Πανεπιστημιο Δυτικησ Αττικησ
Σχολη ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
Τμημα Μηχανικων Βιοϊατρικησ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΡΟΜΠΟΤΙΚΗ
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΣΤΙΣ 3 ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ

Π. ΑΣΒΕΣΤΑΣ

Αναπληρωτής Καθηγητής

ΑΙΓΑΛΕΩ 2019

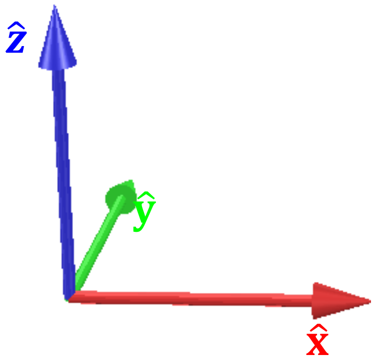
Πίνακας Περιεχομένων

Λίστα Εικόνων

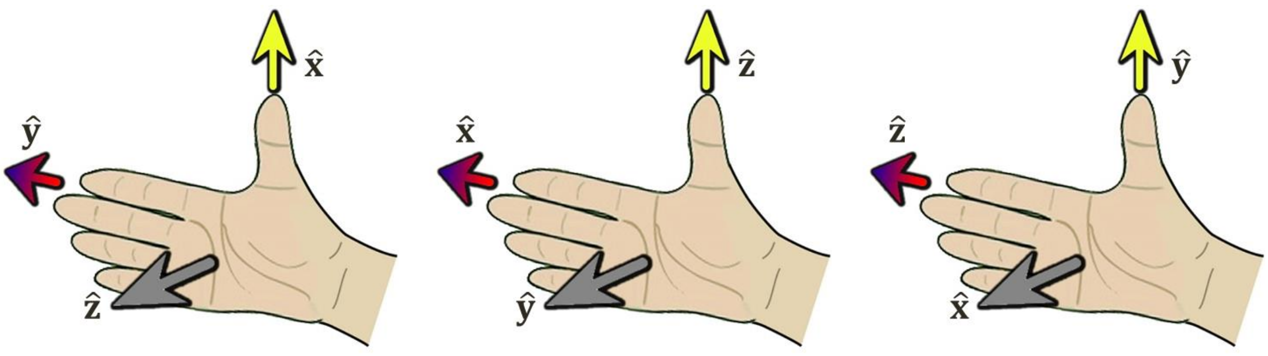
3 Μετασχηματισμοί στις 3 Διαστάσεις

3.1 Συστήματα συντεταγμένων στις τρεις διαστάσεις (3Δ)

Για την περιγραφή της θέσης ενός σημείου στις τρεις διαστάσεις (3Δ) χρειάζεται να οριστεί ένας τρίτος άξονας (άξονας z), ο οποίος είναι κάθετος στους άξονες x και y. Συνεπώς, κάθε άξονας είναι κάθετος στους άλλους δύο, σχηματίζοντας, όπως λέγεται, ένα τρισορθογώνιο σύστημα αξόνων (Εικόνα 3-1). Αντίστοιχα, ορίζεται ένα μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{\mathbf{z}}$, το οποίο δείχνει τη θετική κατεύθυνση του άξονα. Συνήθως, τα μοναδιαία διανύσματα των τριών αξόνων τοποθετούνται σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού. Συγκεκριμένα, έστω ότι έχουμε ζωγραφίσει τους δύο από τους τρεις άξονες με τα αντίστοιχα μοναδιαία διανύσματα. Για παράδειγμα, έστω ότι έχουμε τους άξονες x και y. Τότε για βρούμε προς τα που θα δείχνει το μοναδιαίο διάνυσμα για τον άξονα z κάνουμε την εξής διαδικασία: αρχικά, μετακινούμε τον αντίχειρα του δεξιού χεριού ώστε να σχηματιστεί ορθή γωνία με τα υπόλοιπα δάχτυλα, τα οποία κρατάμε ενωμένα μεταξύ τους. Στη συνέχεια, τοποθετούμε το αντίχειρα του δεξιού χεριού στην κατεύθυνση του $\hat{\mathbf{x}}$ και τα υπόλοιπα δάχτυλα του δεξιού χεριού να δείχνουν στην κατεύθυνση του $\hat{\mathbf{y}}$. Τότε ανάλογα με το που δείχνει η παλάμη του δεξιού χεριού θα είναι η κατεύθυνση του $\hat{\mathbf{z}}$ (Εικόνα 3-2(α)). Εάν είχαμε ζωγραφίσει του άξονες x και z, τότε θα βάζαμε τον αντίχειρα προς στην κατεύθυνση του $\hat{\mathbf{z}}$, τα υπόλοιπα δάχτυλα στην κατεύθυνση του $\hat{\mathbf{x}}$ και η παλάμη θα έδειχνε την κατεύθυνση του $\hat{\mathbf{y}}$ (Εικόνα 3-2(β)). Τέλος, Εάν είχαμε ζωγραφίσει τους άξονες y και z, τότε θα βάζαμε τον αντίχειρα προς στην κατεύθυνση του $\hat{\mathbf{y}}$, τα υπόλοιπα δάχτυλα στην κατεύθυνση του $\hat{\mathbf{z}}$ και η παλάμη θα έδειχνε την κατεύθυνση του $\hat{\mathbf{x}}$ (Εικόνα 3-2(γ))



Εικόνα 3-1. Τρισορθογώνιο σύστημα αξόνων.

