ΕΡΓΑΣΙΑ 3 : ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ

Όνομα: Άντζελα Μουτσλάρη

Αρ. Μητ. :12071

- Άσκηση 3.1-1 [Πολυωνυμική Παρεμβολή]

  ΕΡΩΤΗΜΑ (i)

ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ LAGRANGE

Συνάρτηση : $f(x) = e^{-x^2}$

Τα πολυώνυμα Lagrange για παρεμβολή στα σημεία:

(0,f(0)) , (0.3,f(0.3)),(0.6,f(0.6)),(1,f(1)) είναι:

- $$L_o(x) = \frac{(x-0.3)(x-0.6)(x-1)}{(0-0.3)(0-0.6)(0-1)}$$

- $$L_1(x) = \frac{(x-0.0)(x-0.6)(x-1)}{(0.3-0.0)(0.3-0.6)(0.3-1)}$$

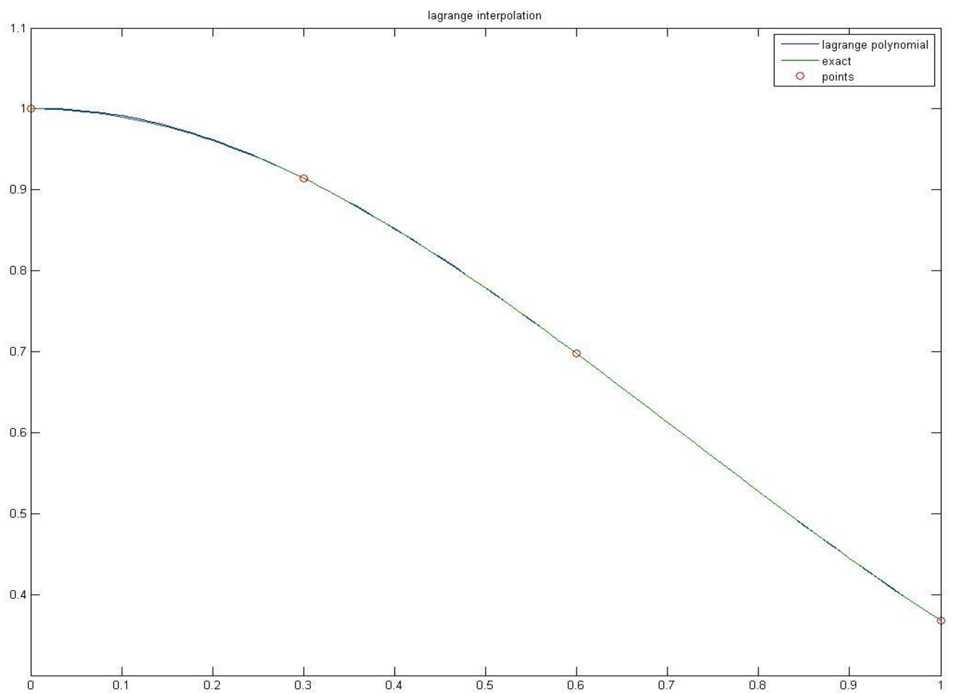
- $$L_2(x) = \frac{(x-0)(x-0.3)(x-1)}{(0.6-0.0)(0.6-0.3)(0.6-1)}$$

- $$L_3(x) = \frac{(x-0)(x-0.3)(x-0.6)}{(1-0.0)(1-0.3)(1-0.6)}$$

- Το πολυώνυμο θα είναι:
- $$p(x) = L_o(x) * f(x_0) + L_1(x) * f(x_1) + L_2(x) * f(x_2) + L_3(x) * f(x_3)$$

$$\mathrm{f}(0) = 1$$
$$\mathrm{f}(0.3) = 0.9139312$$
$$\mathrm{f}(0.6) = 0.6976763$$
$$f(1) = 0.36787944$$

- Το γράφημα είναι:



- 3.1-1 ΕΡΩΤΗΜΑ (iii)
- Πρόγραμμα Υπολογισμού Των Παραπάνω Πολυωνύμων σε MATLAB

```
function lagrange

format long

x=[0:0.01:1];
```

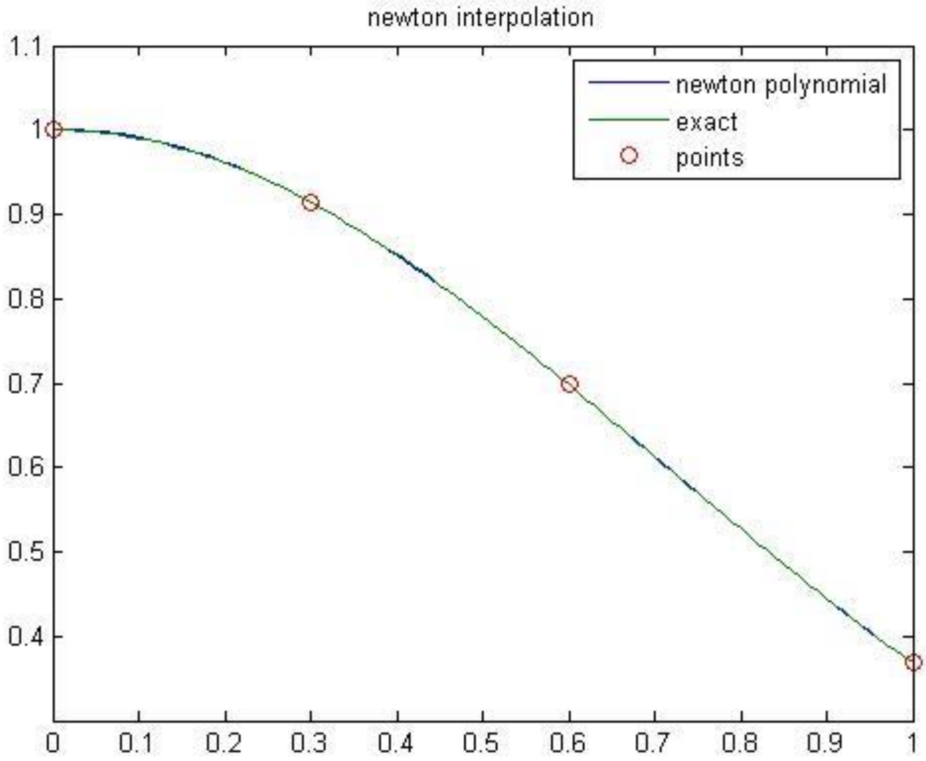
```
x0=0;x1=0.3;x2=0.6; x3=1;

y0=f(x0);y1=f(x1);y2=f(x2);y3=f(x3);

xx=[x0 x1 x2 x3];

yy=[y0 y1 y2  y3];

y=l0(x)*y0+l1(x)*y1+l2(x)*y2+l3(x)*y3;


figure

plot(x,y,x,f(x),xx,yy ,'o')

title( 'lagrange interpolation')

legend('lagrange polynomial','exact','points')

end


function val=f(x)

val=exp(-x.^2);

end


function val=l0(x)

x0=0;

x1=0.3;

x2=0.6;

x3=1;

val=(x-x1).*(x-x2).*(x-x3)./((x0-x1)*(x0-x2)*(x0-x3));

end


function val=l1(x)

x0=0;

x1=0.3;

x2=0.6;

x3=1;

val=(x-x0).*(x-x2).*(x-x3)./((x1-x0)*(x1-x2)*(x1-x3));
```

```
end

function val=l2(x)
x0=0;
x1=0.3;
x2=0.6;
x3=1;
val=(x-x0).*(x-x1).*(x-x3)./((x2-x0)*(x2-x1)*(x2-x3));
end

function val=l3(x)
x0=0;
x1=0.3;
x2=0.6;
x3=1;
val=(x-x0).*(x-x1).*(x-x2)./((x3-x0)*(x3-x1)*(x3-x2));
end
```

