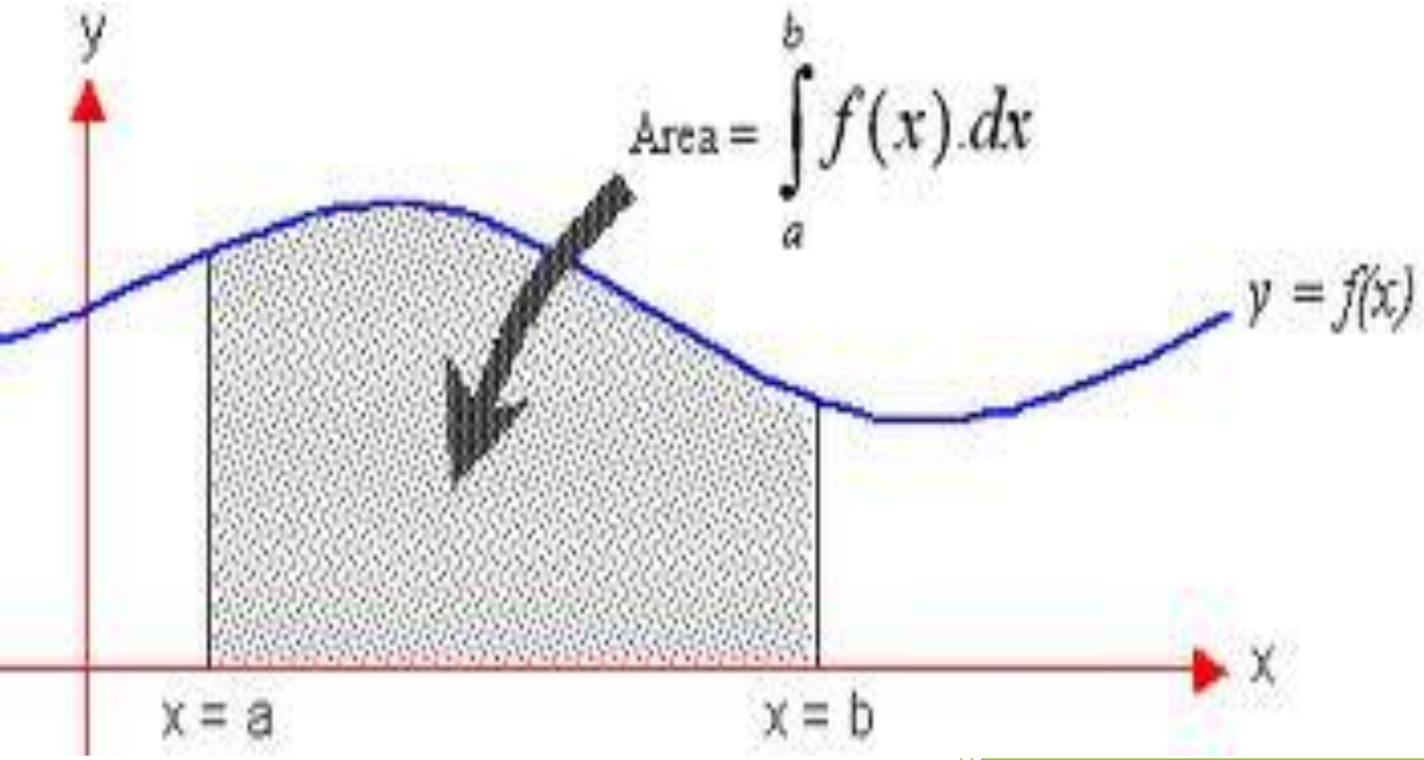
ΤΕΙ ΑΘΗΝΑΣ ΤΜΗΜΑ ΝΑΥΠΗΓΙΚΗΣ

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά 5η εργαστηριακή άσκηση



ΧΑΤΖΗΓΕΩΡΓΙΟΥ ΑΝΤΩΝΗΣ

Α.Μ. 09036 Εξάμηνο ΠΤΧ

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ:

ΔΡ. ΜΠΡΑΤΣΟΣ ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ

Περιεχόμενα

1. Προσέγγιση ολοκληρωμάτων.