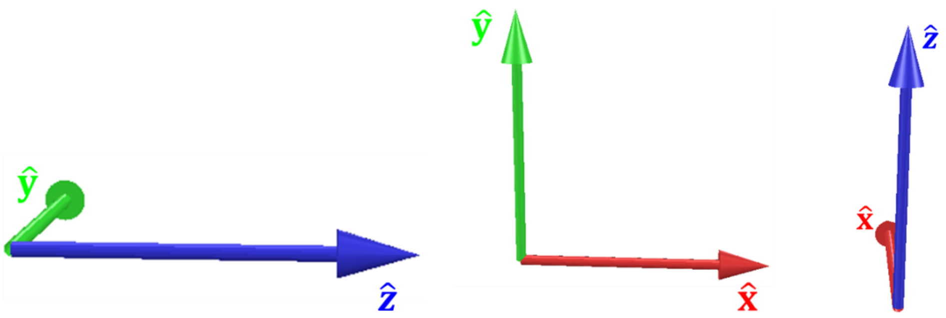


(α) (β) (γ)

Εικόνα 3-2. Κανόνας δεξιού χεριού όταν είναι γνωστοί οι άξονες: (α) x και y (β) x και z (γ) y και z.

Παράδειγμα 3-1

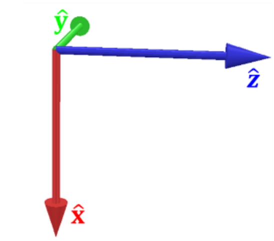
Να συμπληρωθούν τα επόμενα συστήματα συντεταγμένων με τον τρίτο άξονα, σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού.



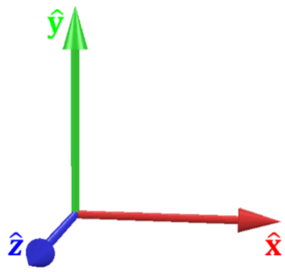
(α) **(β)** **(γ)**

Λύση

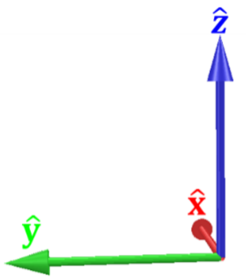
(α) Έχουμε τους άξονες y και z. Επομένως, τοποθετούμε τον αντίχειρα στην κατεύθυνση του $\hat{\mathbf{y}}$ (δηλ. να πηγαίνει προς τη σελίδα) και τα υπόλοιπα δάχτυλα στην κατεύθυνση του $\hat{\mathbf{z}}$ (δηλ. προς τα δεξιά της σελίδας). Τότε, η παλάμη θα δείχνει προς τα κάτω, όπου θα είναι η κατεύθυνση του $\hat{\mathbf{x}}$.



(β) Έχουμε τους άξονες x και y. Επομένως, τοποθετούμε τον αντίχειρα στην κατεύθυνση του $\hat{\mathbf{x}}$ (δηλ. να πηγαίνει προς τα δεξιά της σελίδας) και τα υπόλοιπα δάχτυλα στην κατεύθυνση του $\hat{\mathbf{y}}$ (δηλ. προς τα πάνω στη σελίδα). Τότε, η παλάμη θα δείχνει προς τα έξω, όπου θα είναι η κατεύθυνση του $\hat{\mathbf{y}}$.

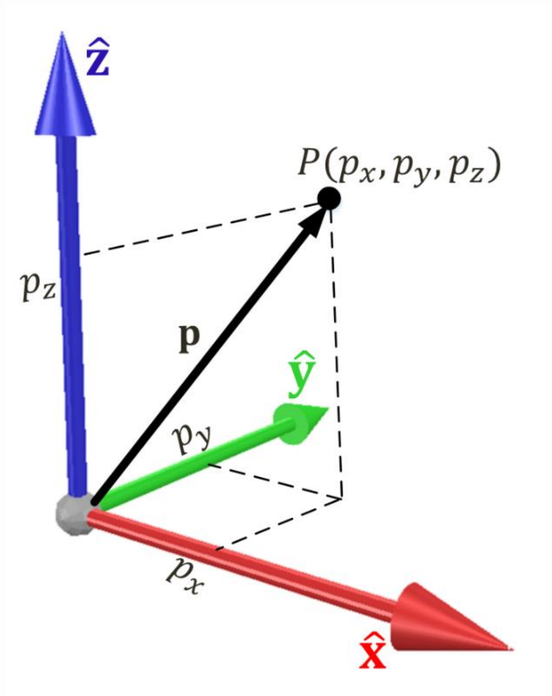


(γ) Έχουμε τους άξονες x και z. Επομένως, τοποθετούμε τον αντίχειρα στην κατεύθυνση του $\hat{\mathbf{z}}$ (δηλ. να πηγαίνει προς τα πάνω στη σελίδα) και τα υπόλοιπα δάχτυλα στην κατεύθυνση του $\hat{\mathbf{x}}$ (δηλ. προς κάθετα στη σελίδα προς τα μέσα). Τότε, η παλάμη θα δείχνει προς τα αριστερά, όπου θα είναι η κατεύθυνση του $\hat{\mathbf{y}}$.