➢ 3.1-1 Ερώτημα (ii)

Το Πολυώνυμο Newton Προκύπτει από τον Παρακάτω Πίνακα με τις Διαιρεμένες Διαφορές.

Το Γράφημα του Πολυωνύμου & της Ακριβούς Συνάρτησης f(x) είναι :



- 3.1-1 Ερώτημα (iii)
- Ανάπτυξη Προγράμματος MATLAB

```
function newton
format long
x=[0:0.01:1];
x0=0;x1=0.3;x2=0.6; x3=1;
y0=f(x0);y1=f(x1);y2=f(x2);y3=f(x3);
xx=[x0 x1 x2 x3];
yy=[y0 y1 y2  y3];

f01=(y1-y0)/(x1-x0);
f12=(y2-y1)/(x2-x1);
f23=(y3-y2)/(x3-x2);
f012=(f12-f01)/(x2-x0);
f123=(f23-f12)/(x3-x1);
f0123=(f123-f012)/(x3-x0);
y=y0+f01*(x-x0)+f012*(x-x0).*(x-x1)+f0123*(x-x0).*(x-x1).*(x-x2);
figure
plot(x,y,x,f(x),xx,yy ,'o')
title( 'newton interpolation')
legend('newton polynomial','exact','points')
end
function val=f(x)
val=exp(-x.^2);
end
```

x_i	$f(x_i)$	$[\ ,\ ]$	$[\ ,\ ,\ ,\ ]$	
0.0	1.0			
		$\frac{0.9139312-1}{0.3-0.0}=$ = **-0.286896**		
0.30	0.9139312		$\frac{-0.7208496+0.286896}{0.6-0.0}$ = **-0.723256**	
		$\frac{0.69767633-0.9139312}{0.6-0.3}=$ = -0.7208496		$\frac{-0.148061+0.723256}{1-0}$ = **0.575195**
0.60	0.6976763		$\frac{-0.82449223+0.7208496}{1-0.3}$ $=-0.148061$	
		$\frac{0.36787944-0.69767633}{1-0.6}$ = -0.82449223		
1.0	0.3678794			

Το Πολυώνυμο **Newton** 3ου βαθμού που παρεμβάλλεται στα δεδομένα σημεία , είναι:

$$p(x) = 1 - 0.286896(x-0) - 0.723256(x-0)(x-0.3) +$$
$$0.575195(x-0)(x-0.3)(x-0.6)$$

μετά τις πράξεις προκύπτει :

$$p(x) = 1 + 0.0336159x - 1.2409315x^2 + 0.575195x^3$$

Το πολυώνυμο προσεγγίζει την ολοκληρωτέα συνάρτηση στο διάστημα [0,1]

$$f(x) = e^{-x^2} \ \square \ p(x)$$

με ολοκλήρωση του πολυώνυμου παρεμβολής NEWTON έχω:

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx \int_0^1 p(x)dx = \int_0^1 (1 + 0.0336159x - 1.2409315x^2 + 0.575195x^3)dx$$

Δηλαδή το ζητούμενο ολοκλήρωμα προσεγγίζεται αριθμητικά από:

$$I \approx 1 + 0.0336159\frac{1^2}{2} - 1.2409315\frac{1^3}{3} + 0.575195\frac{1^4}{4} = 0.746963$$

$$Error = |0.746824 - 0.746963| \approx 1.39 \cdot 10^{-4}$$

δηλαδή έχει σφάλμα ως προς τη θεωρητική δοθείσα τιμή = 1.39*10^(-4) ~ 0.000139

➢ Άσκηση 3.1-2 Προσεγγιστικές Μέθοδοι

$$f[x_0,x_1]=\frac{(f(x_1)-f(x_0))}{(x_1-x_0)}$$

$$f[x_1,x_2]=\frac{(f(x_2)-f(x_1))}{(x_2-x_1)}$$

$$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{(f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1])}{(x_2-x_0)}=\frac{\frac{(f(x_2)-f(x_1))}{(x_2-x_1)}-\frac{(f(x_1)-f(x_0))}{(x_1-x_0)}}{(x_2-x_0)}$$

