ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΑΤΤΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΒΙΟΪΑΤΡΙΚΗΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΡΟΜΠΟΤΙΚΗ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΣΤΙΣ 2 ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ

Π. ΑΣΒΕΣΤΑΣ

Αναπληρωτής Καθηγητής

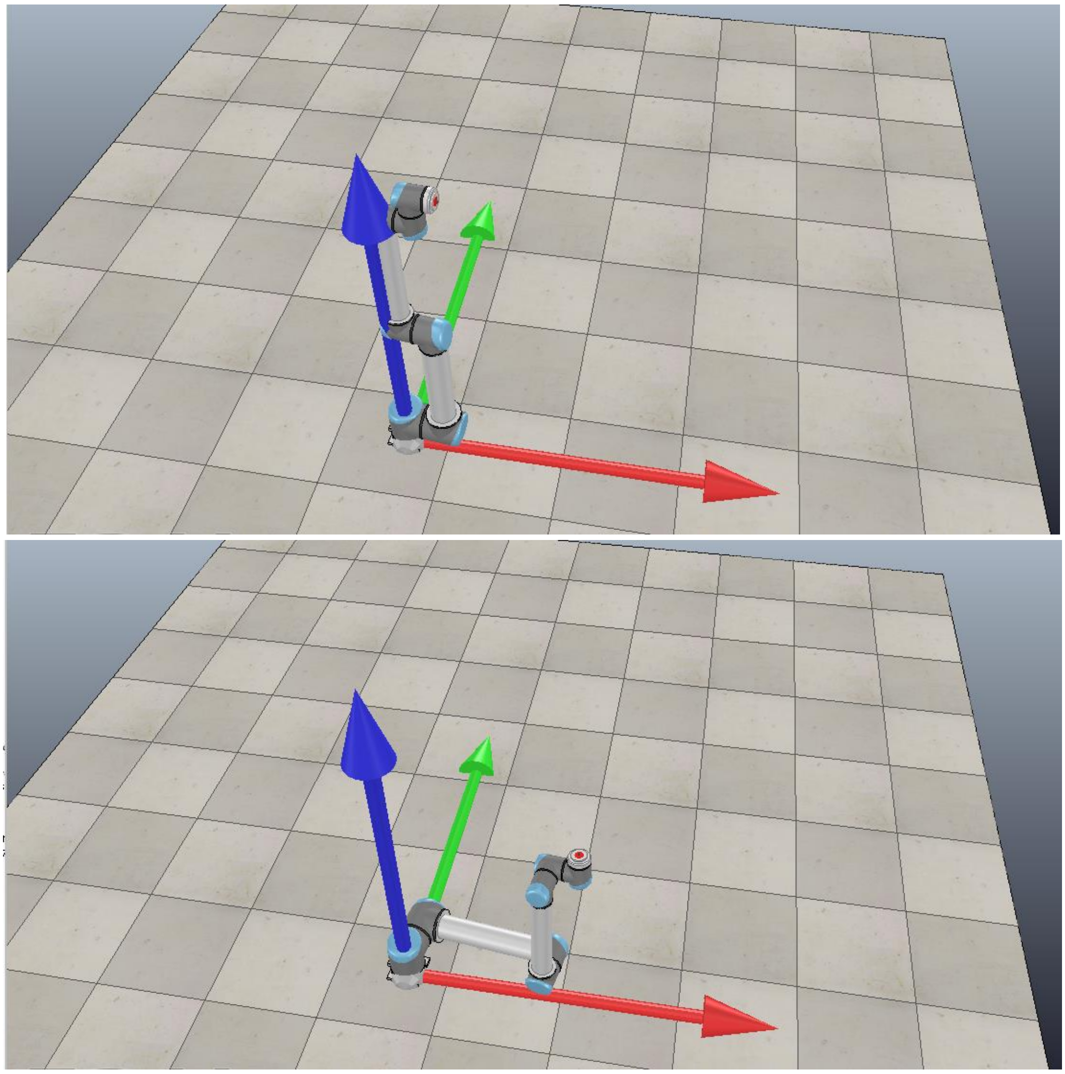
ΑΙΓΑΛΕΩ 2019

Πίνακας Περιεχομένων

Λίστα Εικόνων

2 Μετασχηματισμοί στις 2 Διαστάσεις

Η ρομποτική ασχολείται κατά κύριο λόγο με τη θέση και τον προσανατολισμό που λαμβάνει ένας ρομποτικός βραχίονας ώστε να επιτελέσει μία συγκεκριμένη ενέργεια. Η περιγραφή της θέσης και γίνεται με χρήση συντεταγμένων ως προς κάποιο σύστημα συντεταγμένων και του προσανατολισμού με χρήση γωνιών περιστροφής ως προς τους άξονες του συστήματος συντεταμένων. Η Εικόνα 2-1 παρουσιάζει έναν ρομποτικό βραχίονα και το σύστημα συντεταγμένων ως προς το οποίο αναφέρονται η θέση και ο προσανατολισμός του.



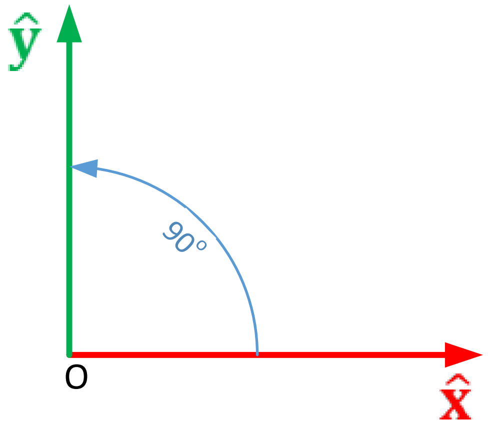
Εικόνα 2-1. Αλλαγή στη θέση και στον προσανατολισμό ενός ρομποτικού βραχίονα ως προς το σύστημα συντεταγμένων που καθορίζουν οι τρεις χρωματιστοί άξονες (άξονας x κόκκινο χρώμα, άξονα y πράσινο χρώμα, άξονας z μπλε χρώμα).

Στο παρόν κεφάλαιο, παρουσιάζονται συστήματα συντεταγμένων στις δύο διαστάσεις και στη συνέχεια δίνεται το μαθηματικό πλαίσιο για την περιγραφή της μετατόπισης και της περιστροφής.