■

Έχοντας ορίσει τους τρεις άξονες, πλέον κάθε σημείο P περιγράφεται από μία τριάδα αριθμών (p_x, p_y, p_z), όπου ο καθένας περιγράφει πόσο απέχει το σημείο από την αρχή του συστήματος συντεταγμένων κατά μήκος του αντίστοιχου άξονα, ενώ το αντίστοιχο διάνυσμα θέσης $\mathbf{p}$ θα έχει συνιστώσες $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}$ και θα ισχύει ότι $\mathbf{p} = p_x\hat{\mathbf{x}} + p_y\hat{\mathbf{y}} + p_z\hat{\mathbf{z}}$ (Εικόνα 3-3).

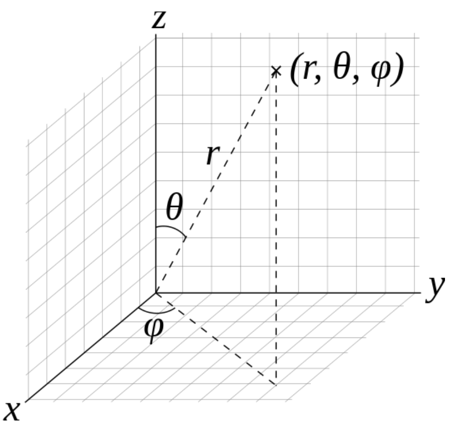


Εικόνα 3-3. Συντεταγμένες σημείου στις τρεις διαστάσεις.

Το μέτρο του διανύσματος, το οποίο δίνει την απόσταση του σημείου από την αρχή των αξόνων, θα ισούται με: $\|\mathbf{p}\| = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}$. Σε αντίθεση με τις δύο διαστάσεις, δεν ορίζεται μόνο μία γωνία, αλλά δύο γωνίες για το διάνυσμα θέσης (Εικόνα 3-4):

$$\theta = \cos^{-1}\frac{p_z}{\|\mathbf{p}\|}$$

$$\varphi = \tan^{-1}\frac{p_y}{p_x}$$



Εικόνα 3-4. Ορισμός γωνιών διανύσματος θέσης στις 3Δ. Με r συμβολίζεται το μέτρο του διανύσματος.

3.2 Μετατόπιση στις τρεις διαστάσεις

Η μετατόπιση στις τρεις διαστάσεις στην ουσία είναι απλή επέκταση της περίπτωσης των δύο διαστάσεων. Γενικά, έστω δύο συστήματα συντεταγμένων $\{\mathbf{0}\}$ και $\{\mathbf{1}\}$, όπου το σύστημα $\{\mathbf{1}\}$ έχει μετατοπιστεί κατά μήκος του $\hat{\mathbf{x}}_\mathbf{0}$ κατά dx, κατά μήκος του $\hat{\mathbf{y}}_\mathbf{0}$ κατά dy και κατά μήκος του $\hat{\mathbf{z}}_\mathbf{0}$ κατά

dz. Εάν $(x^{(1)}, y^{(1)}, z^{(1)})$ είναι οι συντεταγμένες ενός οποιουδήποτε σημείου ως προς το σύστημα συντεταγμένων $\{\mathbf{1}\}$, τότε οι συντεταγμένες $(x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)})$ ως προς το σύστημα συντεταγμένων $\{\mathbf{0}\}$, θα είναι:

$$\begin{aligned} x^{(0)} &= x^{(1)} + dx \\ y^{(0)} &= y^{(1)} + dy \\ z^{(0)} &= z^{(1)} + dz \end{aligned} \tag{1}$$

Οι παραπάνω σχέσεις περιγράφονται με τη μορφή πινάκων ως εξής:

$$\begin{bmatrix} x^{(0)} \\ y^{(0)} \\ z^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \\ z^{(1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} \tag{2}$$

Ο πίνακας στήλη $\begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}$ είναι το **διάνυσμα μετατόπισης** και κατά τα γνωστά συμβολίζεται με $\mathbf{d}_{\mathbf{1}}^{\mathbf{0}}$. Υπενθυμίζεται ότι στον συμβολισμό πως ο άνω δείκτης είναι το σύστημα συντεταγμένων αναφοράς, ενώ ο κάτω δείκτης είναι το σύστημα συντεταγμένων που μετατοπίζεται.

Το διάνυσμα που δίνει την μετατόπιση του συστήματος $\{\mathbf{0}\}$ ως προς το σύστημα $\{\mathbf{1}\}$ συμβολίζεται με $\mathbf{d}_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}}$ και ισχύει ότι:

$$\mathbf{d}_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}} = -\mathbf{d}_{\mathbf{1}}^{\mathbf{0}}$$

Οι σχέσεις (2) γράφονται επίσης και ως ακολούθως:

$$\begin{bmatrix} x^{(0)} \\ y^{(0)} \\ z^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \\ z^{(1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} \tag{3}$$

ή σε πιο συμπαγή μορφή:

$$\begin{bmatrix} x^{(0)} \\ y^{(0)} \\ z^{(0)} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & dx \\ 0 & 1 & 0 & dy \\ 0 & 0 & 1 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \\ z^{(1)} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

Παρατηρήσεις:

1. Οι συντεταγμένες $\begin{bmatrix} x^{(0)} \\ y^{(0)} \\ z^{(0)} \\ 1 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \\ z^{(1)} \\ 1 \end{bmatrix}$ ονομάζονται **ομογενείς** συντεταγμένες στις τρεις διαστάσεις.
2. Ο μοναδιαίος πίνακας $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ αποτελεί ειδική μορφή του **πίνακα περιστροφής** στις τρεις διαστάσεις που θα αναφερθεί στη συνέχεια.