Κατά την 1η άσκηση της 5ης εργαστηριακής εργασίας, μας δίνεται το παρακάτω ολοκλήρωμα:

$$I = \int_0^{0.6} \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+x^2}} \qquad \mathbf{1.1.1}$$

Καθώς η συνάρτηση μέσα στο ολοκλήρωμα είναι πολύπλοκη, για την επίλυσή της, θα χρησιμοποιηθεί ο κανόνας του Gauss-Seidel για 6 σημεία, καθώς επίσης οι σύνθετοι κανόνες του τραπεζίου, του Simpson και των 3/8 του Simpson, όταν h=0.1. Στην συνέχεια, θα γίνει σύγκριση με την θεωρητική τιμή, οποία είναι:

$$I = \int_0^{0.6} \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+x^2}} =$$

$$\left(\frac{1}{3}(0.6^2-2)\sqrt{1+0.6^2}\right) - \left(\frac{1}{3}(0^2-2)\sqrt{1+0^2}\right) \approx 0.02914926$$

1.1 Άσκηση 1η

1.1.1 Κανόνας του Gauss-Seidel για 6 σημεία.

Κατά τον κανόνα του gauss-Seidel, το διάστημα ολοκλήρωσης πρέπει να είναι υποχρεωτικά [-1 , 1]. Σε αντίθετη περίπτωση, με την βοήθεια του τύπου 1.2 και 1.3 γίνεται μετασχηματισμός της συνάρτησης, ώστε να συμμορφώνεται με την παραπάνω απαίτηση.

$$x = \frac{(b-a)}{2}t + \frac{b+a}{2} \qquad \mathbf{1.1.2}$$

$$dx = \frac{b-a}{2}dt \qquad \mathbf{1.1.3}$$

Η δοσμένη συνάρτηση έχει όρια διαστήματος [0 , 0.6]. Συνεπώς, πρέπει να γίνει μετασχηματισμός.

$$x = \frac{(0.6-0)t}{2} + \frac{0.6+0}{2} = 0.3t + 0.3$$

$$dx = \frac{0.6 - 0}{2} dt = 0.3dt$$

Άρα ο αρχικός τύπος 1.1 μετασχηματίζεται:

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{(0.3t + 0.3)^3}{\sqrt{1 + (0.3t + 0.3)^2}} 0.3dt =>$$

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{0.3(0.3t + 0.3)^3}{\sqrt{1 + (0.3t + 0.3)^2}} dt = \int_{-1}^{1} g(x)dx \qquad \mathbf{1.1.4}$$

Έχοντας πλέον τον μετασχηματισμένο τύπο της ολοκλήρωσης, καθώς επίσης και τα διαστήματα x_i και τα βάρη w_i (τα διαστήματα και τα βάρη δίδονται από πίνακα, και είναι συγκεκριμένα, για 6 σημεία), δημιουργήθηκε ο πίνακας 1.

xi	wi	g(x)	wi*g(x)
-0,9324695	0,17132449	2,494E-06	4,27283E-07
-0,6612094	0,36076157	0,0003134	0,000113049
-0,2386192	0,46791396	0,0034854	0,001630847
0,23861919	0,46791396	0,0144282	0,006751166
0,66120939	0,36076157	0,0332344	0,011989679
0,9324695	0,17132449	0,0505712	0,008664091
		Σ	0,02914926

Πίνακας 1 Πίνακας υπολογισμού με την μέθοδο Gauss-Seidel

Όπως φαίνεται και στον πίνακα 1, το αποτέλεσμα της ολοκληρωτέας συνάρτησης είναι:

$$\boldsymbol{I = 0.02914926}$$

Το απόλυτο σφάλμα είναι:

$$\boldsymbol{e = |0.02914926 - 0.02914926| = 0}$$

Στην συνέχεια, το ολοκλήρωμα 1.1 θα το υπολογίσω με τους σύνθετους κανόνες του τραπεζίου, του Simpson και των 3/8 του Simpson, όταν h=0.1

1.1.2 Σύνθετος κανόνας τραπεζίου

Στην συνέχεια θα υπολογιστεί το ολοκλήρωμα 1.1 με την τον σύνθετο κανόνα τραπεζίου.