2.1 Συστήματα συντεταγμένων στις δύο διαστάσεις (2Δ)

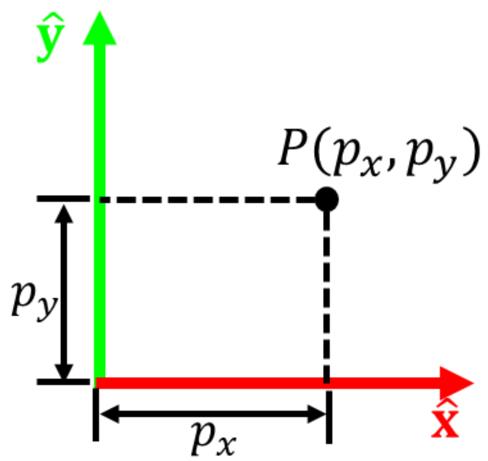
Ως γνωστόν για την περιγραφή της θέσης σημείων τις δύο διαστάσεις, δηλαδή σημείων που είναι σε ένα επίπεδο, χρησιμοποιείται το λεγόμενο **καρτεσιανό** σύστημα συντεταγμένων (Εικόνα 2-2).

Συγκεκριμένα, ορίζονται δύο άξονες οι οποίοι είναι κάθετοι μεταξύ τους: ο ένας άξονας ονομάζεται **άξονας x** και ο άλλος άξονας ονομάζεται **άξονας y**. **Ο άξονας y σχηματίζει γωνία $90°$ με τον άξονα x κατά την αριστερόστροφη φορά (αντίθετα από τη φορά των δεικτών του ρολογιού).** Το σημείο τομής των δύο αξόνων αποτελεί την αρχή του συστήματος συντεταγμένων. Σε κάθε άξονα, ορίζεται ένα διάνυσμα το οποίο υποδηλώνει τη θετική κατεύθυνση του άξονα, δηλαδή την κατεύθυνση προς την οποία αυξάνουν οι τιμές του άξονα: το διάνυσμα $\hat{\mathbf{x}}$ δείχνει τη θετική κατεύθυνση του άξονα x και αντίστοιχα το διάνυσμα $\hat{\mathbf{y}}$ δείχνει τη θετική κατεύθυνση του άξονα y (Εικόνα 2-2). Τα δύο διανύσματα έχουν μέτρο μονάδα (ονομάζονται και μοναδιαία διανύσματα), το οποίο σημαίνει ότι το μήκος κάθε διανύσματος είναι 1 στη μονάδα μέτρησης του άξονα (π.χ. mm, cm, m κ.λπ.).



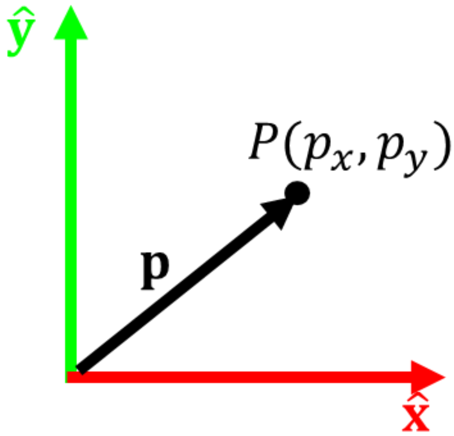
Εικόνα 2-2. Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων. Τα διανύσματα $\hat{\mathbf{x}}$ και $\hat{\mathbf{y}}$ θεωρείται ότι έχουν μέτρο μονάδα και δείχνουν τη θετική κατεύθυνση του αντίστοιχου άξονα. Ο άξονας y σχηματίζει γωνία 90° αριστερόστροφα ως προς τον άξονα x. Η αρχή του συστήματος συντεταγμένων συμβολίζεται με Ο.

Η θέση ενός σημείου P στο επίπεδο μπορεί να προσδιοριστεί πλήρως από δύο αριθμούς (p_x, p_y), οι οποίοι είναι οι **συντεταγμένες του σημείου**. Ο αριθμός p_x καθορίζει πόσο απέχει το σημείο P από την αρχή των αξόνων κατά μήκος του άξονα x. Αντίστοιχα, ο αριθμός p_y καθορίζει πόσο απέχει το σημείο P από την αρχή των αξόνων κατά μήκος του άξονα y (Εικόνα 2-3). Οι αριθμοί αυτοί έχουν θετική τιμή όταν βρίσκονται προς την κατεύθυνση που δείχνει το αντίστοιχο μοναδιαίο διάνυσμα. Εάν είναι στην αντίθετη κατεύθυνση, η τιμή τους θα είναι αρνητική.



Εικόνα 2-3. Συντεταγμένες σημείου $\boldsymbol{P}$.

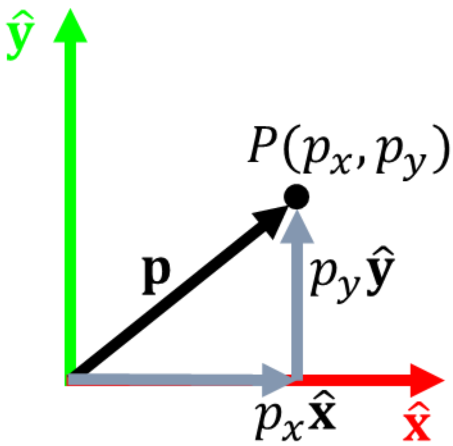
Εναλλακτικά, η θέση ενός σημείου μπορεί να εκφραστεί **ισοδύναμα** από ένα **διάνυσμα θέσης $\mathbf{p}$**, το οποίο ξεκινάει από την αρχή των αξόνων και καταλήγει στο σημείο P (Εικόνα 2-4). Το διάνυσμα έχει ως συνιστώσες τις συντεταγμένες του σημείου P και συμβολίζονται με $\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix}$. **Επομένως, όσον αφορά στον συμβολισμό: με (p_x, p_y) συμβολίζεται ένα σημείο και με $\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix}$ συμβολίζεται το αντίστοιχο διάνυσμα θέσης. Οι δύο συμβολισμοί είναι ισοδύναμοι**.



Εικόνα 2-4. Διάνυσμα που περιγράφει τη θέση ενός σημείου.

Εξ ορισμού τα δύο μοναδιαία διανύσματα γράφονται ως $\hat{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ και $\hat{\boldsymbol{y}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Επομένως, ένα διάνυσμα θέσης $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix}$ μπορεί να γραφτεί ως το άθροισμα των δύο μοναδιαίων διανυσμάτων $\hat{\mathbf{x}}$ και $\hat{\mathbf{y}}$ ως ακολούθως (Εικόνα 2-5):

$$\mathbf{p} = p_x \hat{\boldsymbol{x}} + p_y \hat{\boldsymbol{y}}$$



Εικόνα 2-5. Ένα διάνυσμα θέσης μπορεί να γραφτεί ως κατάλληλο άθροισμα των δύο μοναδιαίων διανυσμάτων.

