας είναι το ακόλουθο:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 &= 5 \\ 3x_1 - x_2 \qquad &= 9 \\ x_2 + 2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Και ο πίνακας:

$$A = \begin{matrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{matrix}$$

Ο πίνακας τού συστήματος δεν είναι αυστηρά διαγώνια ορισμένος επειδή: 1 < 3 + |-1| και |-1| < 3

Εάν το σύστημα γραφεί ως:

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 \qquad &= 9 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 &= 5 \\ x_2 + 2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Και ο πίνακας ως:

$$A = \begin{matrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{matrix}$$

Τότε ο πίνακας τού συστήματος είναι αυστηρά διαγώνια ορισμένος επειδή: 3 > |-1|, 3 > 1 + |-1| και 2 > 1

Έτσι οι προκύπτουσες μέθοδοι των Jacobi και Gauss – Seidel είναι:

$$\begin{aligned} x_1^{(i+1)} &= x_2^{(i)}/3 + 3 \\ x_2^{(i+1)} &= (x_3^{(i)} + x_1^{(i)})/3 + 5/3 \\ x_3^{(i+1)} &= -x_2^{(i)}/2 + 1/2 \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} x_1^{(i+1)} &= x_2^{(i)}/3 + 3 \\ x_2^{(i+1)} &= (x_3^{(i)} + x_1^{(i+1)})/3 + 5/3 \\ x_3^{(i+1)} &= -x_2^{(i+1)}/2 + 1/2 \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τις επαναληπτικές μεθόδους έχουμε:

Jacobi						
i	$x_1^{(i+1)}$	$x_2^{(i+1)}$	$x_3^{(i+1)}$	$\lvert x_1^{(i+1)} - x_1^{(i)} \rvert$	$\lvert x_2^{(i+1)} - x_2^{(i)} \rvert$	$\lvert x_3^{(i+1)} - x_3^{(i)} \rvert$
-1	0	0	0	-	-	-
0	3.00000	1.66667	0.50000	3.00000	1.66667	0.50000
1	3.55556	0.83333	-0.33333	0.55556	0.83333	0.83333
2	3.27778	0.37037	0.08333	0.27778	0.46296	0.41667
3	3.12346	0.60185	0.31481	0.15432	0.23148	0.23148
4	3.20062	0.73045	0.19907	0.07716	0.12860	0.11574
5	3.24348	0.66615	0.13477	0.04287	0.06430	0.06430
6	3.22205	0.63043	0.16692	0.02143	0.03572	0.03215
7	3.21014	0.64829	0.18479	0.01191	0.01786	0.01786
8	3.21610	0.65821	0.17585	0.00595	0.00992	0.00893
9	3.21940	0.65325	0.17089	0.00331	0.00496	0.00496
10	3.21775	0.65050	0.17337	0.00165	0.00276	0.00248
11	3.21683	0.65187	0.17475	0.00092	0.00138	0.00138
12	-	0.65264	0.17406	-	0.00077	0.00069

Jacobi			
i	$\lvert x_1^{(i+1)} - x_1^{(i)} \rvert$ <? 10^{-3}	$\lvert x_2^{(i+1)} - x_2^{(i)} \rvert$ <? 10^{-3}	$\lvert x_3^{(i+1)} - x_3^{(i)} \rvert$ <? 10^{-3}
-1	-	-	-
0	No	No	No
1	No	No	No
2	No	No	No
3	No	No	No
4	No	No	No
5	No	No	No
6	No	No	No
7	No	No	No
8	No	No	No
9	No	No	No
10	No	No	No
11	Yes	No	No
12	-	Yes	Yes