Ο γενικός τύπος του σύνθετου κανόνα τραπεζίου για 6 σημεία είναι ο παρακάτω:

$$I \approx \frac{h}{2}\{f(x_0) + 2[f(x_1) + \ldots + f(x_5)] + f(x_6)\} \qquad \mathbf{1.1.5}$$

Όπως αναφέρθηκε στην αρχή, η ισαπόσταση είναι h=0.1

Επίσης, με βάση τον τύπο 1.1 για τον υπολογισμό των $f(x_i)$, δημιουργήθηκε ο παρακάτω πίνακας:

xi	f(xi)
0	0
0,1	0,000995037
0,2	0,007844645
0,3	0,02586131
0,4	0,059422508
0,5	0,111803399
0,6	0,185218472

Πίνακας 2 Υπολογισμός των $f(x_i)$ για κάθε xi

Έτσι λοιπόν έχοντας τα παραπάνω το τύπος 1.5 παίρνει την παρακάτω μορφή:

$$I \approx \frac{h}{2}\{f(x_0) + 2[f(x_1) + \ldots + f(x_5)] + f(x_6)\} =>$$

$$=> I \approx \frac{0.1}{2}\{0 + 2[0.000995 + 0.007845 + 0.025861 + 0.059423 + 0.111803] + 0.185218\} =>$$

$$\boldsymbol{I \approx 0.029853614}$$

Το σφάλμα είναι:

$$\boldsymbol{e = |0.02914926 - 0.029853614| = 0.00070435}$$

1.1.3 Σύνθετος κανόνας Simpson

Η επόμενη κίνηση είναι να γίνει υπολογισμός με χρήση του σύνθετου κανόνα του Simpson.

Στον κανόνα του Simpson η έκφραση του τύπου για 6 σημεία είναι:

$$I \approx \frac{h}{3}\{f(x_0) + 4[f(x_1) + f(x_3) + f(x_5)] + 2[f(x_2) + f(x_4)] + f(x_6)\} \qquad \mathbf{1.1.6}$$

Τα $f(x_i)$ είναι ήδη υπολογισμένα από τον πίνακα 2. Έτσι λοιπόν ο τύπος 1.6 γίνεται:

$$I \approx \frac{0.1}{3}\{0 + 4[0.000995 + 0.025861 + 0.111803] + 2[0.007845 + 0.059423] + 0.185218\} =>$$

$$\boldsymbol{I \approx 0.02914639}$$

Το σφάλμα είναι:

$$\boldsymbol{e = |0.02914926 - 0.02914639| = 2.86758 * 10^{-6}}$$

1.1.4 Σύνθετος κανόνας 3/8 Simpson

Αμέσως μετά γίνεται υπολογισμός με τον κανόνα των 3/8 του Simpson.

Σε αυτή την περίπτωση ο σύνθετος κανόνας έχει την παρακάτω μορφή:

$$I = \frac{3h}{8}\{f(x_0) + 3[f(x_1) + f(x_4)] + 3[f(x_2) + f(x_5)] + 2f(x_3) + f(x_6)\} \qquad \mathbf{1.1.7}$$

Τα $f(x_i)$ όπως ανέφερα και στην παραπάνω μέθοδο είναι ήδη υπολογισμένα και φαίνονται στον πίνακα 2. Άρα, ο παραπάνω τύπος γίνεται:

$$I \approx \frac{3 * 0.1}{8}\{0 + 3[0.000995 + 0.059423] + 3[0.007845 + 0.111803] + 2 * 0.025861 + 0.185218\} =>$$

$$\boldsymbol{I \approx 0.02914267}$$

Το σφάλμα είναι:

$$\boldsymbol{e = |0.02914926 - 0.02914267| = 6.58989 * 10^{-6}}$$

Όπως παρατηρούμε, ασφαλώς το μικρότερο σφάλμα σε όλες τις παραπάνω μεθόδους, είναι η μέθοδος των Gauss-Seidel.

