ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΑΘΗΝΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΝΑΥΠΗΓΙΚΗΣ

Μάθημα: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

Διδάσκων: Δρ. Μπράτσος Αθανάσιος

Ακαδημαϊκό έτος: 2013 – 2014

Τίτλος Εργαστηριακής Άσκησης: Προσεγγιστικές Μέθοδοι

Ονοματεπώνυμο Σπουδαστή: Εμμανουήλ Δ. Μωράκης

Αριθμός Μητρώου / Εξάμηνο: 05145 / ΠΤΥΧΙΟ

Ημερομηνία παράδοσης: 15/12/2013

Άσκηση 3.1 - 1

Ερώτημα i

Το ολοκλήρωμά μας είναι το ακόλουθο:

$$I = \int_0^1 e^{-x^2} dx$$

Η συνάρτηση μας είναι:

$$f(x) = e^{-x^2}$$

Και οι κόμβοι μας:

$$x_0 = 0,\ x_1 = 0{,}3,\ x_2 = 0{,}6 \text{ και } x_3 = 1{,}0$$

Αντικαθιστώντας έχουμε:

$$f(x_0) = 1,\ f(x_1) = 0{,}91393,\ f(x_2) = 0{,}69768 \text{ και } f(x_3) = 0{,}36788$$

Επειδή τα σημεία μας είναι 4 το πολυώνυμο παρεμβολής σύμφωνα με το θεώρημα του Lagrange θα είναι:

$$P_3(x) = l_0(x)f(x_0) + l_1(x)f(x_1) + l_2(x)f(x_2) + l_3(x)f(x_3) \quad (\alpha),$$

όπου

$$l_0(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1}\frac{x-x_2}{x_0-x_2}\frac{x-x_3}{x_0-x_3}$$

$$l_0(x) = \frac{(x-0{,}3)(x-0{,}6)(x-1)}{(0-0{,}3)(0-0{,}6)(0-1)}$$

$$l_0(x) = \frac{x^3-1{,}9x^2+1{,}08x-0.18}{-0{,}18}$$

$$l_0(x) = -5{,}55556x^3 + 10{,}55556x^2 - 6x + 1$$

$$l_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \frac{x - x_3}{x_1 - x_3}$$

$$l_1(x) = \frac{(x-0)(x-0,6)(x-1)}{(0,3-0)(0,3-0,6)(0,3-1)}$$

$$l_1(x) = \frac{x^3 - 1,6x^2 + 0,6x}{0,063}$$

$l_1(x) = 15,87302x^3 – 25,39683x^2 + 9,52381x$

$$l_2(x) = \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \frac{x - x_3}{x_2 - x_3}$$

$$l_2(x) = \frac{(x-0)(x-0,3)(x-1)}{(0,6-0)(0,6-0,3)(0,6-1)}$$

$$l_2(x) = \frac{x^3 - 1,3x^2 + 0,3x}{-0,072}$$

$l_2(x) = -13,88889x^3 + 18,05556x^2 - 4,16667x$

$$l_3(x) = \frac{x - x_0}{x_3 - x_0} \frac{x - x_1}{x_3 - x_1} \frac{x - x_2}{x_3 - x_2}$$

$$l_3(x) = \frac{(x-0)(x-0,3)(x-0,6)}{(1-0)(1-0,3)(1-0,6)}$$

$$l_3(x) = \frac{x^3 - 0,9x^2 + 0,18x}{0,28}$$

$l_3(x) = 3,57143x^3 – 3.21429x^2 + 0,64286x$

Αντικαθιστώντας την σχέση (α) με τα παραπάνω έχουμε:

$P_3(x) = (-5,55556x^3 + 10,55556x^2 – 6x + 1) + 0,91393(15,87302x^3 – 25,39683x^2 + 9,52381x) + 0,69768(-13,88889x^3 + 18,05556x^2 - 4,16667x) + 0,36788(3,57143x^3 – 3.21429x^2 + 0,64286x)$

$P_3(x) = 0,57513x^3 – 1.24083x^2 + 0.03359x + 1$

$$Άρα\ I = \int_0^1 e^{-x^2} dx \approx \int_0^1 P_3(x) dx = \int_0^1 (0,57513x^3 - 1.24083x^2 + 0.03359x + 1)\, dx$$

Ομοίως με τον τύπο παρεμβολής του Newton για 4 σημεία έχουμε:

$$P_3(x) = f[x_0] + f[x_0,x_1](x - x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x - x_0)(x - x_1) + f[x_0,x_1,x_2,x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \qquad (\beta)$$

Ο πίνακας παρακάτω δείχνει τα αποτελέσματα που λαμβάνουμε:

i	x_i	$f[x_i]$						
0	0	1						
			$f[x_0,x_1]$ =	-0,28690				
1	0,3	0,91393			$f[x_0,x_1,x_2]$ =	-0,72326		
			$f[x_1,x_2]$ =	-0,72085			$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$ =	0,57519
2	0,6	0,69768			$f[x_1,x_2,x_3]$ =	-0,14806		
			$f[x_2,x_3]$ =	-0,82449				
3	1,0	0,36788						