3. Ο πίνακας $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & dx \\ 0 & 1 & 0 & dy \\ 0 & 0 & 1 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ αποτελεί ειδική μορφή του **πίνακα ομογενούς μετασχηματισμού** στις τρεις διαστάσεις που θα αναφερθεί στη συνέχεια.

Στην περίπτωση όπου γίνονται πολλές διαδοχικές μετατοπίσεις, τότε η συνολική μετατόπιση είναι η σύνθεση όλων των επιμέρους μετατοπίσεων. Συγκεκριμένα, έστω το σύστημα συντεταγμένων αναφοράς $\{\mathbf{0}\}$ και έστω ένα σύστημα συντεταγμένων $\{\mathbf{1}\}$ το οποίο είναι μετατοπισμένο ως προς το $\{\mathbf{0}\}$ με διάνυσμα μετατόπισης $\mathbf{d_1^0} = \begin{bmatrix} dx_1 \\ dy_1 \\ dz_1 \end{bmatrix}$. Έστω ένα άλλο σύστημα συντεταγμένων $\{\mathbf{2}\}$, το οποίο είναι μετατοπισμένο ως προς το $\{\mathbf{1}\}$ με διάνυσμα μετατόπισης $\mathbf{d_2^1} = \begin{bmatrix} dx_2 \\ dy_2 \\ dz_2 \end{bmatrix}$. Η μετατόπιση του $\{\mathbf{2}\}$ ως προς το $\{\mathbf{0}\}$ έχει διάνυσμα μετατόπισης:

$$\mathbf{d_2^0} = \mathbf{d_1^0} + \mathbf{d_2^1} = \begin{bmatrix} dx_1 + dx_2 \\ dy_1 + dy_2 \\ dz_1 + dz_2 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας ομογενούς μετασχηματισμού σε αυτή την περίπτωση θα είναι $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & dx_1 + dx_2 \\ 0 & 1 & 0 & dy_1 + dy_2 \\ 0 & 0 & 1 & dz_1 + dz_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, ο οποίος είναι το γινόμενο των δύο επιμέρους πινάκων $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & dx_1 \\ 0 & 1 & 0 & dy_1 \\ 0 & 0 & 1 & dz_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & dx_2 \\ 0 & 1 & 0 & dy_2 \\ 0 & 0 & 1 & dz_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, δηλαδή $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & dx_1 + dx_2 \\ 0 & 1 & 0 & dy_1 + dy_2 \\ 0 & 0 & 1 & dz_1 + dz_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & dx_1 \\ 0 & 1 & 0 & dy_1 \\ 0 & 0 & 1 & dz_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & dx_2 \\ 0 & 1 & 0 & dy_2 \\ 0 & 0 & 1 & dz_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

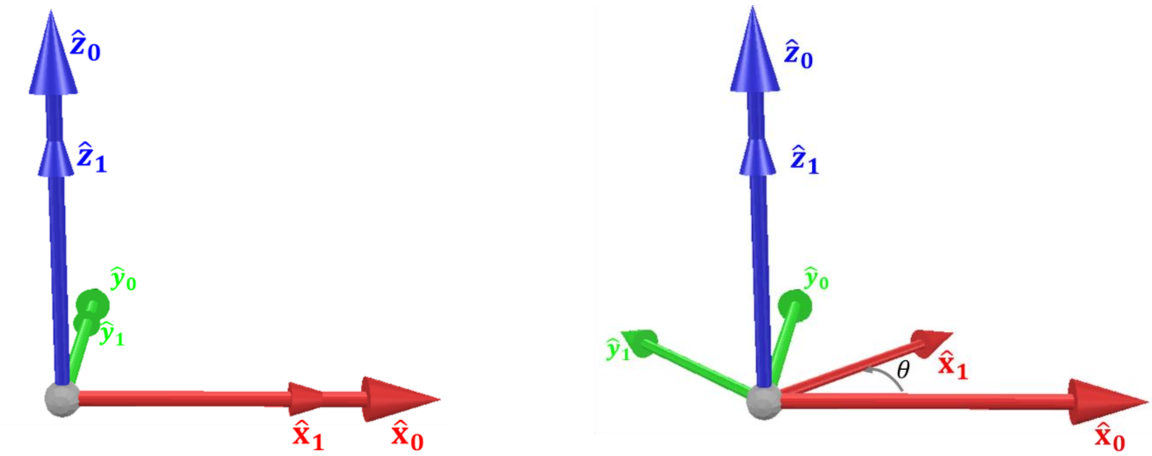
Τα παραπάνω γενικεύονται αντίστοιχα όταν έχουμε περισσότερες από δύο μετατοπίσεις.