ΙΣΑΠΟΣΤΑΣΕΙΣ ΣΗΜΕΙΩΝ ΚΑΤΑ h

$$\begin{aligned}
&(x_1-x_0)=(x_2-x_1)=(x_3-x_2)=h\\
&x_2-x_0=x_3-x_1=2h\\
&x_3-x_0=3h
\end{aligned}$$

$$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{\frac{(f(x_2)-f(x_1))}{h}-\frac{(f(x_1)-f(x_0))}{h}}{2h}$$

$$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f(x_0)-2f(x_1)+\mathrm{f}(\mathrm{x}_2)}{2h^2}$$

$$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f(x_0)-2f(x_1)+\mathrm{f}(\mathrm{x}_2)}{2!h^2}$$

$$2!\, f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f(x_0) - 2f(x_1) + \mathrm{f}(\mathrm{x}_2)}{h^2}$$

$$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f(x_1) - 2f(x_2) + \mathrm{f}(\mathrm{x}_3)}{2h^2}$$

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0}$$

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{\dfrac{f(x_1) - 2f(x_2) + \mathrm{f}(\mathrm{x}_3)}{2h^2} - \dfrac{f(x_0) - 2f(x_1) + \mathrm{f}(\mathrm{x}_2)}{2h^2}}{3h}$$

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{(f(x_1) - 2f(x_2) + \mathrm{f}(\mathrm{x}_3)) - (f(x_0) - 2f(x_1) + \mathrm{f}(\mathrm{x}_2))}{6h^3}$$

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{(-f(x_0) + 3f(x_1) - 3\mathrm{f}(\mathrm{x}_2) + \mathrm{f}(\mathrm{x}_3))}{6h^3}$$

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{(-f(x_0) + 3f(x_1) - 3\mathrm{f}(\mathrm{x}_2) + \mathrm{f}(\mathrm{x}_3))}{3!\,h^3}$$

$$3!\, f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{(-f(x_0) + 3f(x_1) - 3\mathrm{f}(\mathrm{x}_2) + \mathrm{f}(\mathrm{x}_3))}{h^3}$$

- Άσκηση 3.2 **Μέθοδος Ελαχίστων Τετραγώνων**

Σύμφωνα με το Παράδειγμα 4.1-3, Συμπληρώνω τον Πίνακα

x	y	xy	x^2	x^2y	x^3	x^4
0.5	1.235	0.6175	0.25	0.30875	0.125	0.0625
0.150	1.750	0.2625	0.0225	0.039375	0.003375	0.000506
0.250	2.020	0.505	0.0625	0.12625	0.015625	0.003906
0.400	-1.550	-0.62	0.16	-0.248	0.064	0.0256
0.550	-2.345	-1.28975	0.3025	-0.70936	0.166375	0.091506
0.700	0.435	0.3045	0.49	0.21315	0.343	0.2401
$\Sigma =$ **2.550**	**1.545**	**-0.22025**	**1.2875**	**-0.26984**	**0.717375**	**0.424119**

Σύστημα :

$a_0\ \Sigma x_i^0 + a_1\ \Sigma x_i^1 + a_2\ \Sigma x_i^2 = \Sigma y_i$ ($\sum_{n=1}^{6} x_i^0 = 6$)

$$a_0\ \Sigma x_i^1 + a_1\ \Sigma x_i^2 + a_2\ \Sigma x_i^3 =$$

$$a_0\ \Sigma x_i^2 + a_1\ \Sigma x_i^3 + a_2\ \Sigma x_i^4 = \Sigma x_i^2 y_i$$

ή σε μορφή πινάκων :

$$\begin{bmatrix} 6 & 2.55 & 1.2875 \\ 2.55 & 1.2875 & 0.717375 \\ 1.2875 & 0.717375 & 0.424119 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.545 \\ -0.22025 \\ -0.26984 \end{bmatrix}$$

Από τη λύση του συστήματος (πχ. με Matlab)

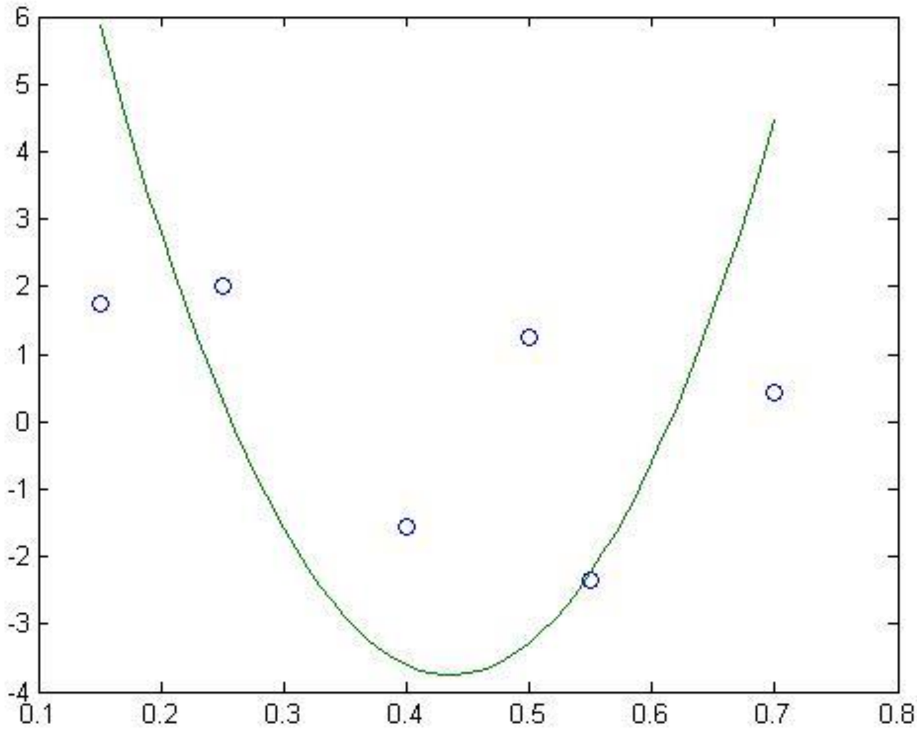
προκύπτει

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18.6371 \\ -102.7621 \\ 117.8761 \end{bmatrix}$$

Το 2^{ου} βαθμού πολυώνυμο για προσέγγιση ελαχίστων τετραγώνων σφάλματος:

$$p(x) = 18.6371 - 102.7621x + 117.8761x^2$$

ΓΡΑΦΗΜΑ :



Για να βρούμε το πολυώνυμο 1^{ου} βαθμού

Γράφουμε το (υπο) σύστημα

$a_0\ \Sigma x_i^0 + a_1\ \Sigma x_i^1 = \Sigma y_i$ (Σx_i^0 = 6)