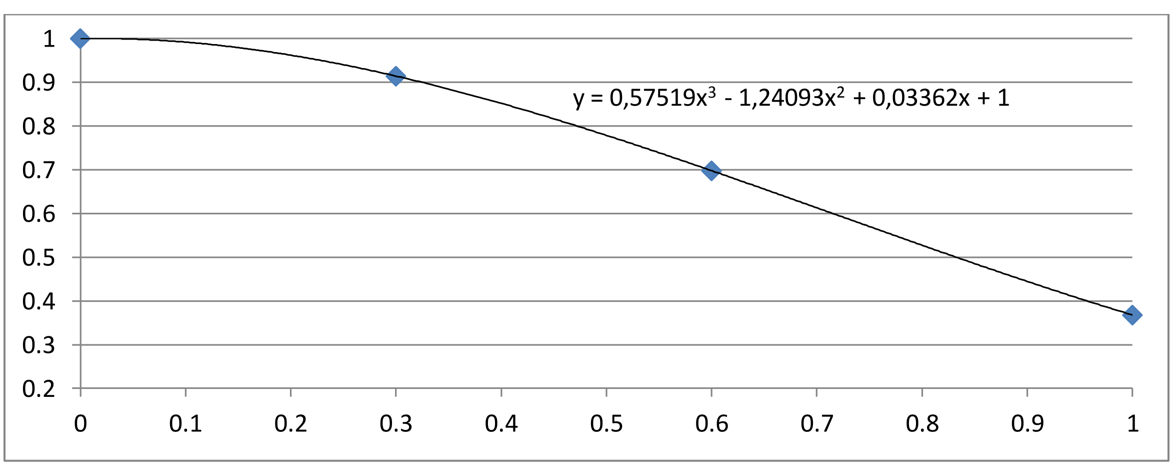
Αντικαθιστώντας τα αποτελέσματα στην σχέση (β) έχουμε:

$$P_3(x) = 1 + (-0{,}28690)(x - 0) + (-0{,}72326)(x - 0)(x - 0{,}3) + (0{,}57519)(x - 0)(x - 0{,}3)(x - 0{,}6) \rightarrow$$

$$P_3(x) = 0{,}57519x^3 - 1{,}24093x^2 + 0{,}03361x + 1$$

$$\text{Άρα } I = \int_0^1 e^{-x^2}dx \approx \int_0^1 P_3(x)dx = \int_0^1 (0{,}57519x^3 - 1{,}24093x^2 + 0{,}03361x + 1)\,dx$$

Για να επιβεβαιωθούν τα αποτελέσματα που βρήκαμεμ, παρακάτω φαίνεται η $2^{ου}$ βαθμού παρεμβολή των σημείων μας στο πρόγραμμα excel.



Ερώτημα ii

Υπολογίζοντας το παραπάνω ολοκλήρωμα έχουμε:

$$I = \int_0^1 P_3(x)dx = \int_0^1 (0{,}57519\mathrm{x}^3 - 1{,}24093\mathrm{x}^2 + 0{,}03361\mathrm{x} + 1)\, dx \rightarrow$$

I ≈ 0,74696

Η θεωρητική τιμή του ολοκληρώματος που δίνεται από την εκφώνηση είναι:

I ≈ 0,746824

Η οποία με στρογγυλοποίηση στο 5^{o} δεκαδικό ψηφίο γίνεται:

I ≈ 0,74682

Σύμφωνα με τα παραπάνω το σφάλμα που έχουμε είναι:

e = |0,74682 – 0,74696| = 0,00014

Άσκηση 3.1 - 2

Χρησιμοποιώντας την διαιρεμένη διαφορά για 3 σημεία έχουμε τον παρακάτω πίνακα:

x_0	$f(x_0)$		
		$f[x_0,x_1] = [f(x_1) - f(x_0)]/(x_1 - x_0)$	
x_1	$f(x_1)$		$f[x_0,x_1,x_2] = \{f[x_1,x_2] - f[x_0,x_1]\} / (x_2 - x_0)$
		$f[x_1,x_2] = [f(x_2) - f(x_1)]/(x_2 - x_1)$	
x_2	$f(x_2)$		

Παίρνοντας την σχέση του $f[x_0,x_1,x_2]$ έχουμε:

$$f[x_0,x_1,x_2] = \{f[x_1,x_2] - f[x_0,x_1]\} / (x_2 - x_0) \rightarrow$$

$$f[x_0,x_1,x_2] = <\{[f(x_2) - f(x_1)]/(x_2 - x_1)\} - \{[f(x_1) - f(x_0)]/(x_1 - x_0)\}> / (x_2 - x_0)$$