2.2 Μετασχηματισμοί στις δύο διαστάσεις

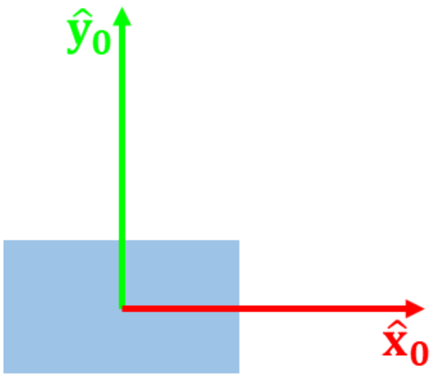
Στην ενότητα αυτή θα δοθεί το μαθηματικό πλαίσιο για τους δύο βασικούς γεωμετρικούς μετασχηματισμούς: μετατόπιση και περιστροφή.

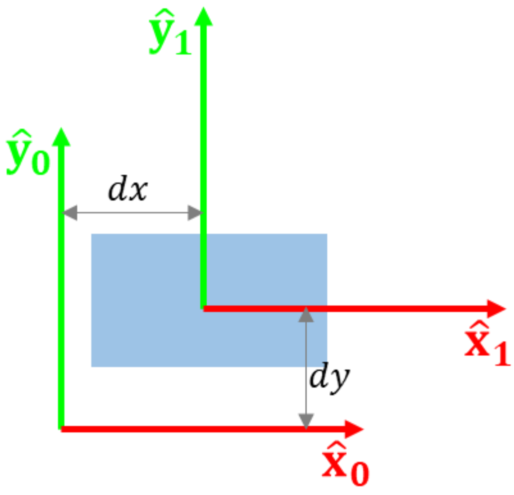
2.2.1 Μετατόπιση στις δύο διαστάσεις

Έστω ένα σύστημα συντεταγμένων και έστω ένα αντικείμενο, για παράδειγμα ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, το οποίο είναι κεντραρισμένο στην αρχή των αξόνων του συστήματος συντεταγμένων, όπως φαίνεται στην Εικόνα 2-6(α). Το σύστημα συντεταγμένων έχει μοναδιαία διανύσματα που φέρουν τον δείκτη 0, συμβολίζεται με $\{\mathbf{0}\}$ και θεωρείται το σύστημα συντεταγμένων αναφοράς, ως προς το οποίο περιγράφονται τα πάντα.

Ας θεωρήσουμε ότι υπάρχει και ένα δεύτερο σύστημα συντεταγμένων **προσκολλημένο** στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, το οποίο συμβολίζεται με $\{\mathbf{1}\}$. Τα μοναδιαία διανύσματα του συστήματος αυτού φέρουν τον δείκτη 1. Το σύστημα συντεταγμένων $\{\mathbf{1}\}$ αρχικά *συμπίπτει με το σύστημα αναφοράς* $\{\mathbf{0}\}$.

Έστω ότι το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο μετατοπίζεται οριζόντια κατά dx και κάθετα κατά dy ως προς την αρχή των αξόνων του $\{\mathbf{0}\}$. Το προσκολλημένο σύστημα συντεταγμένων $\{\mathbf{1}\}$ θα μετατοπιστεί αντίστοιχα, όπως δείχνει η Εικόνα 2-6(β). Καθώς το σύστημα συντεταγμένων $\{\mathbf{1}\}$ είναι προσκολλημένο στο αντικείμενο, τα σημεία του αντικειμένου θα έχουν πάντα τις ίδιες συντεταγμένες ως προς το $\{\mathbf{1}\}$, σε οποιαδήποτε θέση και εάν μετατοπιστεί το αντικείμενο[1]. **Συνεπώς, αρκεί να υπολογιστούν οι συντεταγμένες του αντικειμένου μία φορά ως προς το προσκολλημένο σύστημα συντεταγμένων $\{\mathbf{1}\}$ και στη συνέχεια να μελετηθεί η μετατόπιση της αρχής του συστήματος συντεταγμένων $\{\mathbf{1}\}$ ως προς την αρχή του συστήματος συντεταγμένων $\{\mathbf{0}\}$.**





Εικόνα 2-6. (α) Αρχική θέση παραλληλογράμμου. (β) Μετατόπιση κατά dx οριζόντια και dy κατακόρυφα.

Γενικά, έστω δύο συστήματα συντεταγμένων $\{\mathbf{0}\}$ και $\{\mathbf{1}\}$, όπου το σύστημα $\{\mathbf{1}\}$ έχει μετατοπιστεί κατά μήκος του $\hat{\mathbf{x}}_\mathbf{0}$ κατά dx και κατά μήκος του $\hat{\mathbf{y}}_\mathbf{0}$ κατά dy. Εάν $(x^{(1)}, y^{(1)})$ είναι οι συντεταγμένες ενός οποιουδήποτε σημείου ως προς το σύστημα συντεταγμένων $\{\mathbf{1}\}$, τότε οι συντεταγμένες $(x^{(0)}, y^{(0)})$ ως προς το σύστημα συντεταγμένων $\{\mathbf{0}\}$, θα είναι:

[1]Ισοδύναμα μπορούμε να φανταστούμε ότι έχουμε δυο παρατηρητές: έναν σταθερό παρατηρητή στην αρχή του συστήματος συντεταγμένων αναφοράς και έναν κινούμενο παρατηρητή που μετακινείται μαζί με το αντικείμενο. Καθώς κινείται το αντικείμενο, ο σταθερός παρατηρητής το βλέπει σε διαφορετική θέση, ενώ ο κινούμενος το βλέπει πάντα στην ίδια θέση.

$$x^{(0)} = x^{(1)} + dx$$
$$y^{(0)} = y^{(1)} + dy \tag{1}$$

Οι παραπάνω σχέσεις περιγράφονται με τη μορφή πινάκων ως εξής:

$$\begin{bmatrix} x^{(0)} \\ y^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} \tag{2}$$

Ο πίνακας στήλη $\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$ ονομάζεται συνήθως **διάνυσμα μετατόπισης** και συμβολίζεται με $\mathbf{d_1^0}$. Προσέχουμε στον συμβολισμό πως ο άνω δείκτης είναι το σύστημα συντεταγμένων αναφοράς, ενώ ο κάτω δείκτης είναι το σύστημα συντεταγμένων που μετατοπίζεται.