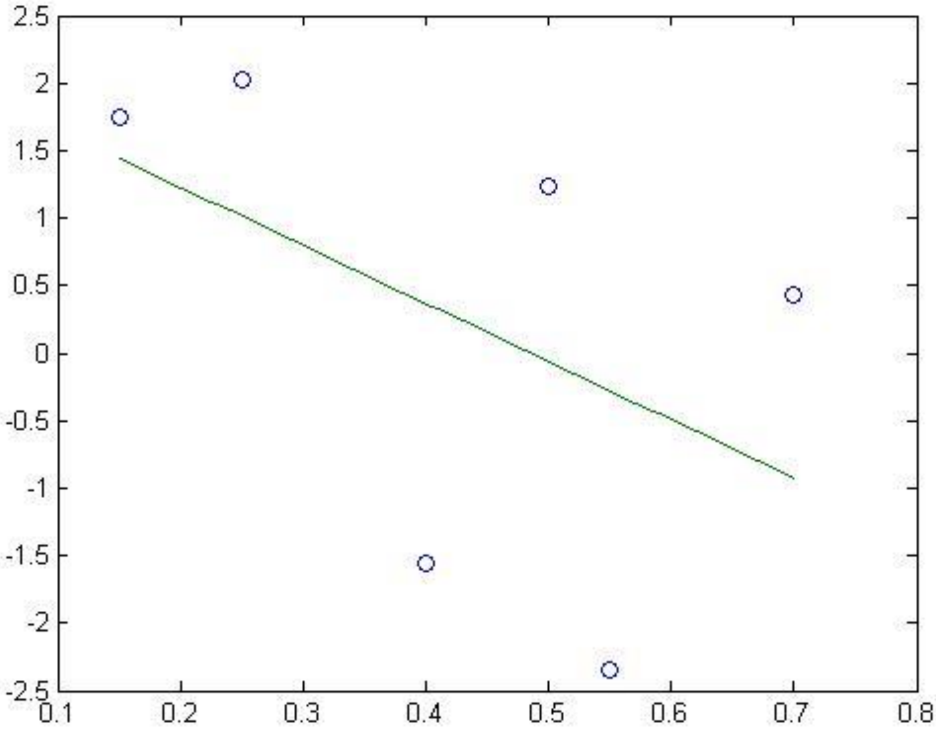
$a_0\ \Sigma x_i^1 + a_1\ \Sigma x_i^2 = \Sigma x_i y_i$

$$\begin{bmatrix} 6 & 2.55 \\ 2.55 & 1.2875 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.545 \\ -0.22025 \end{bmatrix}$$

η λύση είναι: a_0 = 2.086565 a_1 =-4.303681

$$P_1(x) = 2.086565 - 4.303681x$$

ΓΡΑΦΗΜΑ:



Παρακάτω υπολογίζεται το σφάλμα της προσέγγισης με το πολυώνυμο 1^{ου} βαθμού.

ΣΦΑΛΜΑ =

x_i	y_i	$P_1(x_i) = 2.086565 - 4.303681x_i$	$(y_i - P_1(x_i))^2$
0.5	1.235	-0.06528	1.690716
0.15	1.750	1.441013	0.095473
0.25	2.020	1.010645	1.018798
0.40	-1.550	0.365093	3.66758
0.55	-2.345	-0.28046	4.262327
0.7	0.435	-0.92601	1.852353

		SUM =	**12.58725**

Άρα συνολικό σφάλμα είναι το άθροισμα των τετραγώνων των σφαλμάτων:

$$\sum_{n}((y_i - P_1(x_i))^2)$$ = 12.58725

Άσκηση 3.3 SPLINE

- ΕΡΩΤΗΜΑ (i)

Τα σημεία είναι – σύμφωνα με την 3.1-2, **4 ισαπέχοντα στο διάστημα [0,1]** με

Ισαπόσταση h=(1-0)/3 = 0.3333333

Δηλαδή:

x_0 =0 , x_1 =0.333333, x_2 =0.666667 , x_3 =1.00000

Η συνάρτηση που θέλουμε να προσεγγίσουμε με παρεμβολή στα παραπάνω σημεία είναι η $f(x) = e^{-x^2}$

Το κυβικό Spline θα έχει τη γενική μορφή :

$$s(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + c_1 (x - x_1)_+^{\ 3} + c_2 (x - x_2)_+^{\ 3}$$

με 6 αγνώστους : b_i , c_i

$b_0 + b_1 x_0 + b_2 x_0^{\ 2} + b_3 x_0^{\ 3} + c_1 0 + c_2 0 = s(x_0)$ =y0 (1)

$b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_1^{\ 2} + b_3 x_1^{\ 3} + c_1 0 + c_2 0 = s(x_1)$ =y1 (2)

$b_0 + b_1 x_2 + b_2 x_2^{\ 2} + b_3 x_2^{\ 3} + c_1 (x_2 - x_1)^3 + c_2 0 = s(x_2)$ =y2 (3)

$b_0 + b_1 x_3 + b_2 x_3^{\ 2} + b_3 x_3^{\ 3} + c_1 (x_3 - x_1)^3 + c_2 (x_3 - x_2)^3 = s(x_3)$ =y3 (4) οι οριακές συνθήκες με δεδομένες τις πρώτες παραγώγους στα 2 άκρα .

$$b_1 + 2b_2 x_0 + 3b_3 x_0^{\;2} = s'(x_0) \qquad (5)$$

$$b_1 + 2b_2 x_3 + 3b_3 x_3^{\;2} + 3c_1 (x_3 - x_1)^2 + 3c_2 (x_3 - x_2)^2 = s'(x_3) \qquad (6)$$

οι σχέσεις 1-6 αποτελούν γραμμικό σύστημα που λύνεται ως προς b_i , c_i .