Το μεγαλύτερο σφάλμα, όπως ήταν αναμενόμενο είναι στον κανόνα τραπεζίου. Κανονικά, περίμενα, πως ο κανόνας των 3/8 του Simpson, θα είχε μικρότερο σφάλμα από αυτό του 1ου κανόνα του Simpson. Σε αυτή την περίπτωση, έτυχε να έχει λίγο μεγαλύτερο. Μικρή η διαφορά.

1.2 Άσκηση 2η

1.2.1 Αριθμητική επίλυση με σπάσιμο του ολοκληρώματος

Το ολοκλήρωμα 1.1 μπορεί να γραφτεί:

$$I = \int_0^{0.6} \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+x^2}} =$$

$$= \int_0^{0.1} \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+x^2}} + \int_0^{0.2} \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+x^2}} + \ldots + \int_0^{0.6} \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+x^2}} \qquad \mathbf{1.2.1}$$

Σε αυτή την άσκηση, καλούμαι να λύσω το κάθε ένα από τα παραπάνω σπασμένα ολοκληρώματα, με την μέθοδο Gauss-Seidel για 6 σημεία, και στην συνέχεια να κάνω σύγκριση του αποτελέσματος με τον αντίστοιχο του 1ου ερωτήματος.

1.2.1.1 Διάστημα [0 , 0.1].

Όπως ανέφερα στο 1ο ερώτημα, πρέπει να κάνω μετασχηματισμό στον τύπο, για να είναι τα όρια του διαστήματος ολοκλήρωσης [-1 , 1].

Έτσι λοιπόν, το πρώτο ολοκλήρωμα του παραπάνω σπασμένου ολοκληρώματος έχει όρια [0 , 0.1]. Γίνεται ο παρακάτω μετασχηματισμός:

$$x = \frac{(0.1-0)t}{2} + \frac{0.1+0}{2} = 0.05t + 0.05$$

$$dx = \frac{0.1-0}{2} dt = 0.05dt$$

Άρα ο αρχικός τύπος 1.1 μετασχηματίζεται:

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{(0.05t+0.05)^3}{\sqrt{1+(0.05t+0.05)^2}} 0.05dt =>$$

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{0.05(0.05t + 0.05)^3}{\sqrt{1 + (0.05t + 0.05)^2}} dt \qquad \mathbf{1.2.2}$$

Για το διάστημα [0 , 0.1] δημιουργήθηκε ο παρακάτω πίνακας:

xi	wi	g(x)	wi*g(x)
-0,93247	0,171324	1,92476E-09	3,29759E-10
-0,66121	0,360762	2,43003E-07	8,76662E-08
-0,23862	0,467914	2,75658E-06	1,28984E-06
0,238619	0,467914	1,18539E-05	5,54662E-06
0,661209	0,360762	2,85536E-05	1,0301E-05
0,93247	0,171324	4,48952E-05	7,69165E-06
		Σ	2,49171E-05

Πίνακας 3 Πίνακας υπολογισμού Gauss-Seidel για διάστημα [0 , 0.1]

$$\boldsymbol{I = 2.49171 * 10^{-5}}$$

1.2.1.2 Διάστημα [0.1 , 0.2].

