ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΡΓΑΣΙΑ 4η: Προσέγγιση παραγώγων και ολοκληρωμάτων

ΣΤΑΣΙΝΟΠΟΥΛΟΣ ΦΙΛΙΠΠΟΣ (12097)

5/1/2014

Άσκηση 1η

Πρώτα απ' όλα για την 1ης τάξης παράγωγο της συνάρτησης $\boldsymbol{f(x) = \ln(1 + x^2)}$ γνωρίζουμε ότι:

$$\boldsymbol{f'(x) \cong \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\ln[1 + (x+h)^2] - \ln(1 + x^2)}{h}}$$

Οπότε για **x=e** και **h=0.1** έχουμε ότι:

$$\boldsymbol{f'(e)} \cong \frac{\ln[1 + (e + 0.1)^2] - \ln(1 + e^2)}{0.1} \cong \frac{\ln(8.942712465) - \ln(8.389056099)}{0.1}$$
$$\cong \frac{0.06391094}{0.1} \cong \boldsymbol{0.639109}$$

Επιπλέον για **x=e** και **h=0.01** έχουμε ότι:

$$\boldsymbol{f'(e)} \cong \frac{\ln[1 + (e + 0.01)^2] - \ln(1 + e^2)}{0.01} \cong \frac{\ln(8.44352174) - \ln(8.389056099)}{0.01}$$
$$\cong \frac{0.00647148}{0.01} \cong \boldsymbol{0.647148}$$

Τέλος η θεωρητική τιμή της 1ης τάξης παράγωγος υπολογίζεται παρακάτω:

$$\boldsymbol{f'(x) = [\ln(1 + x^2)]' = \frac{2x}{1 + x^2}}$$

Οπότε για **x=e** έχουμε ότι:

$$\boldsymbol{f'(e)} = \frac{2e}{1 + e^2} = \frac{5.436563657}{8.389056099} = \boldsymbol{0.648054}$$

Συμπεραίνουμε ότι η τιμή της 1ης τάξης παραγώγου με h=0.01 είναι κοντύτερα στη θεωρητική τιμή $f'(e) = 0.648054$ διότι το h τείνει στο μηδέν και το 0.01 είναι πλησιέστερο στο μηδέν από το 0.1 .

Στη συνέχεια για την 2ης τάξης παράγωγο της συνάρτησης $\boldsymbol{f(x) = \ln(1 + x^2)}$ γνωρίζουμε ότι:

$$\boldsymbol{f''(x) \cong \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}}$$

$$\boldsymbol{= \frac{\ln[1 + (x+h)^2] - 2\ln(1 + x^2) + \ln[1 + (x-h)^2]}{h^2}}$$

Άρα για **x=e** και **h=0.1** έχουμε ότι:

$$\boldsymbol{f''(e)} \cong \frac{\ln[1 + (e + 0.1)^2] - 2\ln(1 + e^2) + \ln[1 + (e - 0.1)^2]}{(0.1)^2}$$

$$\cong \frac{\ln(8.942712465) - 2\ln(8.389056099) + \ln(7.855399733)}{0.01}$$

$$\cong \frac{-0.001815912}{0.01} \cong \boldsymbol{-0.181591}$$

Επίσης για **x=e** και **h=0.01** έχουμε ότι:

$$\boldsymbol{f''(e)} \cong \frac{\ln[1 + (e + 0.01)^2] - 2\ln(1 + e^2) + \ln[1 + (e - 0.01)^2]}{(0.01)^2}$$

$$\cong \frac{\ln(8.443521735) - 2\ln(8.389056099) + \ln(8.334790462)}{0.0001}$$

$$\cong \frac{-0.00001815664534}{0.0001} \cong \boldsymbol{-0.181567}$$

Τέλος η θεωρητική τιμή της 2ης τάξης παραγώγου υπολογίζεται παρακάτω:

$$\boldsymbol{f''(x) = \left(\frac{2x}{1 + x^2}\right)' = \frac{2 - 2x^2}{(1 + x^2)^2}}$$

Οπότε για **x=e** έχουμε ότι:

$$\boldsymbol{f''(e)} = \frac{2 - 2e^2}{(1 + e^2)^2} = \frac{-12.7781122}{70.37626223} = \boldsymbol{-0.181569}$$

Συμπεραίνουμε ότι η τιμή της 2ης τάξης παραγώγου με h=0.01 είναι κοντύτερα στη θεωρητική τιμή $f''(e) = -0.181569$ διότι το h τείνει στο μηδέν και το 0.01 είναι πλησιέστερο στο μηδέν από το 0.1 .