3.3 Περιστροφή στις τρεις διαστάσεις

Υπάρχει ένα βασικό θεώρημα (θεώρημα του Euler), το οποίο λέει ότι οποιαδήποτε περιστροφή μπορεί να αναλυθεί σε τρεις επιμέρους περιστροφές ως προς τους τρεις άξονες συντεταγμένων, με την προϋπόθεση ότι δεν θα γίνουν δύο συνεχόμενες περιστροφές ως προς τον ίδιο άξονα. Με άλλα λόγια, εάν έχουμε μία αυθαίρετη περιστροφή αυτή θα μπορούσε να αναλυθεί σε μία περιστροφή ως προς τον άξονα z, μία περιστροφή ως προς τον άξονα y και μία περιστροφή ως προς τον άξονα x. Για να γίνει πιο κατανοητό το παραπάνω, αρχικά θα μελετηθεί η περιστροφή ως προς κάθε άξονα χωριστά και στη συνέχεια θα αναφερθεί πως αυτές οι επιμέρους περιστροφές μπορούν να συντεθούν για να δημιουργήσουν μία αυθαίρετη περιστροφή.

3.3.1 Περιστροφή ως προς τον άξονα z

Έστω δύο συστήματα συντεταγμένων το $\{\mathbf{0}\}$ και το $\{\mathbf{1}\}$, τα οποία αρχικά συμπίπτουν όπως φαίνεται στην Εικόνα 3-5(α). Έστω ότι το σύστημα $\{\mathbf{1}\}$ περιστρέφεται κατά γωνία θ ως προς τον κοινό άξονα z, όπως δείχνει η Εικόνα 3-5 (β). Η γωνία θ είναι η γωνία που σχηματίζουν οι άξονες x_0 και x_1 καθώς και οι άξονες y_0 και y_1.



(α) (β)

Εικόνα 3-5. (α) Δύο συστήματα συντεταγμένων που συμπίπτουν αρχικά. (β) Περιστροφή του ενός ως προς τον κοινό άξονα z.

Στόχος είναι να υπολογιστεί ο πίνακας περιστροφής $\mathbf{R}^{\mathbf{0}}_{\mathbf{1}(z)}$ του συστήματος συντεταγμένων $\{\mathbf{1}\}$ ως προς το σύστημα $\{0\}$ με άξονα περιστροφής τον άξονα z. Ο πίνακας περιστροφής θα έχει διαστάσεις 3×3 και ισχύει ότι:

- Η 1η στήλη έχει κατά σειρά τα συνημίτονα των γωνιών που σχηματίζει ο άξονας $\hat{\boldsymbol{x}}_1$ με τους άξονες $\hat{\boldsymbol{x}}_0$, $\hat{\boldsymbol{y}}_0$ και $\hat{\boldsymbol{z}}_0$.
- Η 2η στήλη έχει κατά σειρά τα συνημίτονα των γωνιών που σχηματίζει άξονας ο άξονας $\hat{\boldsymbol{y}}_1$ με τους άξονες $\hat{\boldsymbol{x}}_0$, $\hat{\boldsymbol{y}}_0$ και $\hat{\boldsymbol{z}}_0$.
- Η 3η στήλη έχει κατά σειρά τα συνημίτονα των γωνιών που σχηματίζει άξονας ο άξονας $\hat{\boldsymbol{z}}_1$ με τους άξονες $\hat{\boldsymbol{x}}_0$, $\hat{\boldsymbol{y}}_0$ και $\hat{\boldsymbol{z}}_0$.

Με βάση τα παραπάνω και την Εικόνα 3-5(β), παρατηρούμε ότι:

- Ο άξονας x_1 σχηματίζει γωνία θ με τον άξονα x_0, γωνία $90° - \theta$ με τον άξονα y_0 και είναι κάθετος με τον άξονα z_0. Συνεπώς, η 1η στήλη του πίνακα περιστροφής θα είναι:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & & \\ \cos(90° - \theta) & & \\ 0 & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & & \\ \sin\theta & & \\ 0 & & \end{bmatrix}$$

- Ο άξονας y_1 σχηματίζει γωνία $90° + \theta$ με τον άξονα x_0, γωνία θ με τον άξονα y_0 και είναι κάθετος με τον άξονα z_0. Η 2η στήλη του πίνακα περιστροφής συμπληρώνεται ως ακολούθως:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \cos(90° + \theta) & \\ \sin\theta & \cos\theta & \\ 0 & 0 & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & \\ \sin\theta & \cos\theta & \\ 0 & 0 & \end{bmatrix}$$

- Ο άξονας z_1 είναι παράλληλος με τον άξονα z_0 και κάθετος στους άξονες x_0 και y_0. Η τελική μορφή του πίνακα περιστροφής θα είναι:

$$\mathbf{R}^{\mathbf{0}}_{\mathbf{1}(\boldsymbol{z})} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

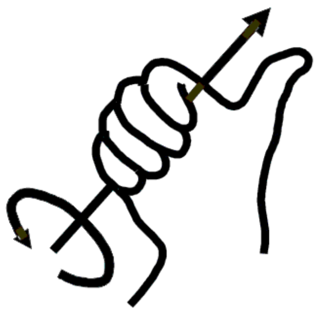
Συνεπώς, εάν ένα σημείο έχει συντεταγμένες $\left(x^{(1)}, y^{(1)}, z^{(1)}\right)$ ως προς το σύστημα συντεταγμένων $\{\mathbf{1}\}$, οι συντεταγμένες $\left(x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)}\right)$ ως προς το σύστημα συντεταγμένων $\{\mathbf{0}\}$ θα είναι:

$$\begin{bmatrix} x^{(0)} \\ y^{(0)} \\ z^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \\ z^{(1)} \end{bmatrix} \tag{6}$$