Συνεχίζω τον μετασχηματισμό:

$$x = \frac{(0.2 - 0.1)t}{2} + \frac{0.2 + 0.1}{2} = 0.05t + 0.15$$

$$dx = \frac{0.2 - 0.1}{2} dt = 0.05dt$$

Άρα ο αρχικός τύπος 1.1 μετασχηματίζεται:

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{(0.05t + 0.15)^3}{\sqrt{1 + (0.05t + 0.15)^2}} 0.05dt =>$$

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{0.05(0.05t + 0.15)^3}{\sqrt{1 + (0.05t + 0.15)^2}} dt \qquad \mathbf{1.2.3}$$

Σύμφωνα με τον τύπο 1.2.3 δημιουργήθηκε ο παρακάτω πίνακας:

xi	wi	g(x)	wi*g(x)
-0,93247	0,171324	5,49449E-05	9,41E-06
-0,66121	0,360762	7,94154E-05	2,87E-05
-0,23862	0,467914	0,000130364	6,1E-05
0,238619	0,467914	0,000209575	9,81E-05
0,661209	0,360762	0,000301714	0,000109
0,93247	0,171324	0,00037294	6,39E-05
		Σ	0,00037

Πίνακας 4 Πίνακας υπολογισμού Gauss-Seidel για διάστημα [0.1 , 0.2]

$$\boldsymbol{I = 0.00037}$$

1.2.1.3 Διάστημα [0.2 , 0.3].

Μετασχηματίζω:

$$x = \frac{(0.3-0.2)t}{2} + \frac{0.3+0.2}{2} = 0.05t + 0.25$$

$$dx = \frac{0.3-0.2}{2}dt = 0.05dt$$

Άρα

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{(0.05t+0.25)^3}{\sqrt{1+(0.05t+0.25)^2}} 0.05dt =>$$

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{0.05(0.05t+0.25)^3}{\sqrt{1+(0.05t+0.25)^2}} dt \qquad \mathbf{1.2.4}$$

Σύμφωνα με τον τύπο 1.2.4 δημιουργήθηκε ο πίνακας 5:

xi	wi	g(x)	wi*g(x)
-0,93247	0,171324	0,000412165	7,06E-05
-0,66121	0,360762	0,000498884	0,00018
-0,23862	0,467914	0,000656308	0,000307
0,238619	0,467914	0,000869203	0,000407
0,661209	0,360762	0,001091116	0,000394
0,93247	0,171324	0,001251051	0,000214
		Σ	0,001572

Πίνακας 5 Πίνακας υπολογισμού Gauss-Seidel για διάστημα [0.2 , 0.3]

$$\boldsymbol{I = 0.001572}$$

1.2.1.4 Διάστημα [0.3 , 0.4].

Μετασχηματίζω:

$$x = \frac{(0.4-0.3)t}{2} + \frac{0.4+0.3}{2} = 0.05t + 0.35$$

$$dx = \frac{0.4-0.3}{2}dt = 0.05dt$$

Άρα

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{(0.05t+0.35)^3}{\sqrt{1+(0.05t+0.35)^2}} 0.05dt =>$$

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{0.05(0.05t+0.35)^3}{\sqrt{1+(0.05t+0.35)^2}} dt \qquad \mathbf{1.2.5}$$

Τα αποτελέσματα του τύπου 1.2.5 φαίνονται στον πίνακα 6:

xi	wi	g(x)	wi*g(x)
-0,93247	0,171324	0,001335971	0,000228885
-0,66121	0,360762	0,001517448	0,000547437
-0,23862	0,467914	0,001830151	0,000856353
0,238619	0,467914	0,002229036	0,001042997
0,661209	0,360762	0,002624463	0,000946805
0,93247	0,171324	0,002899882	0,000496821
		Σ	0,004119298

Πίνακας 6 Πίνακας υπολογισμού Gauss-Seidel για διάστημα [0.3 , 0.4]

$$\boldsymbol{I = 0.004119298}$$

1.2.1.5 Διάστημα [0.4 , 0.5].