Σε μορφή πινάκων, και με αντικατάσταση των x_i γίνεται :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0.333333 & 0.333333^2 & 0.333333^3 & 0 & 0 \\ 1 & 0.666667 & 0.666667^2 & 0.666667^3 & (0.666667 - 0.333333)^3 & 0 \\ 1 & 1 & 1^2 & 1^3 & (1-0.333333)^3 & (1-0.666667)^3 \\ 0 & 1 & 2\cdot 0 & 3\cdot 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cdot 1 & 3\cdot 1^2 & 3\cdot(1-0.333333)^2 & 3\cdot(1-0.666667)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} ==$$

$$= \begin{bmatrix} e^{0} \\ e^{-0.33333^2} \\ e^{-0.666667^2} \\ e^{-1^2} \\ 0 \\ 2e^{-1^2} \end{bmatrix}$$

με επίλυση του συστήματος έχουμε

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1.35151676 \\ 1.21521293 \\ -3.1916189 \\ 12.145973 \end{bmatrix}$$

το spline είναι

$$s(x) = 1 + 0x + 1.35151676x^2 + 1.21521293x^3 - 3.1916189(x - 0.333333)_+^3 + 12.145973(x - 0.66667)_+^3$$

& στα επιμέρους διαστήματα

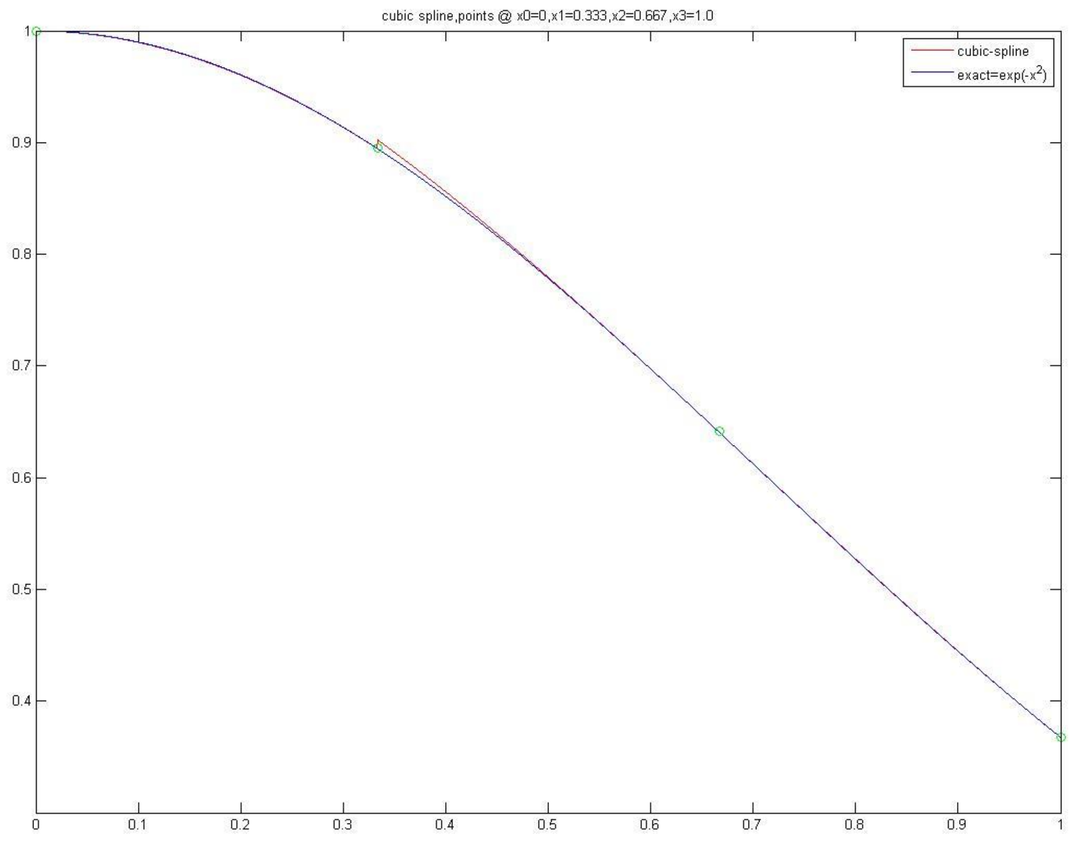
$$s(x) = 1 + 0x + 1.35151676x^2 + 1.21521293x^3 \quad , \quad x \in [0, 0.33333333]$$

$$s(x) = 1 + 0x + 1.35151676x^2 + 1.21521293x^3 - 3.1916189(x - 0.333333)^3 \ ,$$
$$x \in [0.333, 0.667]$$

$$s(x) = 1 + 1.35151676x^2 + 1.21521293x^3 - 3.1916189(x - 0.333333)^3 + 12.145973(x - 0.66667)^3$$