Το διάνυσμα που δίνει την μετατόπιση του συστήματος $\{\mathbf{0}\}$ ως προς το σύστημα $\{\mathbf{1}\}$ συμβολίζεται με $\mathbf{d_0^1}$ και ισχύει ότι:

$$\mathbf{d_0^1} = -\mathbf{d_1^0}$$

Οι σχέσεις (2) γράφονται επίσης και ως ακολούθως:

$$\begin{bmatrix} x^{(0)} \\ y^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} \tag{3}$$

ή σε πιο συμπαγή μορφή:

$$\begin{bmatrix} x^{(0)} \\ y^{(0)} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & dx \\ 0 & 1 & dy \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

Παρατηρήσεις:

1. Οι συντεταγμένες $\begin{bmatrix} x^{(0)} \\ y^{(0)} \\ 1 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \\ 1 \end{bmatrix}$ ονομάζονται **ομογενείς** συντεταγμένες στις δύο διαστάσεις.
2. Ο μοναδιαίος πίνακας $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ αποτελεί ειδική μορφή του **πίνακα περιστροφής** στις δύο διαστάσεις που θα αναφερθεί στη συνέχεια.
3. Πίνακας $\begin{bmatrix} 1 & 0 & dx \\ 0 & 1 & dy \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ αποτελεί ειδική μορφή του **πίνακα ομογενούς μετασχηματισμού** στις δύο διαστάσεις που θα αναφερθεί στη συνέχεια.

Στην περίπτωση όπου γίνονται πολλές διαδοχικές μετατοπίσεις, τότε η συνολική μετατόπιση είναι η σύνθεση όλων των επιμέρους μετατοπίσεων. Συγκεκριμένα, έστω το σύστημα συντεταγμένων αναφοράς $\{\mathbf{0}\}$ και έστω ένα σύστημα συντεταγμένων $\{\mathbf{1}\}$ το οποίο είναι μετατοπισμένο ως προς το $\{\mathbf{0}\}$ με διάνυσμα μετατόπισης $\mathbf{d_1^0} = \begin{bmatrix} dx_1 \\ dy_1 \end{bmatrix}$. Έστω ένα άλλο σύστημα συντεταγμένων $\{\mathbf{2}\}$, το οποίο είναι μετατοπισμένο ως προς το $\{\mathbf{1}\}$ με διάνυσμα μετατόπισης $\mathbf{d}_{\mathbf{2}}^{\mathbf{1}} = \begin{bmatrix} dx_2 \\ dy_2 \end{bmatrix}$. Η μετατόπιση του $\{\mathbf{2}\}$ ως προς το $\{\mathbf{0}\}$ έχει διάνυσμα μετατόπισης:

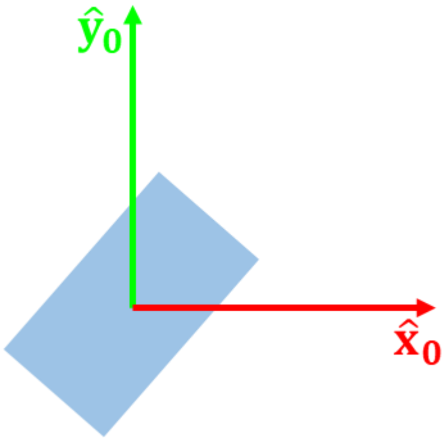
$$\mathbf{d}_{\mathbf{2}}^{\mathbf{0}} = \mathbf{d}_{\mathbf{1}}^{\mathbf{0}} + \mathbf{d}_{\mathbf{2}}^{\mathbf{1}} = \begin{bmatrix} dx_1 + dx_2 \\ dy_1 + dy_2 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας ομογενούς μετασχηματισμού σε αυτή την περίπτωση θα είναι $\begin{bmatrix} 1 & 0 & dx_1 + dx_2 \\ 0 & 1 & dy_1 + dy_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, ο οποίος είναι το γινόμενο των δύο επιμέρους πινάκων $\begin{bmatrix} 1 & 0 & dx_1 \\ 0 & 1 & dy_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} 1 & 0 & dx_2 \\ 0 & 1 & dy_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, δηλαδή $\begin{bmatrix} 1 & 0 & dx_1 + dx_2 \\ 0 & 1 & dy_1 + dy_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & dx_1 \\ 0 & 1 & dy_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & dx_2 \\ 0 & 1 & dy_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

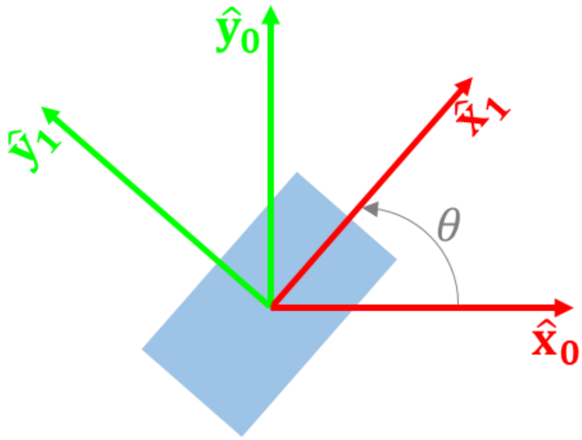
Τα παραπάνω γενικεύονται αντίστοιχα όταν έχουμε περισσότερες από δύο μετατοπίσεις.

2.2.2 Περιστροφή στις δύο διαστάσεις

Έστω ότι το ορθογώνιο της προηγούμενης ενότητας περιστρέφεται, όπως παρουσιάζεται στην Εικόνα 2-7(α). Θεωρούμε πάλι ότι στο αντικείμενο έχει προσκολληθεί ένα σύστημα συντεταγμένων, που συμβολίζεται με $\{\mathbf{1}\}$ (Εικόνα 2-7(β)). Η γωνία περιστροφής συμβολίζεται με θ και είναι η γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{0}}$ και $\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{1}}$. **Θετικές τιμές της γωνίες αντιστοιχούν σε αριστερόστροφες περιστροφές**.



(α)



(β)

Εικόνα 2-7 (α) Περιστροφή παραλληλογράμμου. (β) Σύστημα συντεταγμένων προσκολλημένο στο αντικείμενο.