Μετασχηματίζω:

$$x = \frac{(0.5-0.4)t}{2} + \frac{0.5+0.4}{2} = 0.05t + 0.45$$

$$dx = \frac{0.5-0.4}{2}dt = 0.05dt$$

Άρα

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{(0.05t+0.45)^3}{\sqrt{1+(0.05t+0.45)^2}} 0.05dt =>$$

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{0.05(0.05t+0.45)^3}{\sqrt{1+(0.05t+0.45)^2}} dt \qquad \mathbf{1.2.5}$$

xi	wi	g(x)	wi*g(x)
-0,93247	0,171324	0,003043447	0,000521
-0,66121	0,360762	0,003344915	0,001207
-0,23862	0,467914	0,003850144	0,001802
0,238619	0,467914	0,00447407	0,002093
0,661209	0,360762	0,00507495	0,001831
0,93247	0,171324	0,005485069	0,00094
		Σ	0,008394

Πίνακας 7 Πίνακας υπολογισμού Gauss-Seidel για διάστημα [0.4 , 0.5]

$$\boldsymbol{I = 0.008394}$$

1.2.1.6 Διάστημα [0.5 , 0.6].

Μετασχηματίζω:

$$x = \frac{(0.6-0.5)t}{2} + \frac{0.6+0.5}{2} = 0.05t + 0.55$$

$$dx = \frac{0.6-0.5}{2}dt = 0.05dt$$

Άρα

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{(0.05t+0.55)^3}{\sqrt{1+(0.05t+0.55)^2}} 0.05dt =>$$

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{0.05(0.05t + 0.55)^3}{\sqrt{1 + (0.05t + 0.55)^2}} dt \qquad \mathbf{1.2.5}$$

xi	wi	g(x)	wi*g(x)
-0,93247	0,171324	0,005696474	0,000976
-0,66121	0,360762	0,006135672	0,002214
-0,23862	0,467914	0,006859149	0,003209
0,238619	0,467914	0,007734451	0,003619
0,661209	0,360762	0,008561798	0,003089
0,93247	0,171324	0,009119009	0,001562
		Σ	0,014669

Πίνακας 8 Πίνακας υπολογισμού Gauss-Seidel για διάστημα [0.5 , 0.6]

$$\boldsymbol{I = 0.014669}$$

1.2.1.7 Τελικό αποτέλεσμα.

Όπως ανέφερα στην αρχή του κεφαλαίου, το ολοκλήρωμα 1.1 κάλλιστα μπορεί να σπάσει και να πάρει την μορφή του τύπου 1.2.1 . Δηλαδή:

$$\int_{0}^{0.1} \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+x^2}} + \int_{0}^{0.2} \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+x^2}} + \ldots + \int_{0}^{0.6} \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

Συνεπώς, το τελικό αποτέλεσμα λογικά πρέπει να είναι:

$$\boldsymbol{I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6} \qquad \mathbf{1.2.6}$$

Για την επαλήθευση του 1.2.6 μπήκαν όλα τα αποτελέσματα του σπασμένου ολοκληρώματος στον παρακάτω πίνακα και προστέθηκαν:

[0 , 0.1]	2,49171E-05
[0.1 , 0.2]	0,000369866
[0.2 , 0.3]	0,001572369
[0.3 , 0.4]	0,004119298
[0.4 , 0.5]	0,008393723
[0.5 , 0.6]	0,014669087
Σ	0,02914926

Το αποτέλεσμα όπως αναμενότανε, είναι ίδιο ακριβώς με του ερωτήματος 1.1.1

Δηλαδή, το τελικό αποτέλεσμα του ολοκληρώματος είναι:

$$\boldsymbol{I = 0.02914926}$$

1.2.2 Υπολογισμός της παραπάνω μεθόδου με την βοήθεια του Matlab.

Για την επίλυση της παραπάνω μεθόδου, δημιούργησα πρόγραμμα στο Matlab, που μπορεί να υπολογίσει την τελική τιμή, αρκεί να του δώσουμε τα σημεία, τα αρχικά άκρα ολοκλήρωσης, καθώς και τα βάρη.