Λόγω ορισμού ξέρουμε ότι $h = x_1 – x_0 = x_2 – x_1$, άρα έχουμε:

$$f[x_0,x_1,x_2] = \{[f(x_2) - f(x_1) - f(x_1) + f(x_0)] / h\} / (x_2 - x_0)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τα h έχουμε:

$$h = x_1 - x_0$$
$$h = x_2 - x_1$$

$$2h = x_2 - x_0$$

Αντικαθιστώντας έχουμε:

$$f[x_0,x_1,x_2] = [f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_0)] / h / 2h \rightarrow$$

$$f[x_0,x_1,x_2] = [f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_0)] / 2h^2 \rightarrow$$

$$2!\, f[x_0,x_1,x_2] = [f(x_0) - 2f(x_1) + f(x_2)] / h^2$$ **Απεδείχθη.**

Ομοίως χρησιμοποιώντας την διαιρεμένη διαφορά για 4 σημεία έχουμε τον παρακάτω πίνακα:

x_0	$f(x_0)$			
		$f[x_0,x_1] = [f(x_1) - f(x_0)]/(x_1 - x_0)$		
x_1	$f(x_1)$		$f[x_0,x_1,x_2] = \{f[x_1,x_2] - f[x_0,x_1]\} / (x_2 - x_0)$	
		$f[x_1,x_2] = [f(x_2) - f(x_1)]/(x_2 - x_1)$		$f[x_0,x_1,x_2,x_3] = \{f[x_1,x_2,x_3] - f[x_0,x_1,x_2]\} / (x_3 - x_0)$
x_2	$f(x_2)$		$f[x_1,x_2,x_3] = \{f[x_2,x_3] - f[x_1,x_2]\} / (x_3 - x_1)$	
		$f[x_2,x_3] = [f(x_3) - f(x_2)]/(x_3 - x_2)$		
x_3	$f(x_3)$			

Παίρνοντας την σχέση του $f[x_0,x_1,x_2,x_3]$ έχουμε:

$$f[x_0,x_1,x_2,x_3] = \{f[x_1,x_2,x_3] - f[x_0,x_1,x_2]\} / (x_3 - x_0) \rightarrow$$

$$f[x_0,x_1,x_2,x_3] = \{<\{f[x_2,x_3] - f[x_1,x_2]\} / (x_3 - x_1)> - <\{f[x_1,x_2] - f[x_0,x_1]\} / (x_2 - x_0)>\} / (x_3 - x_0) \rightarrow$$

$$f[x_0,x_1,x_2,x_3] = <\{[f(x_3) - f(x_2)]/(x_3 - x_2)\} – \{f[x_1,x_2] = [f(x_2) - f(x_1)]/(x_2 - x_1)\}>$$

Λόγω ορισμού ξέρουμε ότι $h = x_1 – x_0 = x_2 – x_1 = x_3 – x_2$, άρα έχουμε:

$$f[x_0,x_1,x_2,x_3] = \{<\{f[x_2,x_3] - f[x_1,x_2]\} / (x_3 - x_1)> - <\{f[x_1,x_2] - f[x_0,x_1]\} / (x_2 - x_0)>\} / (x_3 - x_0) \rightarrow$$

$$f[x_0,x_1,x_2,x_3] = \{<\{[f(x_3) - f(x_2)]/(x_3 - x_2)\} – \{[f(x_2) - f(x_1)]/(x_2 - x_1)\}> / (x_3 - x_1)\} – \{<\{[f(x_2) - f(x_1)]/(x_2 - x_1)\} – \{[f(x_1) - f(x_0)]/(x_1 - x_0)\}> / (x_3 - x_0) \rightarrow$$

$$f[x_0,x_1,x_2,x_3] = <\{[f(x_3) - f(x_2) - f(x_2) + f(x_1)] / [h\ (x_3 - x_1)]\} – \{[f(x_2) - f(x_1) - f(x_1) + f(x_0)]/[h(x_3 - x_0)]\}> / (x_3 - x_0)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τα h έχουμε:

$$h = x_1 – x_0$$
$$h = x_2 – x_1$$
$$h = x_3 – x_2$$

$$3h = x_3 – x_0$$

Επίσης γνωρίζουμε ήδη από το προηγούμενο ερώτημα ότι:

$$2h = x_2 – x_0 = x_3 – x_1$$

Συνεχίζοντας τις πράξεις έχουμε:

$$f[x_0,x_1,x_2,x_3] = <\{[f(x_3) - 2f(x_2) + f(x_1)] / 2h^2\} – \{[f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_0)] / 2h^2\}> / 3h \rightarrow$$

$$f[x_0,x_1,x_2,x_3] = [f(x_3) - 2f(x_2) + f(x_1) - f(x_2) + 2f(x_1) - f(x_0)] / 2h^2 / 3h \rightarrow$$

$$f[x_0,x_1,x_2,x_3] = [f(x_3) - 2f(x_2) + f(x_1) - f(x_2) + 2f(x_1) - f(x_0)] / 6h^3 \rightarrow$$

$$3!\ f[x_0,x_1,x_2,x_3] = [f(x_3) - 3f(x_2) + 3f(x_1) - f(x_0)] / h^3$$ **Απεδείχθη.**