Gauss – Seidel						
i	$x_1^{(i+1)}$	$x_2^{(i+1)}$	$x_3^{(i+1)}$	$\|x_1^{(i+1)} – x_1^{(i)}\|$	$\|x_2^{(i+1)} – x_2^{(i)}\|$	$\|x_3^{(i+1)} – x_3^{(i)}\|$
-1	0	0	0	-	-	-
0	3.00000	0.66667	0.16667	3.00000	0.66667	0.16667
1	3.22222	0.64815	0.17593	0.22222	0.01852	0.00926
2	3.21605	0.65329	0.17335	0.00617	0.00514	0.00257
3	3.21776	0.65186	0.17407	0.00171	0.00143	0.00071
4	3.21729	0.65226	-	0.00048	0.00040	-

Gauss – Seidel			
i	$\|x_1^{(i+1)} – x_1^{(i)}\|$ <? 10^{-3}	$\|x_2^{(i+1)} – x_2^{(i)}\|$ <? 10^{-3}	$\|x_3^{(i+1)} – x_3^{(i)}\|$ <? 10^{-3}
-1	-	-	-
0	No	No	No
1	No	No	No
2	No	No	No
3	No	No	Yes
4	Yes	Yes	-

Πληρώντας την προϋπόθεση τού σφάλματος που μας δίνεται έχουμε:

Κατά Jacobi: $\mathbf{x_1 = 3.21683}$, $\mathbf{x_2 = 0.65264}$ και $\mathbf{x_3 = 0.17406}$

και

Κατά Gauss – Seidel: $\mathbf{x_1 = 3.21729}$, $\mathbf{x_2 = 0.65226}$ και $\mathbf{x_3 = 0.17407}$

Άσκηση 3

Ερώτημα i

Το σύστημά μας είναι το ακόλουθο:

$$-4x_1 + 5x_2 = 1$$
$$x_1 + 2x_2 = 3$$

Και ο πίνακας:

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας τού συστήματος δεν είναι αυστηρά διαγώνια ορισμένος επειδή: $|-4| < 5$

Εάν το σύστημα γραφεί ως:

$$x_1 + 2x_2 = 3$$
$$-4x_1 + 5x_2 = 1$$

Και ο πίνακας ως:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$$

Τότε διαπιστώνουμε ότι ο πίνακας τού συστήματος πάλι δεν είναι αυστηρά διαγώνια ορισμένος επειδή: $1 > 2$

Παρόλα αυτά θα δοκιμάσουμε να λύσουμε το σύστημα με τις μεθόδους Jacobi και Gauss – Seidel. Έτσι έχουμε:

Jacobi

$$x_1^{(i+1)} = 5x_2^{(i)}/4 - 1/4$$
$$x_2^{(i+1)} = x_1^{(i)}/2 + 3/2$$

και

Gauss - Seidel

$$x_1^{(i+1)} = 5x_2^{(i)}/4 - 1/4$$
$$x_2^{(i+1)} = x_1^{(i+1)}/2 + 3/2$$

Χρησιμοποιώντας τις επαναληπτικές μεθόδους έχουμε:

Jacobi						
i	$x_1^{(i+1)}$	$x_2^{(i+1)}$	$\lvert x_1^{(i+1)} - x_1^{(i)} \rvert$	$\lvert x_2^{(i+1)} - x_2^{(i)} \rvert$	$\lvert x_1^{(i+1)} - x_1^{(i)} \rvert <? 10^{-3}$	$\lvert x_2^{(i+1)} - x_2^{(i)} \rvert <? 10^{-3}$
-1	0	0	-	-	-	-
0	-0.25000	1.50000	0.25000	1.50000	No	No
1	1.62500	1.62500	1.87500	0.12500	No	No
2	1.78125	0.68750	0.15625	0.93750	No	No
3	0.60938	0.60938	1.17188	0.07813	No	No
4	0.51172	1.19531	0.09766	0.58594	No	No
5	1.24414	1.24414	0.73242	0.04883	No	No
6	1.30518	0.87793	0.06104	0.36621	No	No
7	0.84741	0.84741	0.45776	0.03052	No	No
8	0.80927	1.07629	0.03815	0.22888	No	No
9	1.09537	1.09537	0.28610	0.01907	No	No
10	1.11921	0.95232	0.02384	0.14305	No	No
11	0.94040	0.94040	0.17881	0.01192	No	No
12	0.92549	1.02980	0.01490	0.08941	No	No
13	1.03725	1.03725	0.11176	0.00745	No	No
14	1.04657	0.98137	0.00931	0.05588	No	No
15	0.97672	0.97672	0.06985	0.00466	No	No
16	0.97090	1.01164	0.00582	0.03492	No	No
17	1.01455	1.01455	0.04366	0.00291	No	No
18	1.01819	0.99272	0.00364	0.02183	No	No
19	0.99091	0.99091	0.02728	0.00182	No	No
20	0.98863	1.00455	0.00227	0.01364	No	No
21	1.00568	1.00568	0.01705	0.00114	No	No
22	1.00711	0.99716	0.00142	0.00853	No	No
23	0.99645	0.99645	0.01066	0.00071	No	Yes
24	0.99556	-	0.00089	-	Yes	-