Η function που έφτιαξα, παρουσιάζεται παρακάτω:

```
Function Gaussian_quadrature(x,w,a,b)
x=input('Matrix of x(i)=');
w=input('Matrix or weights w(i)=');
a=input('Lower limit of the integral  a=');
b=input('Upper limit of the interval  b=');
transdx=(b-a)/2;
n=length(x);
for i=1:n
transx(i)=(b-a)/2*x(i)+(b+a)/2;
g(i)=(transx(i).^3/(sqrt(1+transx(i).^2)))*transdx;
end
value=sum(w.*g)
end
```

Έχοντας δημιουργήσει την Function, παρακάτω γίνεται η παρουσίασή της, βήμα βήμα, όπως εμφανίζεται στο Command Window:

Command Window

```
>> Gaussian_quadrature
Matrix of x(i)=
```

Command Window

```
>> Gaussian_quadrature
Matrix of x(i)=[-0.9324695, -0.66120939, -0.23861919, 0.23861919, 0.66120939, 0.9324695]
Matrix or weights w(i)=
```

Command Window

```
>> Gaussian_quadrature
Matrix of x(i)=[-0.9324695, -0.66120939, -0.23861919, 0.23861919, 0.66120939, 0.9324695]
Matrix or weights w(i)=[0.17132449, 0.36076157, 0.46791396, 0.46791396, 0.36076157, 0.17132449]
Lower limit of the integral  a=
```

Command Window

```
>> Gaussian_quadrature
Matrix of x(i)=[-0.9324695, -0.66120939, -0.23861919, 0.23861919, 0.66120939, 0.9324695]
Matrix or weights w(i)=[0.17132449, 0.36076157, 0.46791396, 0.46791396, 0.36076157, 0.17132449]
Lower limit of the integral  a=0
Upper limit of the interval  b=0.6
```

Command Window

```
>> Gaussian_quadrature
Matrix of x(i)=[-0.9324695, -0.66120939, -0.23861919, 0.23861919, 0.66120939, 0.9324695]
Matrix or weights w(i)=[0.17132449, 0.36076157, 0.46791396, 0.46791396, 0.36076157, 0.17132449]
Lower limit of the integral  a=0
Upper limit of the interval  b=0.6

value =

   0.029149259654932

>>
```

Στην τελευταία εικόνα φαίνονται όλες οι εντολές καθώς επίσης και το αποτέλεσμα, που δεν είναι άλλο, από το αποτέλεσμα που βρήκα στην αριθμητική επίλυση, που τυχαίνει να είναι και το ίδιο με αυτό της θεωρητικής τιμής. Άρα, ασφαλώς και εδώ έχουμε μηδενικό σφάλμα.

Δηλαδή, όπως φαίνεται και στο Command Window

$$\boldsymbol{I = 0.029149259655}$$

1.3 Τελικά-Συγκριτικά αποτελέσματα.

Αποτελέσματα Άσκησης 1.1

Ερώτημα 1.1.1 με Gauss-Seidel

$$\boldsymbol{I = 0.02914926}$$

Σφάλμα

$$\boldsymbol{e = |0.02914926 - 0.02914926| = 0}$$

Ερώτημα 1.1.2 με σύνθετο κανόνα τραπεζίου

$$\boldsymbol{I \approx 0.029853614}$$

Σφάλμα

$$\boldsymbol{e = |0.02914926 - 0.029853614| = 0.00070435}$$

Ερώτημα 1.1.3 με σύνθετο κανόνα Simpson

$$\boldsymbol{I \approx 0.02914639}$$

Σφάλμα

$$\boldsymbol{e = |0.02914926 - 0.02914639| = 2.86758 * 10^{-6}}$$

Ερώτημα 1.1.4 με σύνθετο κανόνα Simpson 3/8

$$\boldsymbol{I \approx 0.02914267}$$

Σφάλμα

$$\boldsymbol{e = |0.02914926 - 0.02914267| = 6.58989 * 10^{-6}}$$

Αποτελέσματα Άσκησης 1.2

Τελικό 1.2.1.7

$$\boldsymbol{I = 0.02914926}$$