Άσκηση 3.2.2

Ερώτημα i

Τα δεδομένα μας είναι τα παρακάτω:

i	x_i	y_i
1	0,5	1,235
2	0,15	1,75
3	0,25	2,02
4	0,4	-1,55
5	0,55	-2,345
6	0,7	0,435

Για να μπορέσουμε να βρούμε το πολυώνυμο πρώτου βαθμού που προσεγγίζει τα σημεία μας θα πρέπει να φτιάξουμε τον ακόλουθο πίνακα:

i	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2
1	0,5	1,235	0,6175	0,25
2	0,15	1,75	0,2625	0,0225
3	0,25	2,02	0,505	0,0625
4	0,4	-1,55	-0,62	0,16
5	0,55	-2,345	-1,28975	0,3025
6	0,7	0,435	0,3045	0,49
Σύνολο	2,55	1,545	-0,22025	1,2875

Έτσι, χρησιμοποιώντας τον τύπο $a = \dfrac{n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$

και $b = \dfrac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)}{n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$ έχουμε

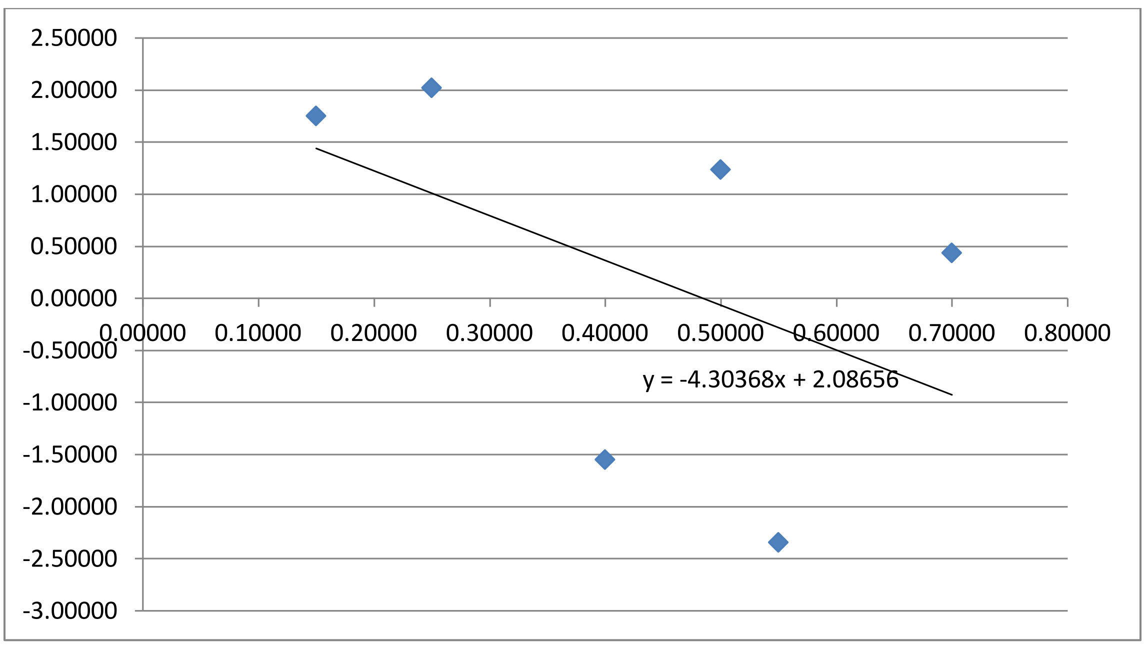
$$\alpha = \frac{6(-0{,}22025) - (2{,}55 * 1{,}545)}{6(1{,}2875) - 2{,}55^2} = \frac{-5{,}26125}{1{,}2225} = -4{,}30368$$

$$\beta = \frac{[1{,}2875 * 1{,}545] - [(-0{,}22025)(2{,}55)]}{6 * 1{,}2875 - 2{,}55^2} = 2{,}08656$$

Άρα η εξίσωσή μας είναι:

$$P(x) = -4{,}30368x + 2{,}08656$$

Επιβεβαιώνοντας βάσει του excel έχουμε:



Για να μπορέσουμε να βρούμε το πολυώνυμο δευτέρου βαθμού που προσεγγίζει τα σημεία μας θα πρέπει να φτιάξουμε τον ακόλουθο πίνακα:

i	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i^2 y$
1	0,50000	1,23500	0,61750	0,25000	0,12500	0,06250	0,30875
2	0,15000	1,75000	0,26250	0,02250	0,00338	0,00051	0,03938
3	0,25000	2,02000	0,50500	0,06250	0,01563	0,00391	0,12625
4	0,40000	-1,55000	-0,62000	0,16000	0,06400	0,02560	-0,24800
5	0,55000	-2,34500	-1,28975	0,30250	0,16638	0,09151	-0,70936
6	0,70000	0,43500	0,30450	0,49000	0,34300	0,24010	0,21315
Σύνολο	2,55000	1,54500	-0,22025	1,28750	0,71738	0,42412	-0,26984