$$x \in [0.667, 1.000]$$

ΤΟ ΓΡΑΦΗΜΑ

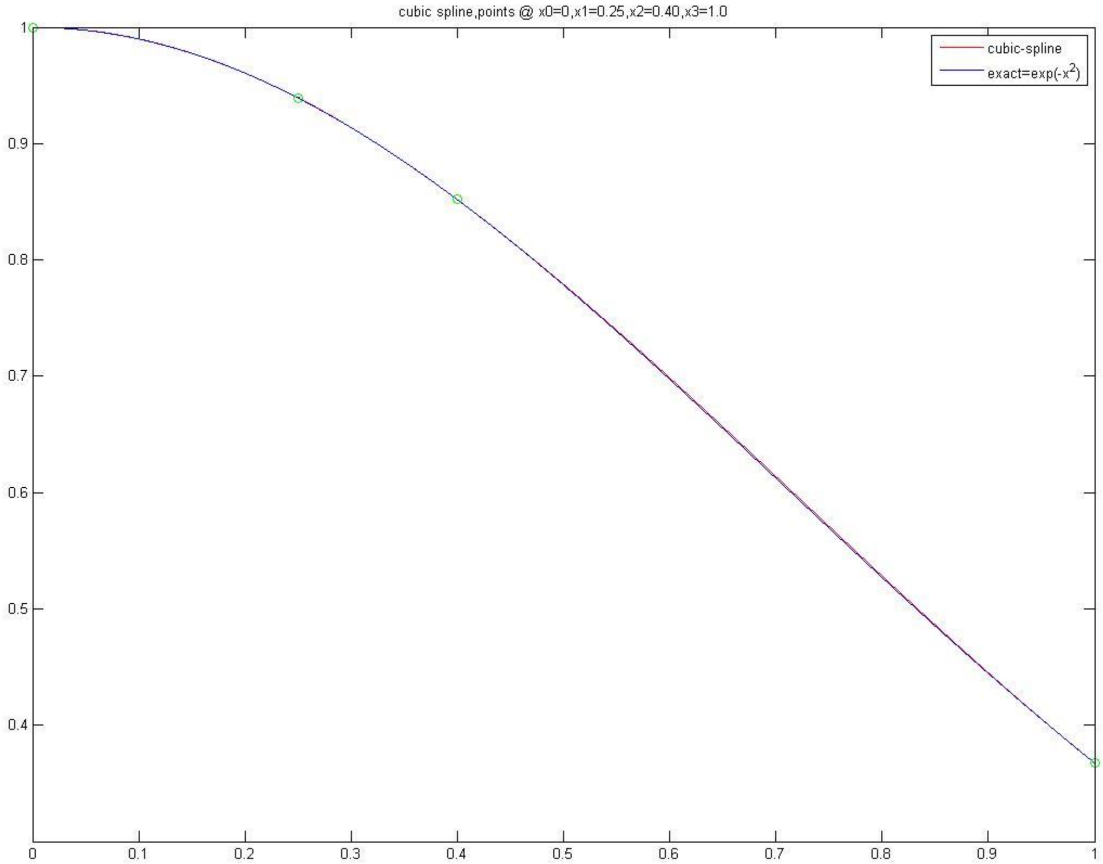

cubic spline,points @ x0=0,x1=0.333,x2=0.667,x3=1.0
cubic-spline
exact=exp(-x^2)
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

Η ‘ασυνέχεια’ που παρατηρείται κοντά στο 2^{o} σημείο (χ=0.333), οφείλεται πιθανά στην επιλογή των αρχικών κόμβων.

Τρέχοντας το πρόγραμμα με άλλη επιλογή αρχικών κόμβων

Στα χ0=0, χ1=0.25,χ2=0.40,χ3=1.

Παίρνουμε ένα καλύτερο γράφημα.



- ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ (MATLAB) ΓΙΑ ΤΟ ΚΥΒΙΚΟ SPLINE

```
function spline
format  long
h=1.0/3.0;


x0=0 ;x1=x0+h ;x2=x1+h; x3=x2+h;
x0=0.;
x1=0.333333;
x2=0.666667;
x3=1;
y0=f(x0);y1=f(x1);y2=f(x2);y3=f(x3);

y=[y0 y1 y2 y3 df(x0)  df(x3)]';
y
df(x0)
df(x3)
xi=[x0 x1 x2 x3];
yi=[y0 y1 y2 y3];

A=[  1  x0  x0^2  x0^3     0          0;
     1  x1  x1^2  x1^3     0          0;
     1  x2  x2^2  x2^3  (x2-x1)^3     0 ;
     1  x3  x3^2  x3^3  (x3-x1)^3 (x3-x2)^3;
     0  1   2*x0  3*x0^2   0          0 ;
     0  1   2*x3  3*x3^2 3*(x3-x1)^2 3*(x3-x2)^2];

 con=cond(A)
 b=(A^-1)*y;
```

```
b

 dx=(x3-x0)/10000;
 xx(1)=x0; s(1)=y0;
 for i=2:1:10001
     xx(i)=xx(i-1)+dx;
 if (xx(i)<=x1)
     s(i)=b(1)+b(2)*xx(i)+b(3)*xx(i)^2+b(4)*xx(i)^3;
 elseif(x1<xx(i)<=x2)
     s(i)=b(1)+b(2)*xx(i)+b(3)*xx(i)^2+b(4)*xx(i)^3+b(5)*(xx(i)-
x1)^3;
 elseif(x2<xx(i)<=x3)
     s(i)=b(1)+b(2)*xx(i)+b(3)*xx(i)^2+b(4)*xx(i)^3+b(5)*(xx(i)-
x1)^3+b(6)*(xx(i)-x2)^3;
 end

 end

 s(3330)
 s(3700)
 figure
 plot(xx,s)
 figure
 plot(xx,s,'-r',xx,f(xx),'b',xi,yi,'og')
 title=('cubic spline approximating the function f(x)=exp(-x^2)');
 legend('cubic-spline','exact');
end

function val=f(x)
val=exp(-x.^2);
end
```

```
function val=df(x)
val=-2*x*exp(-x^2);
end
```

- Άσκηση 3.3 Spline

ΕΡΩΤΗΜΑ (ii)

Το Φυσικό Κυβικό Spline, με 4 κόμβους συνολικά , θα έχει την παρακάτω μορφή.

$$s(x) = b_0 + b_1 x + c_0 (x - x_0)_+^3 + c_1 (x - x_1)_+^3 + c_2 (x - x_2)_+^3 + c_3 (x - x_3)_+^3$$

(από Σημειώσεις & <u>σχ. 5.1.3-12</u>)

Εδώ οι εξισώσεις είναι Σύστημα 6x6

$$b_0 + b_1 x_0 = y_0$$

$$b_0 + b_1 x_1 + c_0 (x_1 - x_0)^3 = y_1$$

$$b_0 + b_1 x_2 + c_0 (x_2 - x_0)^3 + c_1 (x_2 - x_1)^3 = y_2$$

$$b_0 + b_1 x_3 + c_0 (x_3 - x_0)^3 + c_1 (x_3 - x_1)^3 + c_2 (x_3 - x_2)^3 = y_3$$

$$c_0 + c_1 + c_2 + c_3 = 0$$

$$c_0 x_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 = 0$$

σε μορφή πινάκων γίνεται

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_1 & (x_1 - x_0)^3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_2 & (x_2 - x_0)^3 & (x_2 - x_1)^3 & 0 & 0 \\ 1 & x_3 & (x_3 - x_0)^3 & (x_3 - x_1)^3 & (x_3 - x_2)^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