Εάν $(x^{(1)}, y^{(1)})$ είναι οι συντεταγμένες ενός οποιουδήποτε σημείου ως προς το σύστημα συντεταγμένων $\{\mathbf{1}\}$, τότε οι συντεταγμένες $(x^{(0)}, y^{(0)})$ ως προς το σύστημα συντεταγμένων αναφοράς $\{\mathbf{0}\}$, θα είναι:

$$\begin{aligned} x^{(0)} &= x^{(1)} \cos\theta - y^{(1)} \sin\theta \\ y^{(0)} &= x^{(1)} \sin\theta + y^{(1)} \cos\theta \end{aligned} \tag{5}$$

Οι δύο παραπάνω σχέσεις μπορούν να γραφτούν και με χρήση πινάκων ως ακολούθως:

$$\begin{bmatrix} x^{(0)} \\ y^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \end{bmatrix} \tag{6}$$

Ο πίνακας $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ ονομάζεται **πίνακας περιστροφής** και μπορεί να προκύψει ως εξής:

- Η 1η στήλη έχει κατά σειρά τα συνημίτονα[2] των γωνιών που σχηματίζει ο άξονας $\hat{\boldsymbol{x}}_1$ με τους άξονες $\hat{\boldsymbol{x}}_0$ και $\hat{\boldsymbol{y}}_0$.
- Η 2η στήλη έχει κατά σειρά τα συνημίτονα[3] των γωνιών που σχηματίζει άξονας ο άξονας $\hat{\boldsymbol{y}}_1$ με τους άξονες $\hat{\boldsymbol{x}}_0$ και $\hat{\boldsymbol{y}}_0$.

Όπως αναφέρθηκε, μία ειδική μορφή του πίνακα περιστροφής είναι ο μοναδιαίος πίνακας $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, ο οποίος προκύπτει όταν η γωνία περιστροφής είναι μηδέν ($\theta = 0°$), δηλαδή όταν δεν έχουμε περιστροφή.

Γενικά, ο πίνακας που περιγράφει την περιστροφή του συστήματος συντεταγμένων $\{\mathbf{1}\}$ ως προς το σύστημα συντεταγμένων $\{\mathbf{0}\}$ συμβολίζεται με $\mathbf{R}_\mathbf{1}^\mathbf{0}$. Όπως και πριν, ο άνω δείκτης είναι το σύστημα συντεταγμένων αναφοράς, ενώ ο κάτω δείκτης είναι το σύστημα συντεταγμένων που περιστρέφεται.

Χρησιμοποιώντας ομογενείς συντεταγμένες στις δύο διαστάσεις, έχουμε ισοδύναμα ότι:

$$\begin{bmatrix} x^{(0)} \\ y^{(0)} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{7}$$

Ο πίνακας που δίνει την περιστροφή του συστήματος $\{\mathbf{0}\}$ ως προς το σύστημα $\{\mathbf{1}\}$ συμβολίζεται με $\mathbf{R}_\mathbf{0}^\mathbf{1}$ και ισχύει ότι (η γωνία περιστροφής είναι $-\theta$ πλέον):

$$\mathbf{R}_\mathbf{0}^\mathbf{1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{8}$$

Παρατηρήσεις:

- Οι πίνακες περιστροφής $\mathbf{R}_\mathbf{1}^\mathbf{0}$ και $\mathbf{R}_\mathbf{0}^\mathbf{1}$ είναι ο ένας ανάστροφος του άλλου (οι γραμμές του ενός πίνακα είναι οι στήλες στον άλλο πίνακα).
- Το άθροισμα των τετραγώνων των τιμών κάθε γραμμής ή κάθε στήλης ενός πίνακα περιστροφής πρέπει να ισούται με μονάδα.

Παράδειγμα 2-1

Έστω το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο που φαίνεται στην Εικόνα 2-6(α) και έστω το σημείο που είναι στην πάνω αριστερά γωνία του παραλληλογράμμου είναι στη θέση (-1.5,0.5) αρχικά. Ποιες θα είναι οι συντεταγμένες του σημείου αυτού εάν γίνει περιστροφή κατά $\mathbf{30°}$;

---

[2] $\sin\theta = \cos(90° - \theta)$

[3] $-\sin\theta = \cos(90° + \theta)$

Λύση

Είναι $x^{(1)} = -1.5$ και $y^{(1)} = 0.5$. Είναι $\cos 30° = 0.866$ και $\sin 30° = 0.5$. Εφαρμόζοντας τις σχέσεις (5) θα είναι: $x^{(0)} = (0{,}866)(-1{,}5) - (0{,}5)(0{,}5) = -1.55$ και $y^{(0)} = (0.5)(-1.5) + (0.866)(0.5) = -0.32$. ■

Στην περίπτωση όπου γίνονται πολλές διαδοχικές περιστροφές, τότε η συνολική περιστροφή είναι η σύνθεση όλων των επιμέρους περιστροφών. Συγκεκριμένα, έστω το σύστημα συντεταγμένων αναφοράς $\{\mathbf{0}\}$ και έστω ένα σύστημα συντεταγμένων $\{\mathbf{1}\}$ το οποίο έχει περιστραφεί ως προς το $\{\mathbf{0}\}$ κατά γωνία θ_1, με πίνακα περιστροφής $\mathbf{R_1^0} = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix}$. Έστω ένα άλλο σύστημα συντεταγμένων $\{\mathbf{2}\}$, το οποίο έχει περιστραφεί ως προς το $\{\mathbf{1}\}$ κατά γωνία θ_2, με πίνακα περιστροφής $\mathbf{R_2^1} = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{bmatrix}$. Η γωνία περιστροφής του $\{\mathbf{2}\}$ ως προς το $\{\mathbf{0}\}$ είναι πλέον $\theta_1 + \theta_2$ και ο πίνακας περιστροφής $\mathbf{R_2^0}$ θα είναι:

$$\mathbf{R_2^0} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2) \\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \end{bmatrix}$$