Gauss – Seidel						
i	$x_1^{(i+1)}$	$x_2^{(i+1)}$	$\|x_1^{(i+1)} – x_1^{(i)}\|$	$\|x_2^{(i+1)} – x_2^{(i)}\|$	$\|x_1^{(i+1)} – x_1^{(i)}\| <? 10^{-3}$	$\|x_2^{(i+1)} – x_2^{(i)}\| <? 10^{-3}$
-1	0	0	-	-	-	-
0	-0.25000	1.62500	0.25000	1.62500	No	No
1	1.78125	0.60938	2.03125	1.01563	No	No
2	0.51172	1.24414	1.26953	0.63477	No	No
3	1.30518	0.84741	0.79346	0.39673	No	No
4	0.80927	1.09537	0.49591	0.24796	No	No
5	1.11921	0.94040	0.30994	0.15497	No	No
6	0.92549	1.03725	0.19372	0.09686	No	No
7	1.04657	0.97672	0.12107	0.06054	No	No
8	0.97090	1.01455	0.07567	0.03783	No	No
9	1.01819	0.99091	0.04729	0.02365	No	No
10	0.98863	1.00568	0.02956	0.01478	No	No
11	1.00711	0.99645	0.01847	0.00924	No	No
12	0.99556	1.00222	0.01155	0.00577	No	No
13	1.00278	0.99861	0.00722	0.00361	No	No
14	0.99827	1.00087	0.00451	0.00226	No	No
15	1.00108	0.99946	0.00282	0.00141	No	No
16	0.99932	1.00034	0.00176	0.00088	No	Yes
17	1.00042	0.99979	0.00110	0.00055	No	Yes
18	0.99974	1.00013	0.00069	0.00034	Yes	Yes

Πληρώντας την προϋπόθεση τού σφάλματος που μας δίνεται έχουμε:

Κατά Jacobi: $\mathbf{x_1 = 0.99556}$ και $\mathbf{x_2 = 0.99645}$

και

Κατά Gauss – Seidel: $\mathbf{x_1 = 0.99974}$ και $\mathbf{x_2 = 1.00013}$

Σημείωση: *Στην μέθοδο Gauss – Seidel βλέπουμε ότι η προϋπόθεση του σφάλματος για το x_2 πληρείται στην 16η επανάληψη με $x_2 = 1.00034$. Παρόλα αυτά δεν κρατάμε σταθερή την τιμή του x_2 στην 17η επανάληψη επειδή το x_1 παραμένει εκτός της προϋπόθεσης του σφάλματος με αποτέλεσμα να χρειαστούμε ακόμη μια επανάληψη. Έτσι, αν το x_2 παρέμενε σταθερό στην 17η επανάληψη, το x_1 θα παρέμενε σταθερό στην 18η επανάληψη επειδή εξαρτάται από το $x_2^{(i)}$.*