Τροποποιώντας το σύστημα

$$
\begin{aligned}
a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i^0 + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^1 + \ldots + a_m \sum_{i=1}^{n} x_i^m &= \sum_{i=1}^{n} y_i\, x_i^0 \\
a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i^1 + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \ldots + a_m \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+1} &= \sum_{i=1}^{n} y_i\, x_i^1 \\
&\vdots \\
a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i^m + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+1} + \ldots + a_m \sum_{i=1}^{n} x_i^{2m} &= \sum_{i=1}^{n} y_i\, x_i^m
\end{aligned}
$$

έχουμε:

$$
\begin{aligned}
a_0 \sum_{i=1}^{6} x_i^0 + a_1 \sum_{i=1}^{6} x_i^1 + a_2 \sum_{i=1}^{6} x_i^2 &= \sum_{i=1}^{6} y_i\, x_i^0 \\
a_0 \sum_{i=1}^{6} x_i^1 + a_1 \sum_{i=1}^{6} x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^{6} x_i^3 &= \sum_{i=1}^{6} y_i\, x_i^1 \quad , \\
a_0 \sum_{i=1}^{6} x_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^{6} x_i^3 + a_2 \sum_{i=1}^{6} x_i^4 &= \sum_{i=1}^{6} y_i\, x_i^2 ,
\end{aligned}
$$

Άρα το σύστημα μας είναι το ακόλουθο:

$$6\alpha_0 + 2{,}55\alpha_1 + 1{,}2875\alpha_2 = 1{,}545$$
$$2{,}55\alpha_0 + 1{,}2875\alpha_1 + 0{,}71738\alpha_2 = -0{,}22025$$
$$1{,}2875\alpha_0 + 0{,}71738\alpha_1 + 0{,}42412\alpha_2 = -0{,}26984$$

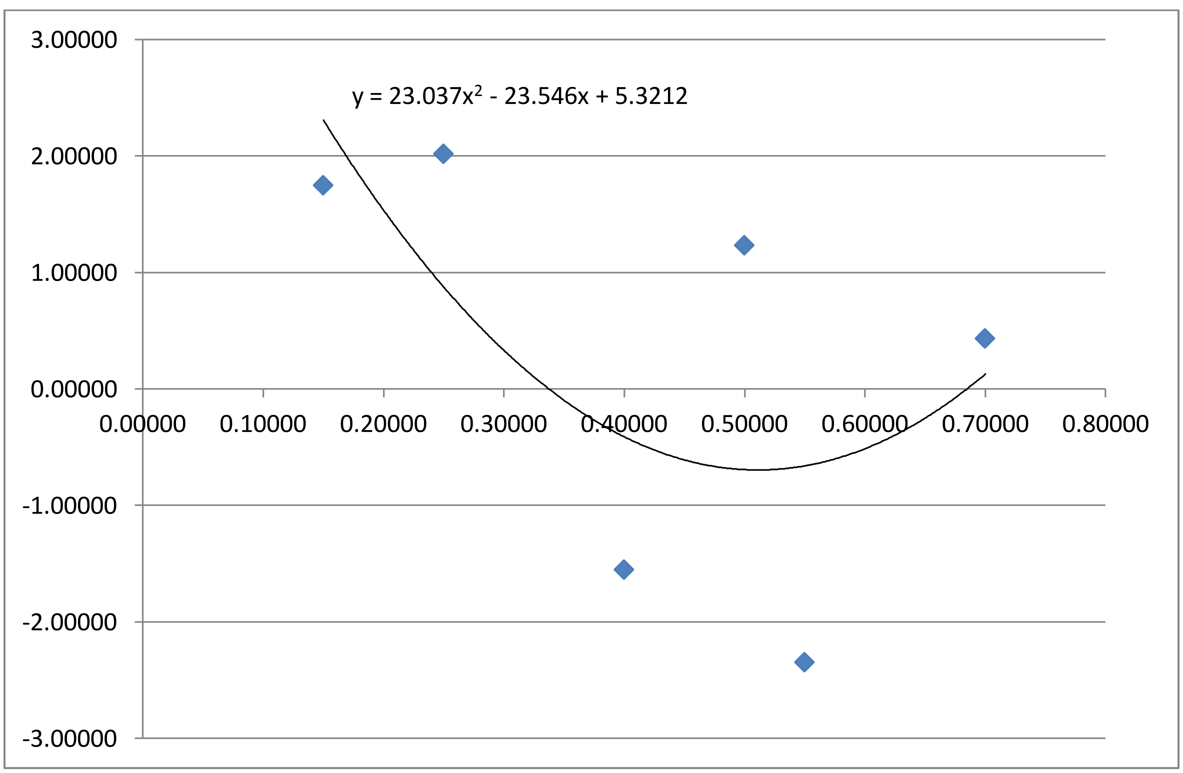
Λύνοντας το σύστημα λαμβάνουμε τα παρακάτω αποτελέσματα:

$$\alpha_0 = 5{,}32538$$
$$\alpha_1 = -23{,}57098$$
$$\alpha_2 = 23{,}06698$$

Άρα η εξίσωσή μας είναι:

$$P(x) = 23{,}06698x^2 - 23{,}57098x + 5{,}32538$$

Επιβεβαιώνοντας μέσω του excel έχουμε:



Εύρεση σφάλματος μεταξύ ελαχίστων τετραγώνων 1ου και 2ου βαθμού

Οι εξισώσεις μας είναι οι εξής:

$$f(x) = -4{,}30368x + 2{,}08656$$

και

$$g(x) = 23{,}06698x^2 – 23{,}57098x + 5{,}32538$$

Για να υπολογίσουμε το εμβαδό θα χρειαστεί να βρούμε τα ολοκληρώματά τους.