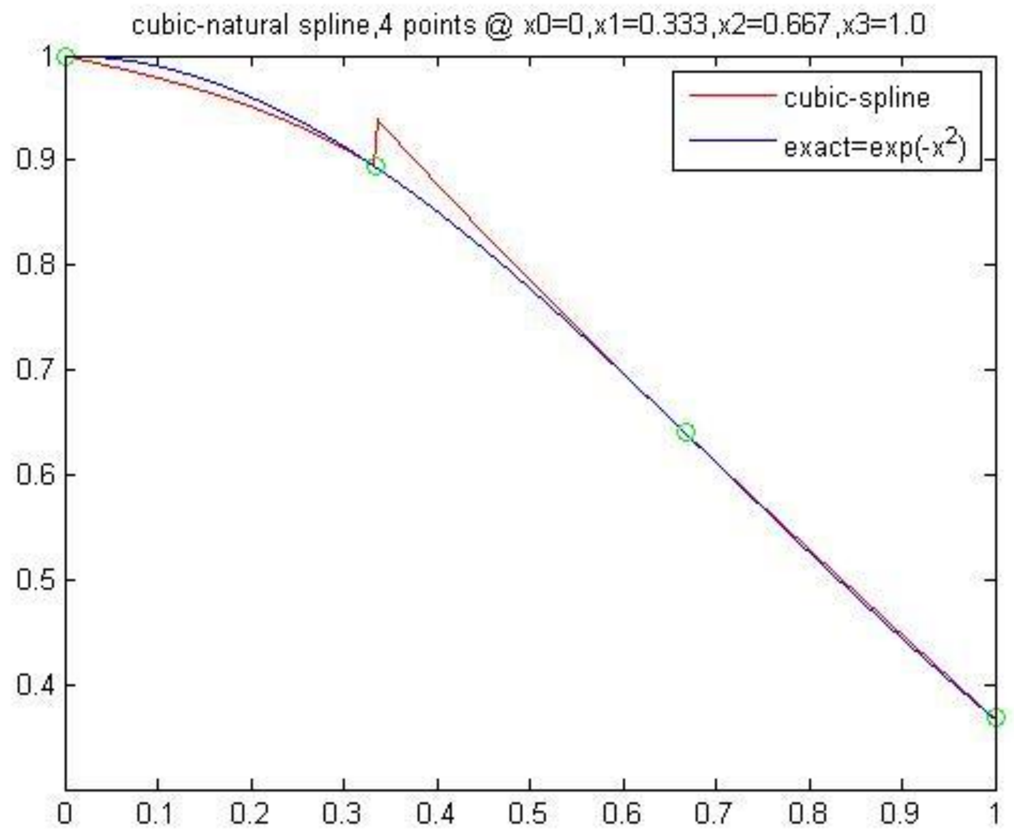
μετά την επίλυση ,πχ με matlab προκύπτει η λύση

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.000000000 \\ -0.20061185717 \\ -1.03383173145 \\ 2.19353776838 \\ -1.28558034238 \\ 0.12587430546 \end{bmatrix}$$

η συνολική εξίσωση γίνεται (με στρογγύλευση των παραπάνω συντελεστών)

$$s(x) = 1.0 - 0.200612x \text{-} 1.0338317(x-0)_+^3 + 2.193538(x-0.33333)_+^3 + \text{-}1.28558(x-0.66667)_+^3 + 0.12587(x-1)_+^3$$

ΓΡΑΦΗΜΑ

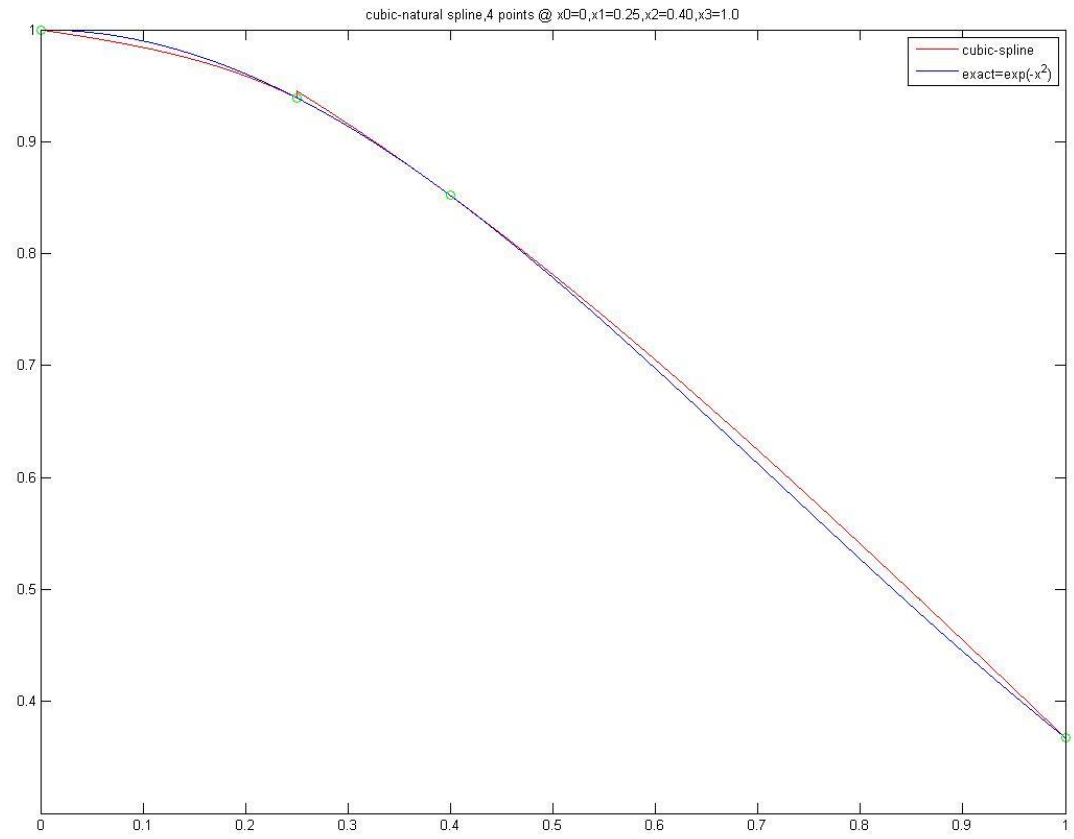


Το φυσικό κυβικό , είναι λιγότερο καλό από το πλήρες κυβικό , κυρίως στα άκρα.