Ερώτημα ii

Το σύστημά μας είναι το ακόλουθο:

$$4x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0$$
$$x_1 - 3x_2 - x_3 = 7$$
$$3x_1 - x_2 + 4x_3 = 5$$

Και ο πίνακας:

$$A = \begin{matrix} 4 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{matrix}$$

Ο πίνακας τού συστήματος δεν είναι αυστηρά διαγώνια ορισμένος επειδή: 4 = 2 + |-2| και 4 = 3 + |-1|

Παρατηρούμε ότι όπως και αν μετατρέψουμε το σύστημά μας, άρα συνεπώς και τους πίνακες, κανένας πίνακας τού συστήματος δεν είναι αυστηρά διαγώνια ορισμένος.

Παρόλα αυτά θα δοκιμάσουμε να λύσουμε το σύστημα με τις μεθόδους Jacobi και Gauss – Seidel. Έτσι έχουμε:

Jacobi

$$4x_1^{(i+1)} = (-x_2^{(i)} + x_3^{(i)})/2$$
$$x_2^{(i+1)} = (x_1^{(i)} - x_3^{(i)})/3 - 7/3$$
$$x_3^{(i+1)} = (-3x_1^{(i)} + x_2^{(i)})/4 + 5/4$$

και

Gauss – Seidel

$$4x_1^{(i+1)} = (-x_2^{(i)} + x_3^{(i)})/2$$
$$x_2^{(i+1)} = (x_1^{(i+1)} - x_3^{(i)})/3 - 7/3$$
$$x_3^{(i+1)} = (-3x_1^{(i+1)} + x_2^{(i+1)})/4 + 5/4$$

Χρησιμοποιώντας τις επαναληπτικές μεθόδους έχουμε:

Jacobi						
i	$x_1^{(i+1)}$	$x_2^{(i+1)}$	$x_3^{(i+1)}$	$\lvert x_1^{(i+1)} - x_1^{(i)} \rvert$	$\lvert x_2^{(i+1)} - x_2^{(i)} \rvert$	$\lvert x_3^{(i+1)} - x_3^{(i)} \rvert$
-1	0	0	0	-	-	-
0	0.00000	-2.33333	1.25000	0.00000	2.33333	1.25000
1	1.79167	-2.75000	0.66667	1.79167	0.41667	0.58333
2	1.70833	-1.95833	-0.78125	0.08333	0.79167	1.44792
3	0.58854	-1.50347	-0.52083	1.11979	0.45486	0.26042
4	0.49132	-1.96354	0.43273	0.09722	0.46007	0.95356
5	1.19813	-2.31380	0.39063	0.70681	0.35026	0.04210
6	1.35221	-2.06416	-0.22705	0.15408	0.24964	0.61768
7	0.91856	-1.80691	-0.28020	0.43366	0.25725	0.05315
8	0.76336	-1.93375	0.10935	0.15520	0.12684	0.38956
9	1.02155	-2.11533	0.19405	0.25820	0.18159	0.08469
10	1.15469	-2.05750	-0.04500	0.13314	0.05783	0.23904
11	1.00625	-1.93344	-0.13039	0.14844	0.12406	0.08540
12	0.90152	-1.95445	0.01195	0.10473	0.02101	0.14234
13	0.98320	-2.03681	0.08524	0.08168	0.08236	0.07329
14	1.06103	-2.03401	0.00340	0.07782	0.00280	0.08185
15	1.01870	-1.98079	-0.05427	0.04232	0.05322	0.05767
16	0.96326	-1.97567	-0.00923	0.05545	0.00512	0.04505
17	0.98322	-2.00917	0.03364	0.01997	0.03350	0.04286
18	1.02141	-2.01680	0.01029	0.03818	0.00763	0.02335
19	1.01355	-1.99629	-0.02026	0.00786	0.02051	0.03054
20	0.98802	-1.98873	-0.00923	0.02553	0.00756	0.01102
21	0.98975	-2.00092	0.01180	0.00173	0.01218	0.02104
22	1.00636	-2.00735	0.00746	0.01661	0.00644	0.00434
23	1.00740	-2.00037	-0.00661	0.00105	0.00698	0.01407
24	0.99688	-1.99533	-0.00565	0.01052	0.00504	0.00096
25	0.99484	-1.99916	0.00351	0.00204	0.00383	0.00915
26	1.00133	-2.00289	0.00408	0.00649	0.00373	0.00057
27	1.00348	-2.00092	-0.00172	0.00215	0.00197	0.00580
28	0.99960	-1.99826	-0.00284	0.00389	0.00265	0.00112
29	0.99771	-1.99919	0.00074	0.00189	0.00092	0.00358
30	0.99996	-2.00101	0.00192	0.00225	0.00182	0.00118
31	1.00146	-2.00065	-0.00022	0.00150	0.00036	0.00214
32	1.00021	-1.99944	-0.00126	0.00125	0.00122	0.00104
33	0.99909	-1.99951	-0.00002	0.00113	0.00007	0.00124
34	0.99974	-2.00030	0.00081	0.00066	0.00079	0.00083