Ισοδύναμα, χρησιμοποιώντας ομογενείς συντεταγμένες στις τρεις διαστάσεις, έχουμε ότι:

$$\begin{bmatrix} x^{(0)} \\ y^{(0)} \\ z^{(0)} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \\ z^{(1)} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{7}$$

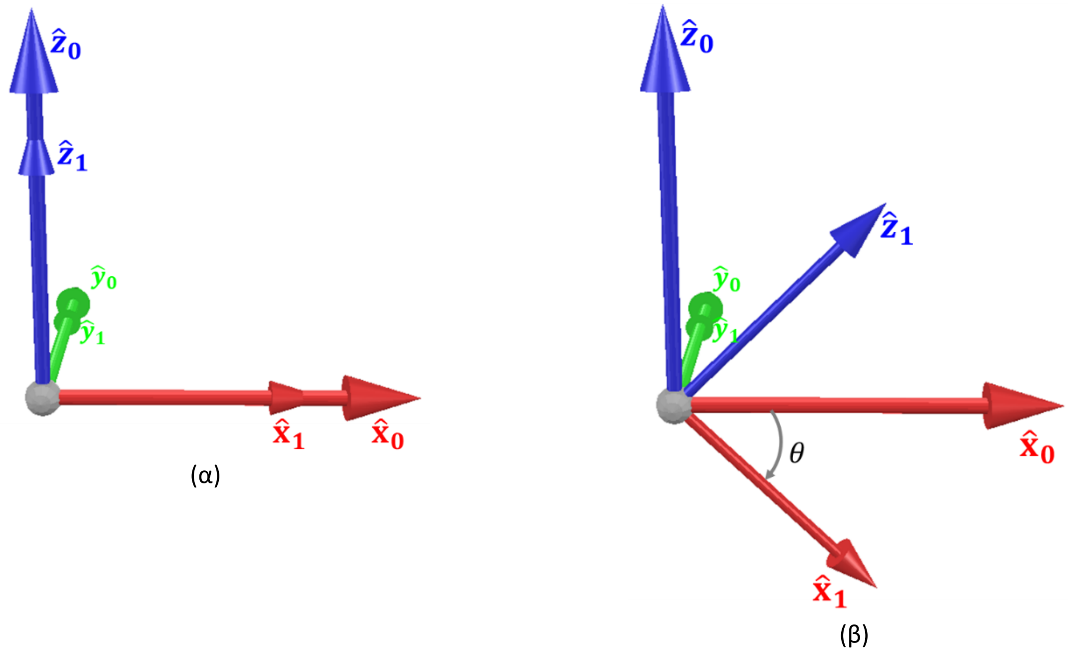
Για να βρούμε τη θετική φορά περιστροφής γύρω από άξονα κάνουμε το εξής: βάζουμε τον αντίχειρα του **δεξιού** χεριού να δείχνει την κατεύθυνση του άξονα ως προς τον οποίο γίνεται περιστροφή και καμπυλώνουμε τα υπόλοιπα δάχτυλα ώστε να «αγκαλιάσουν» τον άξονα. Η φορά που σχηματίζουν τα καμπυλωμένα δάχτυλα είναι η θετική φορά περιστροφής (Εικόνα 3-6).



Εικόνα 3-6. Εύρεση θετικής φοράς περιστροφής ως προς άξονα.

3.3.2 Περιστροφή ως προς τον άξονα y

Έστω δύο συστήματα συντεταγμένων το $\{\mathbf{0}\}$ και το $\{\mathbf{1}\}$, τα οποία αρχικά συμπίπτουν όπως φαίνεται στην Εικόνα 3-7(α). Έστω ότι το σύστημα $\{\mathbf{1}\}$ περιστρέφεται κατά γωνία θ ως προς τον κοινό άξονα y, όπως δείχνει η Εικόνα 3-7(β). Η γωνία θ είναι η γωνία που σχηματίζουν οι άξονες x_0 και x_1 καθώς και οι άξονες z_0 και z_1.



Εικόνα 3-7. (α) Δύο συστήματα συντεταγμένων που συμπίπτουν αρχικά. (β) Περιστροφή του ενός ως προς τον κοινό άξονα y.

Για τον πίνακα περιστροφής $\mathbf{R}^{\mathbf{0}}_{\mathbf{1}(y)}$ θα ισχύει όπως και πριν ότι:

- Η 1η στήλη έχει κατά σειρά τα συνημίτονα των γωνιών που σχηματίζει ο άξονας $\hat{\boldsymbol{x}}_1$ με τους άξονες $\hat{\boldsymbol{x}}_0$, $\hat{\boldsymbol{y}}_0$ και $\hat{\boldsymbol{z}}_0$.
- Η 2η στήλη έχει κατά σειρά τα συνημίτονα των γωνιών που σχηματίζει άξονας ο άξονας $\hat{\boldsymbol{y}}_1$ με τους άξονες $\hat{\boldsymbol{x}}_0$, $\hat{\boldsymbol{y}}_0$ και $\hat{\boldsymbol{z}}_0$.
- Η 3η στήλη έχει κατά σειρά τα συνημίτονα των γωνιών που σχηματίζει άξονας ο άξονας $\hat{\boldsymbol{z}}_1$ με τους άξονες $\hat{\boldsymbol{x}}_0$, $\hat{\boldsymbol{y}}_0$ και $\hat{\boldsymbol{z}}_0$.