Έτσι έχουμε:

$$E_1 = \int_{0,15}^{0,7} -4{,}30368x + 2{,}08656 = {}_{0.15}^{0.7}[-2.15184x^2 + 2.08656x]$$

$$E_2 = \int_{0,15}^{0,7} 23{,}06698\mathrm{x}2 - 23{,}57098\mathrm{x} + 5{,}32538 = {}_{0.15}^{0.7}[7.68899x^3 - 11.7855x^2 + 5.32538x]$$

$$\rightarrow$$

$$E_1 = 0.14162$$

$$E_2 = 0.03061$$

Άρα:

$$e = |0{,}14162 – 0{,}03061| = 0{,}11101$$

Ερώτημα ii

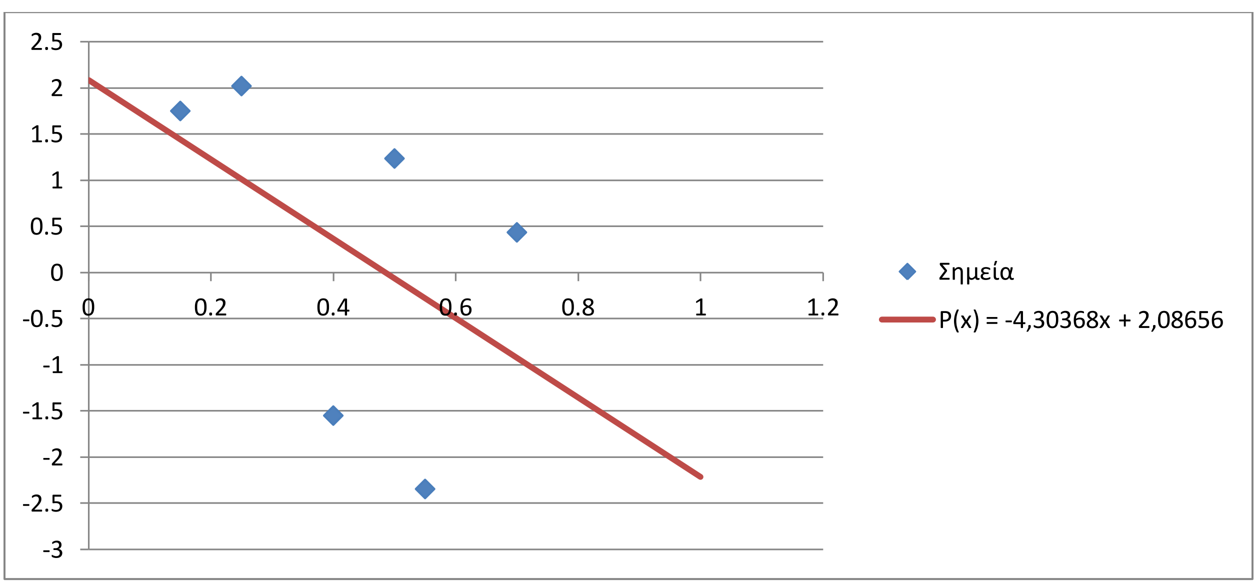
Τα σημεία μας είναι τα παρακάτω:

x	y
0,5	1,235
0,15	1,75
0,25	2,02
0,4	-1,55
0,55	-2,345
0,7	0,435

Για να απεικονίσουμε γραφικά την εξίσωση P(x) = -4,30368x + 2,08656 χρειαζόμαστε 2 σημεία επειδή είναι ευθεία. Έτσι έχουμε:

x	y
0	2,08656
1	-2,21712

Η γραφική παράσταση φαίνεται παρακάτω:



Άσκηση 3.3 - 1

Ερώτημα i

Οι κόμβοι μας είναι οι εξής:

$$x_0 = 0,\ x_1 = 0.3,\ x_2 = 0.6 \text{ και } x_3 = 1$$

Έχουμε:

$$f(x) = e^{-x^2},\ \text{άρα } f'(x) = -2xe^{-x^2}$$

Λόγω των παραπάνω:

$$f(0) = 1,\ f(0.3) = 0.91393,\ f(0.6) = 0.69768 \text{ και } f(1) = 0.36788$$

$$f'(0) = 0 \text{ και } f'(1) = -0.73576$$

Επειδή οι κόμβοι μας είναι 4 και θέλουμε να έχουμε κυβική Spline έχουμε:

$$n + 1 \Rightarrow m \rightarrow 5 > 3, \text{ που ισχύει.}$$

Η $s(x)$ λόγω του ότι $x\text{E}[x_0,x_3]$, με x_1, x_2 εσωτερικούς κόμβους θα έχει την μορφή:

$$s(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + c_1(x - x_1)^3 + c_2(x - x_2)^3$$