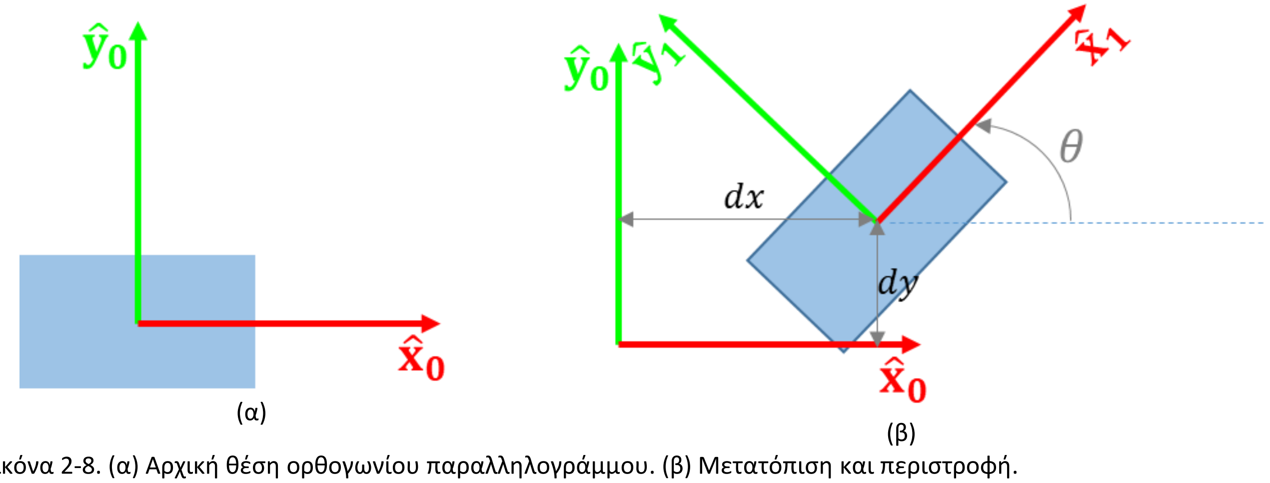
Μπορεί να δειχθεί ότι ισχύει:

$$\mathbf{R_2^0} = \mathbf{R_1^0}\mathbf{R_2^1}$$

Τα παραπάνω γενικεύονται αντίστοιχα όταν έχουμε περισσότερες από δύο περιστροφές.

2.2.3 Μετατόπιση και περιστροφή στις δύο διαστάσεις

Έστω τώρα ότι έχουμε μετατόπιση κατά dx οριζόντια και κατά dy κατακόρυφα και περιστροφή κατά γωνία θ, όπως δείχνει η Εικόνα 2-8. Το διάνυσμα μετατόπισης είναι $\mathbf{d_1^0} = \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \end{bmatrix}$ και ο πίνακας περιστροφής είναι $\mathbf{R_1^0} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$.

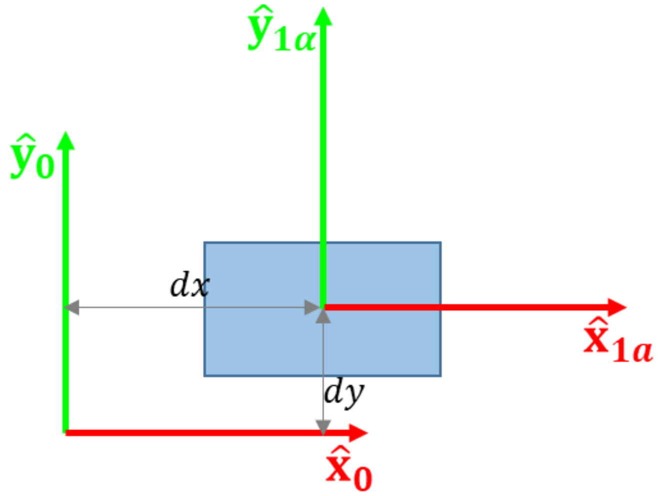


Εικόνα 2-8. (α) Αρχική θέση ορθογωνίου παραλληλογράμμου. (β) Μετατόπιση και περιστροφή.

Για να βρούμε τις νέες συντεταγμένες των σημείων του παραλληλογράμμου εργαζόμαστε ως ακολούθως: θεωρούμε ότι γίνεται η μετατόπιση αρχικά, οπότε σύμφωνα με τις σχέσεις (1) θα είναι:

$$x^{(0)} = x^{(1a)} + dx$$
$$y^{(0)} = y^{(1a)} + dy$$

όπου $\left(x^{(1a)}, y^{(1a)}\right)$ είναι οι συντεταγμένες ενός οποιουδήποτε σημείου του παραλληλογράμμου ως προς ένα βοηθητικό σύστημα συντεταγμένων $\{\mathbf{1}\boldsymbol{\alpha}\}$ που είναι στο κέντρο του παραλληλογράμμου, χωρίς να έχει υποστεί την περιστροφή (Εικόνα 2-9).



Εικόνα 2-9. Μετατόπιση.

Στη συνέχεια, θεωρούμε ότι γίνεται περιστροφή ως προς το σύστημα $\{\mathbf{1}\boldsymbol{\alpha}\}$:

$$x^{(1\alpha)} = x^{(1)} \cos\theta - y^{(1)} \sin\theta$$
$$y^{(1\alpha)} = x^{(1)} \sin\theta + y^{(1)} \cos\theta$$

όπου $\left(x^{(1)}, y^{(1)}\right)$ είναι οι συντεταγμένες ενός οποιουδήποτε σημείου του παραλληλογράμμου ως προς το σύστημα συντεταγμένων $\{\mathbf{1}\}$ που δείχνει η Εικόνα 2-8(β). Συνδυάζοντας τα παραπάνω παίρνουμε:

$$\begin{aligned} x^{(0)} &= x^{(1)} \cos\theta - y^{(1)} \sin\theta + dx \\ y^{(0)} &= x^{(1)} \sin\theta + y^{(1)} \cos\theta + dy \end{aligned} \tag{9}$$

Οι σχέσεις αυτές γράφονται με χρήση ομογενών συντεταγμένων ως ακολούθως:

$$\begin{bmatrix} x^{(0)} \\ y^{(0)} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & dx \\ \sin\theta & \cos\theta & dy \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{10}$$

Ο πίνακας $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & dx \\ \sin\theta & \cos\theta & dy \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ονομάζεται **πίνακας ομογενούς μετασχηματισμού στις δύο διαστάσεις** και συμβολίζεται με $\mathbf{H}_{\mathbf{1}}^{\mathbf{0}}$. Ο πίνακας αυτός περιγράφει συνολικά την μετατόπιση και την περιστροφή που έχει υποστεί ένα σύστημα συντεταγμένων $\{\mathbf{1}\}$ ως προς ένα σύστημα συντεταγμένων $\{\mathbf{0}\}$.