Άσκηση 2η

Αρχικά από τον τύπο τουTaylor γνωρίζουμε ότι:

$$\boldsymbol{f(x+h) \cong f(x) + \frac{h}{1!}f'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \frac{h^4}{4!}f''''(x)}$$

Οπότε έχουμε ότι:

$$\boldsymbol{y[t,h] = y + hy' + \frac{h^2y''}{2} + \frac{h^3y^2}{6} + \frac{h^4y^4}{24}}$$

Άρα τώρα αντικαθιστούμε όπου **h** το **-2h**:

$$\boldsymbol{y[t,-2h] = y - \frac{4h^3y^2}{3} + \frac{2h^4y^4}{3} - 2hy' + 2h^2y''}$$

Επιπλέον αντικαθιστούμε όπου **h** το **-h**, άρα έχουμε ότι:

$$y[t,-h] = y - \frac{h^3y^2}{6} + \frac{h^4y^4}{24} - hy' + \frac{h^2y''}{2}$$

Στη συνέχεια έχουμε ότι:

$$y[t,h] = y + \frac{h^3y^2}{6} + \frac{h^4y^4}{24} + hy' + \frac{h^2y''}{2}$$

και

$$y[t,2h] = y + \frac{4h^3y^2}{3} + \frac{2h^4y^4}{3} + 2hy' + 2h^2y''$$

Οπότε αν απλοποιήσουμε έχουμε ότι:

$$(y[t,-2h] - 4y[t,-h] + 6y - 4y[t,h] + y[t,2h]) = h^4y^4$$

Τέλος έχουμε ότι:

$$\boldsymbol{y^4 = \frac{(y[t,-2h] - 4y[t,-h] + 6y - 4y[t,h] + y[t,2h])}{h^4}}$$

Άσκηση 3η

Πρώτα απ' όλα για να λυθεί το ολοκλήρωμα $\boldsymbol{I = \int_0^{0.6} \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx}$ με τον κανόνα του Gauss-Seidel θα πρέπει πρώτα να μετατρέψουμε τα άκρα του ολοκληρώματος δηλαδή από **0** έως **0.6** να γίνουν από **-1** έως **1** αντίστοιχα.

Άρα έχουμε ότι:

$$\boldsymbol{I = \int_0^{0.6} \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int_{-1}^{1} \frac{0.3(0.3t+0.3)^2}{\sqrt{1+(0.3t+0.3)^2}} dt}$$

Επίσης έχουμε:

$$\boldsymbol{w(t) = \frac{0.3(0.3t+0.3)^2}{\sqrt{1+(0.3t+0.3)^2}}}$$

Οπότε για **5 σημεία** έχουμε ότι οι ρίζες **ti** και τα βάρη **wi** είναι:

ti	wi	$\boldsymbol{\mathrm{wi}*\frac{0.3(0.3ti+0.3)^2}{\sqrt{1+(0.3ti+0.3)^2}}}$
-0.906180	0.236927	0.0000562856
-0.538469	0.478629	0.0027267229
0	0.568889	0.0147122146
0.538469	0.478629	0.0277719468
0.906180	0.236927	0.0201775250

Άρα έχουμε ότι:

$$\boldsymbol{\int_{-1}^{1} \frac{0.3(0.3t+0.3)^2}{\sqrt{1+(0.3t+0.3)^2}} dt} \cong \sum_1^5 \left(\mathrm{wi} * \frac{0.3(0.3ti+0.3)^2}{\sqrt{1+(0.3ti+0.3)^2}} \right) \cong \boldsymbol{0.06544470}$$

Όμοια για **6 σημεία** έχουμε ότι:

ti	wi	$\boldsymbol{\mathrm{wi}*\frac{0.3(0.3ti+0.3)^2}{\sqrt{1+(0.3ti+0.3)^2}}}$
-0.932470	0.171325	0.0000210906
-0.661209	0.360762	0.0011122864
-0.238619	0.467914	0.0071398696
0.238619	0.467914	0.0181685245
0.661209	0.360762	0.0240581508
0.932470	0.171325	0.0149448171

Οπότε έχουμε ότι:

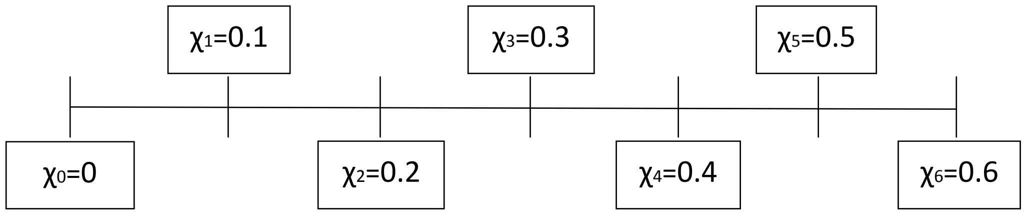
$$\boldsymbol{\int_{-1}^{1} \frac{0.3(0.3t+0.3)^2}{\sqrt{1+(0.3t+0.3)^2}} dt} \cong \sum_1^6 \left(\mathrm{wi} * \frac{0.3(0.3ti+0.3)^2}{\sqrt{1+(0.3ti+0.3)^2}} \right) \cong \boldsymbol{0.06544474}$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το πρώτο αποτέλεσμα, δηλαδη για 5 σημεία, είναι πιο κοντά στη θεωρητική τιμή $\boldsymbol{I \cong 0.06544467}$ από το αποτέλεσμα των 6 σημείων.

Στη συνέχεια για να λύσουμε το ολοκλήρωμα $\boldsymbol{I = \int_0^{0.6} \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx}$ με τους σύνθετους κανόνες του τραπεζίου, Simpson και 3/8 του Simpson θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την παρακάτω εξίσωση:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}$$

Οπότε για 6 σημεία όταν το **h=0.1** έχουμε ότι:



xi	f(xi)
0	0
0.1	0.0099503719
0.2	0.0392232270
0.3	0.0862043657
0.4	0.1485562705
0.5	0.2236067977
0.6	0.3086974533

Άρα τώρα μπορούμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα με τους σύνθετους κανόνες του τραπεζίου, Simpson και 3/8 του Simpson.

ΣΥΝΘΕΤΟΣ ΚΑΝΟΝΑΣ ΤΡΑΠΕΖΙΟΥ

Αρχικά έχουμε ότι ο τύπος του σύνθετου κανόνα του Τραπεζίου είναι ίσος με:

$$\boldsymbol{I \cong \frac{h}{2}\{f(x_0) + f(x_1)\} + \frac{h}{2}\{f(x_1) + f(x_2)\} + \frac{h}{2}\{f(x_2) + f(x_3)\}}$$
$$\boldsymbol{+ \frac{h}{2}\{f(x_3) + f(x_4)\} + \frac{h}{2}\{f(x_4) + f(x_5)\} + \frac{h}{2}\{f(x_5) + f(x_6)\}}$$

Σύμφωνα με τον παραπάνω τύπο έχουμε:

$$\boldsymbol{I} \cong 0.000497518595 + 0.002458679945 + 0.006271379635 + 0.01173803181$$
$$+ 0.01860815341 + 0.02661521255 \cong \boldsymbol{0.06618898}$$

ΣΥΝΘΕΤΟΣ ΚΑΝΟΝΑΣ SIMPSON

Επιπλέον ο τύπος του σύνθετου κανόνα του Simpson είναι ίσος με:

$$\boldsymbol{I \cong \frac{h}{3}\{f(x_0) + 4[f(x_1) + f(x_3) + f(x_5)] + 2[f(x_2) + f(x_4)] + f(x_6)\}}$$

Οπότε έχουμε:

$$I \cong \frac{0.1}{3}\{1.279046141 + 0.375558995 + 0.3086974533\} \cong \mathbf{0.06544342}$$

ΣΥΝΘΕΤΟΣ ΚΑΝΟΝΑΣ 3/8 ΤΟΥ SIMPSON

Τέλος ο τύπος του σύνθετου κανόνα των 3/8 του Simpson εμφανίζεται παρακάτω:

$$\boldsymbol{I \cong \frac{3h}{8}\{f(x_0) + 3[f(x_1) + f(x_4)] + 3[f(x_2) + f(x_5)] + 2[f(x_3)] + f(x_6)\}}$$

Σύμφωνα με τον παραπάνω τύπο έχουμε ότι:

$$I \cong \frac{0.3}{8}\{0.4755199272 + 0.7884900741 + 0.1724087314 + 0.3086974533\}$$
$$\cong \mathbf{0.06544186}$$

Τέλος βλέπουμε ότι ο σύνθετος κανόνας του Simpson πλησιάζει περισσότερο την θεωρητική τιμή $\boldsymbol{I \cong 0.06544467}$ από τους άλλους δύο σύνθετους κανόνες, των 3/8 του Simpson και του Τραπεζίου.