Επομένως:

- Ο άξονας x_1 σχηματίζει γωνία θ με τον άξονα x_0, είναι κάθετος στον άξονα y_0 και σχηματίζει γωνία $90° + \theta$ με τον άξονα z_0. Συνεπώς, η 1η στήλη του πίνακα περιστροφής θα είναι:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & & \\ 0 & & \\ \cos(90° + \theta) & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & & \\ 0 & & \\ -\sin\theta & & \end{bmatrix}$$

- Ο άξονας y_1 είναι παράλληλος με τον άξονα y_0 και κάθετος στους άλλους δύο. Η 2η στήλη του πίνακα περιστροφής συμπληρώνεται ως ακολούθως:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \\ 0 & 1 & \\ -\sin\theta & 0 & \end{bmatrix}$$

- Ο άξονας z_1 σχηματίζει γωνία $90° - \theta$ με τον άξονα x_0, είναι κάθετος στον άξονα y_0 και σχηματίζει γωνία θ με τον άξονα z_0. Η 3η στήλη του πίνακα περιστροφής θα είναι:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \cos(90° - \theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Η τελική μορφή του πίνακα περιστροφής θα είναι:

$$\mathbf{R}^{\mathbf{0}}_{\mathbf{1}(y)} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{8}$$

Συνεπώς, εάν ένα σημείο έχει συντεταγμένες $\left(x^{(1)}, y^{(1)}, z^{(1)}\right)$ ως προς το σύστημα συντεταγμένων $\{\mathbf{1}\}$, οι συντεταγμένες $\left(x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)}\right)$ ως προς το σύστημα συντεταγμένων $\{\mathbf{0}\}$ θα είναι:

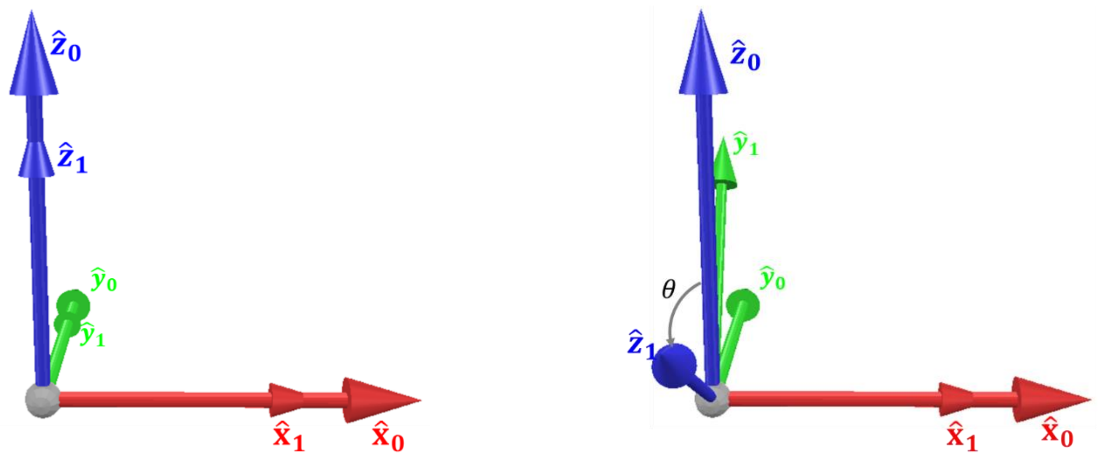
$$\begin{bmatrix} x^{(0)} \\ y^{(0)} \\ z^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \\ z^{(1)} \end{bmatrix} \tag{9}$$

Ισοδύναμα, χρησιμοποιώντας ομογενείς συντεταγμένες στις τρεις διαστάσεις, έχουμε ότι:

$$\begin{bmatrix} x^{(0)} \\ y^{(0)} \\ z^{(0)} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \\ z^{(1)} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{10}$$

3.3.3 Περιστροφή ως προς τον άξονα x

Έστω δύο συστήματα συντεταγμένων το $\{\mathbf{0}\}$ και το $\{\mathbf{1}\}$, τα οποία αρχικά συμπίπτουν όπως φαίνεται στην Εικόνα 3-8(α). Έστω ότι το σύστημα $\{\mathbf{1}\}$ περιστρέφεται κατά γωνία θ ως προς τον κοινό άξονα x, όπως δείχνει η Εικόνα 3-8(β). Η γωνία θ είναι η γωνία που σχηματίζουν οι άξονες y_0 και y_1 καθώς και οι άξονες z_0 και z_1.



(α) (β)

Εικόνα 3-8. (α) Δύο συστήματα συντεταγμένων που συμπίπτουν αρχικά. (β) Περιστροφή του ενός ως προς τον κοινό άξονα x.