Στην περίπτωση που έχουμε μόνο μετατόπιση ($\theta = 0$), ο πίνακας ομογενούς μετασχηματισμού θα είναι:

$$\mathbf{H_1^0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Εάν έχουμε μόνο περιστροφή ($d_x = d_y = 0$), ο πίνακας γίνεται:

$$\mathbf{H_1^0} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Γενικά, αν έχουμε διαδοχικά συστήματα συντεταγμένων $\{\mathbf{0}\}, \{\mathbf{1}\}, \{\mathbf{2}\}, \dots, \{\boldsymbol{N}\}$ με αντίστοιχους πίνακες ομογενούς μετασχηματισμού $\mathbf{H_1^0}, \mathbf{H_2^1}, \dots, \mathbf{H}_{\boldsymbol{N}}^{\boldsymbol{N-1}}$ τότε ο πίνακας ομογενούς μετασχηματισμού, $\mathbf{H}_{\boldsymbol{N}}^{\mathbf{0}}$, του συστήματος συντεταγμένων $\{\boldsymbol{N}\}$ ως προς το σύστημα συντεταγμένων $\{\mathbf{0}\}$ θα είναι το γινόμενο όλων των επιμέρους πινάκων:

$$\mathbf{H}_{\boldsymbol{N}}^{\mathbf{0}} = \mathbf{H_1^0} \cdot \mathbf{H_2^1} \cdot \dots \cdot \mathbf{H}_{\boldsymbol{N}}^{\boldsymbol{N-1}} \tag{11}$$

Παράδειγμα 2-2

Έστω το παραλληλόγραμμο που φαίνεται στην Εικόνα 2-8(α) και έστω το σημείο που είναι στην πάνω δεξιά γωνία του παραλληλογράμμου είναι στη θέση $(\mathbf{1,5}\ ,\mathbf{0,5})$ αρχικά. Ποιες θα είναι οι συντεταγμένες του σημείου αυτού εάν γίνει μετατόπιση κατά $\begin{bmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{1,5} \end{bmatrix}$ και περιστροφή κατά $\mathbf{30°}$.

Λύση

Είναι $x^{(1)} = 1{,}5$ και $y^{(1)} = 0{,}5$, $dx = 2$, $d_y = 1{,}5$, $\cos 30° = 0{,}866$ και $\sin 30° = 0{,}5$. Εφαρμόζοντας τις σχέσεις (9), βρίσκουμε ότι: $x^{(0)} = x^{(1)}\cos\theta - y^{(1)}\sin\theta + dx = (1{,}5)(0{,}866) - (0{,}5)(0{,}5) + 2 = 3.05$ και $y^{(0)} = x^{(1)}\sin\theta + y^{(1)}\cos\theta + dy = (1{,}5)(0{,}5) + (0{,}5)(0{,}866) + 1{,}5 = 2{,}7$ ■

Παράδειγμα 2-3

α) Να υπολογιστεί ο πίνακας ομογενούς μετασχηματισμού για γωνία περιστορφής $\mathbf{120°}$ και μετατόπιση $\mathbf{+5}$ ορίζοντια και – $\mathbf{10}$ κατακόρυφα.

β) Έστω το σημείο με συντεταγμένες $(\mathbf{-3, -8})$. Ποιες θα είναι συντεταγμένες του σημείου μετά την εφαρμογή του παραπάνω πίνακα;

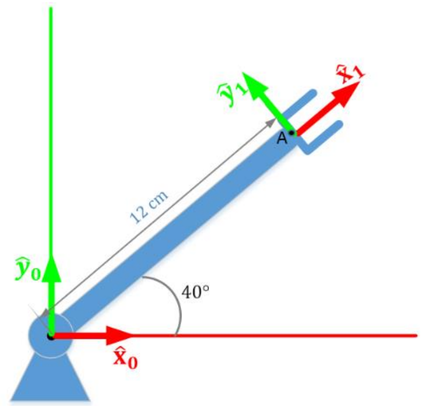
Λύση

α) Είναι $\cos 120° = -0{,}5$ και $\sin 120° = 0{,}866$. Οπότε ο πίνακας ομογενούς μετασχηματισμού θα είναι $\begin{bmatrix} -0.5 & -0.866 & 5 \\ 0.866 & -0.5 & -10 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

β) Οι νέες συντεταγμένες θα προκύψουν από τον ακόλουθο πολλαπλασιασμό πινάκων $\begin{bmatrix} -0{,}5 & -0{,}866 & 5 \\ 0{,}866 & -0{,}5 & -10 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 \\ -8 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5{,}4 \\ 11{,}4 \\ 1 \end{bmatrix}$. Άρα το σημείο θα πάει στη θέση $(5{,}4\ \ , 11{,}4)$.■

Παράδειγμα 2-4

Έστω ένας απλός ρομποτικός βραχίονας που περιλαμβάνει μία βάση με μία περιστροφική άρθρωση και έναν σύνδεσμο μήκους $l = 12$ cm, στο άκρο του οποίου συνδέεται ο τελικός επενεργητής. Η κάτοψη του βραχίονα δίνεται στην εικόνα. Το ρομπότ μπορεί να κινείται μόνο στο επίπεδο x-y. Ποια θα είναι η θέση του σημείου Α του τελικού επενεργητή εάν η γωνία της περιστροφικής άρθρωση γίνει $\theta = 40°$;



Λύση

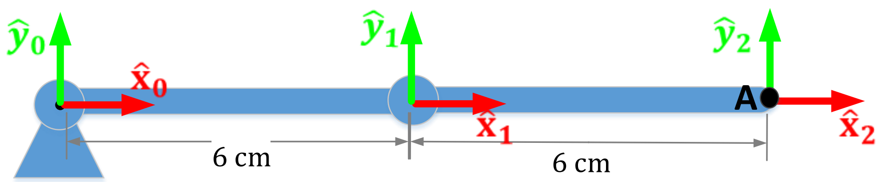
Θεωρούμε ότι το σύστημα συντεταγμένων αναφοράς (το οποίο είναι αμετακίνητο) είναι πάνω στην άρθρωση του ρομπότ. Επίσης, θεωρούμε ότι στον τελικό επενεργητή έχει προσκολληθεί ένα σύστημα συντεταγμένων που μετακινείται με αυτόν. Η αρχή του προσκολλημένου συστήματος συντεταγμένων θεωρείται ότι είναι στο σημείο Α. Η δυσκολία έγκειται στο να βρούμε ποια είναι η μετατόπιση, καθώς αυτή δεν δίνεται άμεσα. Όμως μπορεί να υπολογιστεί έμμεσα από το μήκος του συνδέσμου $l = 12$ cm. Η μετατόπιση είναι $dx = l\cos\theta = (12\text{ cm})\cos 40° = (12\text{ cm})(0{,}766) = 9.2\text{ cm}$ και $dy = l\sin\theta = (12\text{ cm})\sin 40° = (12\text{ cm})(0{,}643) = 7.7\text{ cm}$. Επομένως, ο πίνακας ομογενούς μετασχηματισμού θα είναι:

$$\begin{bmatrix} 0{,}766 & -0{,}643 & 9{,}2 \\ 0{,}643 & 0{,}766 & 7{,}7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Το σημείο Α το οποίο έχει συντεταγμένες $(0{,}0)$ ως προς το προσκολλημένο στον τελικό επενεργητή σύστημα συντεταγμένων $\{\mathbf{1}\}$. Επόμενως, ως προς το σύστημα συντεταγμένων αναφοράς, οι συντεταγμένες του θα είναι $\begin{bmatrix} 0{,}766 & -0{,}643 & 9{,}2 \\ 0{,}643 & 0{,}766 & 7{,}7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9{,}2 \\ 7{,}7 \\ 1 \end{bmatrix}$ δηλαδή (9,2 , 7,7) (cm).■

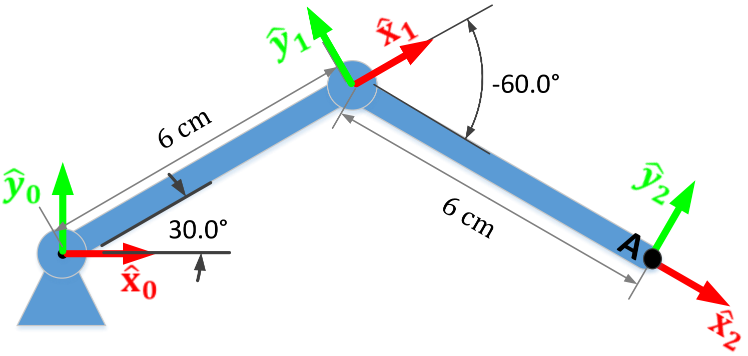
Παράδειγμα 2-5

Έστω ο ρομποτικός βραχίονας τύπου SCARA με δύο περιστροφικές αρθρώσεις, η κάτοψη του οποίου δίνεται στην εικόνα. Ο βραχίονας κινείται μόνο στο επίπεδο x-y. Αρχικά, οι δύο αρθρώσεις έχουν μηδενική γωνία περιστροφής, όπως δείχνει η εικόνα. Ποια θα είναι η θέση του σημείου Α του τελικού επενεργητή εάν η γωνία της πρώτης περιστροφικής άρθρωση γίνει $30°$ και της δεύτερης άρθρωσης γίνει $-60°$;



Λύση

Η επόμενη εικόνα δείχνει τη θέση που θα πάρει ο βραχίονας για τις δοθείσες γωνίες περιστροφής. Όπως φαίνεται, έχει οριστεί ένα σύστημα συντεταγμένων σε κάθε άρθρωση και στον τελικό επενεργητή. Το σύστημα συντεταγμένων $\{\mathbf{0}\}$ που είναι στην πρώτη άρθρωση είναι το σύστημα αναφοράς ως προς το οποίο θα υπολογιστούν τελικά οι συντεταγμένες. Τα άλλα δύο συστήματα αναφοράς ($\{\mathbf{1}\}$ και $\{\mathbf{2}\}$) περιστρέφονται ανάλογα με τις γωνίες των αρθρώσεων.



Στόχος είναι να βρεθεί ο πίνακας ομογενούς μετασχηματισμού $\mathbf{H_2^0}$ μεταξύ των συστημάτων συντεταγμένων $\{\mathbf{0}\}$ και $\{\mathbf{2}\}$. Καθώς το σημείο Α έχει συντεταγμένες $(0,0)$ ως προς το σύστημα συντεταγμένων $\{\mathbf{2}\}$, οι συντεταγμένες του $\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right)$ ως προς το σύστημα αναφοράς $\{\mathbf{0}\}$ θα είναι:

$$\begin{bmatrix} x^{(0)} \\ y^{(0)} \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{H_2^0} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας ομογενούς μετασχηματισμού $\mathbf{H_2^0}$ μπορεί να υπολογιστεί ως το γινόμενο $\mathbf{H_1^0} \cdot \mathbf{H_2^1}$ των δύο επιμέρους πινάκων ομογενούς μετασχηματισμού μεταξύ των συστημάτων $\{\mathbf{0}\}$ και $\{\mathbf{1}\}$ και $\{\mathbf{1}\}$ και $\{\mathbf{2}\}$.

Όσον αφορά στον πίνακα $\mathbf{H_1^0}$, ο πίνακας περιστροφής είναι $\begin{bmatrix} \cos 30° & -\sin 30° \\ \sin 30° & \cos 30° \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,866 & -0,5 \\ 0,5 & 0,866 \end{bmatrix}$ και το διάνυσμα μετατόπισης $\begin{bmatrix} 6\cos 30° \\ 6\sin 30° \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,196 \\ 3 \end{bmatrix}$. Επομένως:

$$\mathbf{H_1^0} = \begin{bmatrix} 0,866 & -0,5 & 5,196 \\ 0,5 & 0,866 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Αντίστοιχα, όσον αφορά στον πίνακα $\mathbf{H_2^1}$, ο πίνακας περιστροφής είναι $\begin{bmatrix} \cos(-60°) & -\sin(-60°) \\ \sin(-60°) & \cos(-60°) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,866 \\ -0,866 & 0,5 \end{bmatrix}$ και το διάνυσμα μετατόπισης $\begin{bmatrix} 6\cos(-60°) \\ 6\sin(-60°) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5,196 \end{bmatrix}$. Επομένως:

$$\mathbf{H_2^1} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,866 & 3 \\ -0,866 & 0,5 & -5,196 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιάζοντας του δύο πίνακες, έχουμε τελικά ότι:

$$\mathbf{H_2^0} = \begin{bmatrix} 0{,}866 & 0{,}5 & 10{,}39 \\ -0{,}5 & 0{,}866 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Συνεπώς:

$$\begin{bmatrix} x^{(0)} \\ y^{(0)} \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{H_2^0} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}866 & 0{,}5 & 10{,}39 \\ -0{,}5 & 0{,}866 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10{,}39 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Άρα οι συντεταγμένες του σημείου Α ως προς το σύστημα αναφοράς $\{\mathbf{0}\}$ θα είναι $(10{,}39\ ,\ \ 0)$.■