Με

$$(x - x_i)^3 = 0, \text{ αν } x < x_i$$

$$(x - x_i)^3 = (x - x_i)^3, \text{ αν } x >= x_i$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω έχουμε:

$$s(0) = b_0$$

$$s(0.3) = b_0 + 0.3b_1 + 0.3^2b_2$$

$$s(0.6) = b_0 + 0.6b_1 + 0.6^2b_2 + c_1(0.6 - 0.3)^3$$

$$s(1) = b_0 +b_1 + b_2 + c_1(1 - 0.3)^3 + c_2(1 - 0.6)^3$$

Παραγωγίζοντας την s(x) έχουμε:

$$s'(x) = b_1 + 2b_2x + 3b_3x^2 + 3c_1(x - x1)^2 + 3c_2(x - x2)^2$$

Άρα,

$$s'(0) = b1$$

$$s'(1) = b_1 + 2b_2 + 3b_3 + 3c_1(1 - 0.3)^2 + 3c_2(1 - 0.6)^2$$

Τα συστήματα που πρέπει να λύσουμε είναι τα παρακάτω:

$$1 = b_0$$

$$0,91393 = b_0 + 0.3b_1 + 0.3^2b_2$$

$$0,69768 = b_0 + 0.6b_1 + 0.6^2b_2 + c_1(0.6 - 0.3)^3$$

$$0,36788 = b_0 + b_1 + b_2 + c_1(1 - 0.3)^3 + c_2(1 - 0.6)^3$$

$$0 = b1$$

$$-0,73576 = b_1 + 2b_2 + 3b_3 + 3c_1(1 - 0.3)^2 + 3c_2(1 - 0.6)^2$$

Λύνοντας τα έχουμε:

$$b_0 = 1$$

$$b_1 = 0$$

$$b_2 = -1.04455$$

$$b_3 = 0.29405$$

$$c_1 = 0.37778$$

$$c_2 = -0.175$$

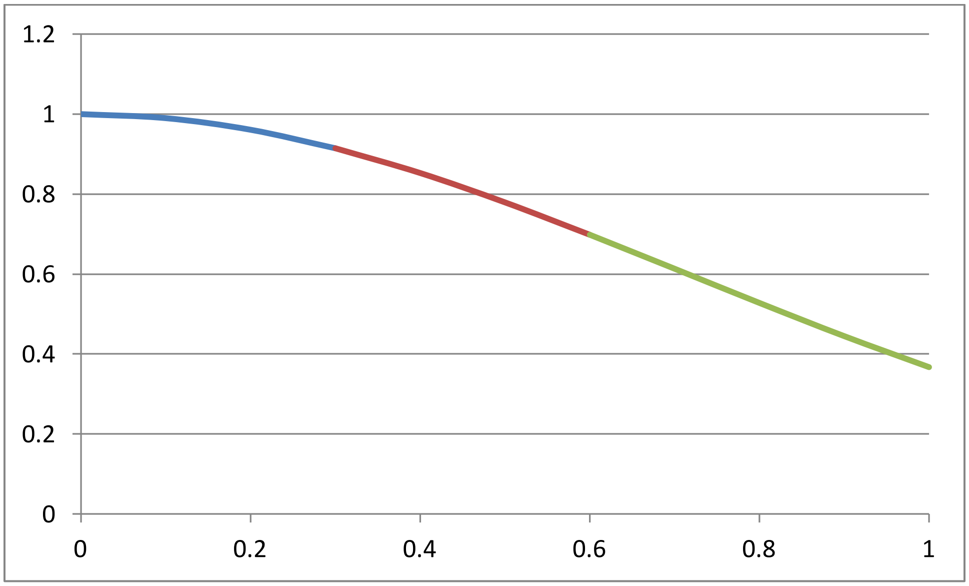
Άρα οι εξισώσεις που περιγράφουν την Spline είναι:

$$s(x) = 1 - 1.04455x^2 + 0.29405x^3, \mathbf{0 <= x < 0.3}$$

$$s(x) = 1 - 1.04455x^2 + 0.29405x^3 + 0.37778(x - 0.3)^3, \mathbf{0.3 <= x < 0.6}$$

$$s(x) = 1 - 1.04455x^2 + 0.29405x^3 + 0.37778(x - 0.3)^3 - 0.175(x - 0.6)^3, \mathbf{0.6 <= x < 1}$$

Η γραφική παράσταση φαίνεται παρακάτω:



Όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε η καμπύλη που περνάει από τα σημεία μας και η spline σχεδόν ταυτίζονται.