Βλέπουμε ξανά την ασυνέχεια στο χ=0.333.

Επαναλαμβάνουμε το τρέξιμο με τη δεύτερη επιλογή 4 σημείων
Στα χ= 0 , 0.25, 0.40, 1.0

ΓΡΑΦΗΜΑ



Παρατηρώ μεγάλη βελτίωση στο σημείο ‘ ασυνέχειας’, παραγώγου
Αλλά βεβαια παραμένει η ιδια εικόνα μικρότερης ακριβείας στο πρωτο τμημα [0,χ1]=[0,0.25] , λογω της μικροτερης ‘ποιοτητας’ του φυσικου, κυριως στις παραγωγους των ακρων σημειων.

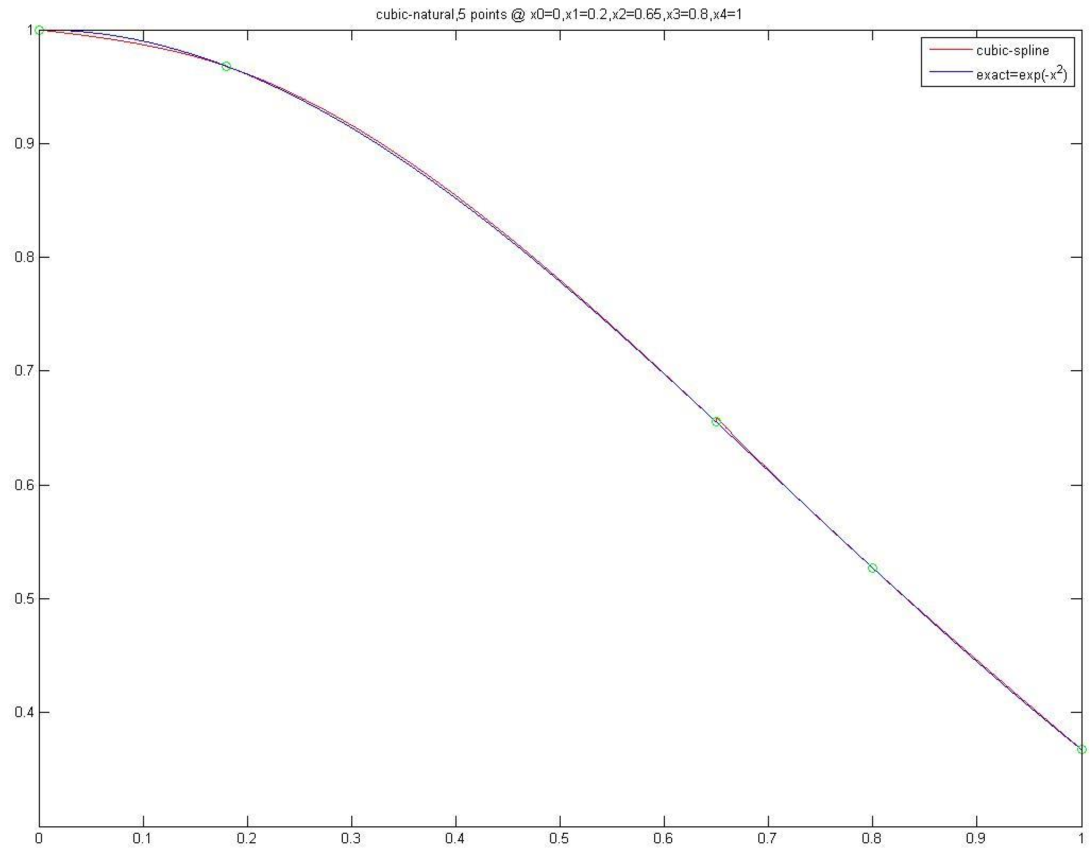
- Ανάπτυξη Προγράμματος MATLAB για το Φυσικό Κυβικό Spline

```
function  cubic_natural_spline
format  long
h=1.0/3.0;

x0=0 ;x1=x0+h ;x2=x1+h; x3=x2+h;

% x0=0;x1=0.25 ; x2=0.40; x3=1.0;

y0=f(x0);y1=f(x1);y2=f(x2);y3=f(x3);

y=[y0 y1 y2 y3 0.0  0.0]';

xi=[x0 x1 x2 x3];
yi=[y0 y1 y2 y3];

A=[  1  x0    0            0       0           0 ;
     1  x1   (x1-x0)^3     0       0           0 ;
     1  x2   (x2-x0)^3  (x2-x1)^3  0           0 ;
     1  x3   (x3-x0)^3  (x3-x1)^3  (x3-x2)^3   0 ;
     0  0      1            1       1          1 ;
     0  0      x0           x1      x2         x3 ];

 b=(A^-1)*y;
b
 c0=b(3);c1=b(4);c2=b(5);c3=b(6);

 dx=(x3-x0)/10000;
 xx(1)=x0; s(1)=y0;
 for i=2:1:10001
     xx(i)=xx(i-1)+dx;

     s0=b(1)+b(2)*xx(i)+c0*(xx(i)-x0)^3;
 if  (xx(i)<=x1)
     s(i)=s0;
 elseif(x1<xx(i)<=x2)
     s(i)=s0+c1*(xx(i)-x1)^3;
 elseif(x2<xx(i)<=x3)
     s(i)=s0+c1*(xx(i)-x1)^3+c2*(xx(i)-x2)^3;
 end

 end

 figure
 plot(xx,s,'r',xx,f(xx),'b',xi,yi,'og')
```

```
 title('cubic-natural spline,4 points @
x0=0,x1=0.25,x2=0.40,x3=1.0');
 legend('cubic-spline','exact=exp(-x^2)');
end

function val=f(x)
 val=exp(-x.^2);
 end

function val=df(x)
val=-2*x*exp(-x^2);
end
```

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Με προσθήκη ενός εσωτερικού κόμβου και κατάλληλη επιλογή των άλλων εσωτερικών κόμβων , η ακρίβεια βελτιώνεται πολύ.
Πχ με εισαγωγή ενός ακόμα κόμβου, και κόμβους στα σημεία (μη ισαπέχοντα) X=[0,0.20,0.65,0.80,1.0]
Προκύπτει :



Φυσικό κυβικό spline με 5 κόμβους.