Jacobi			
i	$\lvert x_1^{(i+1)} - x_1^{(i)} \rvert$ <? 10^{-3}	$\lvert x_2^{(i+1)} - x_2^{(i)} \rvert$ <? 10^{-3}	$\lvert x_3^{(i+1)} - x_3^{(i)} \rvert$ <? 10^{-3}
-1	-	-	-
0	-	No	No
1	No	No	No
2	No	No	No
3	No	No	No
4	No	No	No
5	No	No	No
6	No	No	No
7	No	No	No
8	No	No	No
9	No	No	No
10	No	No	No
11	No	No	No
12	No	No	No
13	No	No	No
14	No	No	No
15	No	No	No
16	No	No	No
17	No	No	No
18	No	No	No
19	No	No	No
20	No	No	No
21	No	No	No
22	No	No	No
23	No	No	No
24	No	No	Yes
25	No	No	No
26	No	No	Yes
27	No	No	No
28	No	No	No
29	No	Yes	No
30	No	No	No
31	No	Yes	No
32	No	No	No
33	No	Yes	No
34	Yes	Yes	Yes

Gauss – Seidel						
i	$x_1^{(i+1)}$	$x_2^{(i+1)}$	$x_3^{(i+1)}$	$\lvert x_1^{(i+1)} - x_1^{(i)} \rvert$	$\lvert x_2^{(i+1)} - x_2^{(i)} \rvert$	$\lvert x_3^{(i+1)} - x_3^{(i)} \rvert$
-1	0	0	0	-	-	-
0	0.00000	-2.33333	0.66667	0.00000	2.33333	0.66667
1	1.50000	-2.05556	-0.38889	1.50000	0.27778	1.05556
2	0.83333	-1.92593	0.14352	0.66667	0.12963	0.53241
3	1.03472	-2.03627	-0.03511	0.20139	0.11034	0.17863
4	1.00058	-1.98810	0.00254	0.03414	0.04816	0.03765
5	0.99532	-2.00241	0.00291	0.00526	0.01430	0.00037
6	1.00266	-2.00008	-0.00201	0.00733	0.00232	0.00492
7	0.99904	-1.99965	0.00081	0.00362	0.00043	0.00282
8	1.00023	-2.00019	-0.00022	0.00120	0.00054	0.00103
9	0.99999	-1.99993	0.00003	0.00024	0.00026	0.00025

Gauss – Seidel			
i	$\lvert x_1^{(i+1)} - x_1^{(i)} \rvert$ <? 10^{-3}	$\lvert x_2^{(i+1)} - x_2^{(i)} \rvert$ <? 10^{-3}	$\lvert x_3^{(i+1)} - x_3^{(i)} \rvert$ <? 10^{-3}
-1	-	-	-
0	-	No	No
1	No	No	No
2	No	No	No
3	No	No	No
4	No	No	No
5	No	No	Yes
6	No	No	No
7	No	Yes	No
8	No	Yes	No
9	Yes	Yes	Yes