Άσκηση 3.3 - 1

Ερώτημα ii

Οι κόμβοι μας είναι οι εξής:

$$x_0 = 0,\ x_1 = 0.3,\ x_2 = 0.6 \text{ και } x_3 = 1$$

Έχουμε:

$$f(x) = e^{-x^2}, \text{ άρα}$$

$$f(0) = 1,\ f(0.3) = 0.91393,\ f(0.6) = 0.69768 \text{ και } f(1) = 0.36788$$

$$f'(0) = 0 \text{ και } f'(1) = -0.73576$$

Επειδή οι κόμβοι μας είναι 4 και θέλουμε να έχουμε κυβική Spline έχουμε:

$$n + 1 => m \rightarrow 5 > 3, \text{ που ισχύει.}$$

Η s(x) λόγω επειδή είναι φυσική θα έχει την μορφή:

$$s(x) = b_0 + b_1x + c_0(x - x_0)^3 + c_1(x - x_1)^3 + c_2(x - x_2)^3 + c_3(x - x_3)^3, \text{ με}$$

$$(x - x_i)^3 = 0, \text{ αν } x < x_i$$

$$(x - x_i)^3 = (x - x_i)^3, \text{ αν } x >= x_i$$

Λόγω των παραπάνω:

$$s(0) = b_0$$

$$s(0.3) = b_0 + 0.3b1 + 0.3^3c_0$$

$$s(0.6) = b_0 + 0.6b1 + 0.6^3c_0 + 0.3^3c_1$$

$$s(1) = b_0 + b1 + c_0 + 0.7^3c_1 + 0.4^3c_2$$

Επίσης θα πρέπει να ισχύει:

$$c_0 + c_1 + c_2 + c_3 = 0$$

$$c_0x_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = 0$$

Τα συστήματα που έχουμε να λύσουμε είναι τα παρακάτω:

$$1 = b_0$$

$$0,91393 = b_0 + 0.3b1 + 0.3^3c_0$$

$$0,69768 = b_0 + 0.6b1 + 0.6^3c_0 + 0.3^3c_1$$

$$0,36788 = b_0 + b1 + c_0 + 0.7^3c_1 + 0.4^3c_2$$

$$c_0 + c_1 + c_2 + c_3 = 0$$

$$0,3c_1 + 0,6c_2 + c_3 = 0$$

Λύνοντας τα έχουμε:

$$c_0 = -2.43056$$

$$c_1 = 9.76188$$

$$c_2 = -23.15208$$

$$c_3 = 15.82076$$

$$b_0 = 1$$

$$b_1 = -0.06815$$

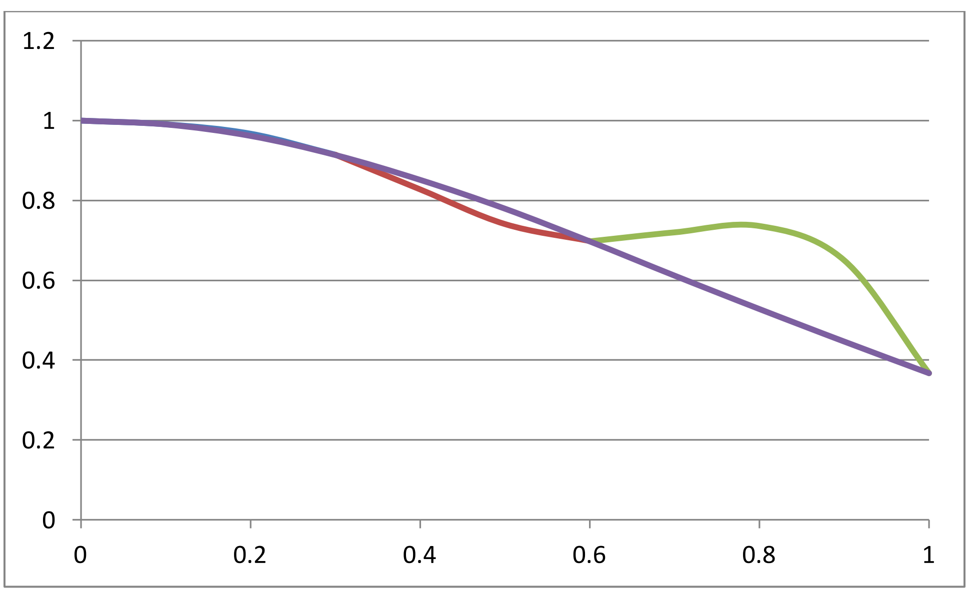
Άρα η εξίσωση της φυσικής Spline είναι:

$$s(x) = 1 - 0.06815x - 2.43056(x)^3, \mathbf{0 <= x < 0.3}$$

$$s(x) = 1 - 0.06815x - 2.43056(x)^3 + 9.76188(x - 0.3)^3, \mathbf{0.3 <= x < 0.6}$$

$$s(x) = 1 - 0.06815x - 2.43056(x)^3 + 9.76188(x - 0.3)^3 - 23.15208(x - 0.6)^3, \mathbf{0.6 <= x < 1}$$

Η γραφική παράσταση φαίνεται παρακάτω:



Όπως διαπιστώνουμε η φυσική spline δεν ταυτίζεται με την αρχική μας καμπύλη.