Πληρώντας την προϋπόθεση τού σφάλματος που μας δίνεται έχουμε:

Κατά Jacobi: $\mathbf{x_1 = 0.99974}$, $\mathbf{x_2 = -2.00030}$ και $\mathbf{x_3 = 0.00081}$
και

Κατά Gauss – Seidel: $\mathbf{x_1 = 0.99999}$, $\mathbf{x_2 = -1.99993}$ και $\mathbf{x_3 = 0.00003}$

Σημείωση: *Για την διακοπή των επαναλήψεων ισχύει ό,τι ίσχυε και στο ερώτημα i).*

Άσκηση 4

Ερώτημα i

Το πρόγραμμα σε Matlab φαίνεται παρακάτω:

```
format long
x1(1)=0; x2(1)=0; x3(1)=0;
data=[];
for i=1:1:12
x1(i+1)=((2*x2(i) - 3*x3(i))/5) - 1/5;
x2(i+1)=((3*x1(i) - x3(i))/9) - 5/9;
x3(i+1) = -((-x1(i) + x2(i))/7) - 15/7;
data=[data;i x1(i+1) x2(i+1) x3(i+1) ];
end
fprintf('        i             x1(i)           x2(i)            x3(i)\n')
disp(data)
```

Τα αποτελέσματα που λαμβάνουμε είναι:

i	x1(i)	x2(i)	x3(i)
1.000000000000000	-0.200000000000000	-0.555555555555556	-2.142857142857143
2.000000000000000	0.863492063492064	-0.384126984126984	-2.092063492063492
3.000000000000000	0.901587301587302	-0.035273368606702	-1.964625850340136
4.000000000000000	0.964666162761401	-0.036734693877551	-2.009019904258000
5.000000000000000	0.990718065003779	-0.010775734161978	-1.999799877623007
6.000000000000000	0.995569632909013	-0.003116214151740	-1.999786600119178
7.000000000000000	0.998625474410811	-0.001500500128198	-2.000187736134178
8.000000000000000	0.999512441629228	-0.000437315625932	-1.999982003637284
9.000000000000000	0.999814275931998	-0.000164519052781	-2.000007177534977
10.000000000000000	0.999938498899874	-0.000061110518781	-2.000003029287889
11.000000000000000	0.999977373365221	-0.000020163779166	-2.000000055797335
12.000000000000000	0.999991967966735	-0.000007536011889	-2.000000351836516

Ερώτημα ii

Το πρόγραμμα σε Matlab φαίνεται παρακάτω:

```
format long
x1(1)=0; x2(1)=0; x3(1)=0;
data=[];
for i=1:1:7
x1(i+1)=((2*x2(i) - 3*x3(i))/5) - 1/5;
x2(i+1)=((3*x1(i+1) - x3(i))/9) - 5/9;
x3(i+1) = -((-x1(i+1) + x2(i+1))/7) - 15/7;
data=[data;i x1(i+1) x2(i+1) x3(i+1) ];
end
fprintf('          i              x1(i)             x2(i)             x3(i)\n')
disp(data)
```

Τα αποτελέσματα που λαμβάνουμε είναι:

i	x1(i)	x2(i)	x3(i)
1.000000000000000	-0.200000000000000	-0.622222222222222	-2.082539682539683
2.000000000000000	0.800634920634921	-0.057283950617284	-2.020297304106828
3.000000000000000	0.989264802217183	-0.001323143249069	-2.001344579219107
4.000000000000000	1.000277490231837	0.000241894434957	-1.999994914886160
5.000000000000000	1.000093706705679	0.000030670555911	-1.999990994835747
6.000000000000000	1.000006865123813	0.000001287800798	-1.999999203239569
7.000000000000000	1.000000037064061	-0.000000076174250	-1.999999983823098