Για τον πίνακα περιστροφής $\mathbf{R}^{\mathbf{0}}_{\mathbf{1}(x)}$ θα ισχύει:

- Ο άξονας x_1 είναι παράλληλος με τον άξονα x_0 και κάθετος στους άλλους δύο. Η 1η στήλη του πίνακα περιστροφής συμπληρώνεται ως ακολούθως:

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ 0 & & \\ 0 & & \end{bmatrix}$$

- Ο άξονας y_1 είναι κάθετος στον άξονα x_0, σχηματίζει γωνία θ με τον άξονα y_0 και σχηματίζει γωνία $90° - \theta$ με τον άξονα z_0. Η 2η στήλη του πίνακα περιστροφής θα είναι:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \\ 0 & \cos\theta & \\ 0 & \cos(90° - \theta) & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \\ 0 & \cos\theta & \\ 0 & \sin\theta & \end{bmatrix}$$

- Ο άξονας z_1 είναι κάθετος στον άξονα x_0, σχηματίζει γωνία $90° + \theta$ με τον άξονα y_0 και σχηματίζει γωνία θ με τον άξονα z_0. Η 3η στήλη του πίνακα περιστροφής θα είναι:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \cos(90° + \theta) \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Η τελική μορφή του πίνακα περιστροφής θα είναι:

$$\mathbf{R}_{\mathbf{1}(x)}^{\mathbf{0}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{11}$$

Συνεπώς, εάν ένα σημείο έχει συντεταγμένες $\left(x^{(1)}, y^{(1)}, z^{(1)}\right)$ ως προς το σύστημα συντεταγμένων $\{\mathbf{1}\}$, οι συντεταγμένες $\left(x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)}\right)$ ως προς το σύστημα συντεταγμένων $\{\mathbf{0}\}$ θα είναι:

$$\begin{bmatrix} x^{(0)} \\ y^{(0)} \\ z^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \\ z^{(1)} \end{bmatrix} \tag{12}$$

Ισοδύναμα, χρησιμοποιώντας ομογενείς συντεταγμένες στις τρεις διαστάσεις, έχουμε ότι:

$$\begin{bmatrix} x^{(0)} \\ y^{(0)} \\ z^{(0)} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \\ z^{(1)} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{13}$$

3.3.4 Σύνθετη περιστροφή

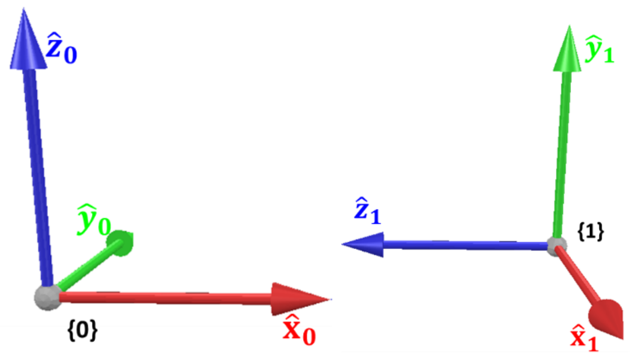
Στην περίπτωση που έχουμε μία σύνθετη περιστροφή, αυτή μπορεί να αναλυθεί ως συνδυασμός των τριών προαναφερθεισών περιστροφών. Συγκεκριμένα, ο πίνακας περιστροφής της σύνθετης περιστροφής $\mathbf{R}$ γράφεται ως ακολούθως:

$$\mathbf{R}_{\mathbf{1}}^{\mathbf{0}} = \mathbf{R}_{\mathbf{1}(x)}^{\mathbf{0}} \mathbf{R}_{\mathbf{1}(y)}^{\mathbf{0}} \mathbf{R}_{\mathbf{1}(z)}^{\mathbf{0}}$$

Εντούτοις, ο πίνακας περιστροφής μπορεί να σχηματιστεί πιο εύκολα υπολογίζοντας τα συνημίτονα των γωνιών των αξόνων των δύο συστημάτων συντεταγμένων, όπως αναφέρθηκε προηγουμένως.

Παράδειγμα 3-2

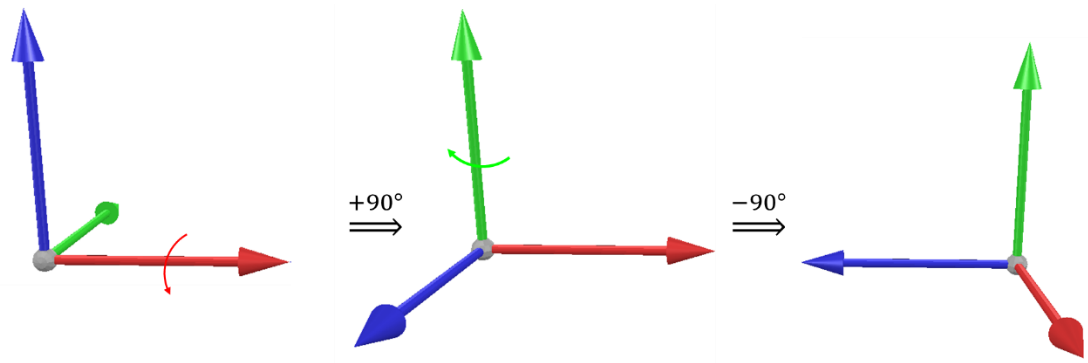
Έστω τα δύο συστήματα συντεταγμένων της εικόνας. Να βρεθεί ο πίνακας που περιγράφει την περιστροφή του συστήματος {1} ως προς το {0}.



Λύση

1ος Τρόπος

Προσπαθούμε να αναλύσουμε την περιστροφή σε επιμέρους περιστροφές ως προς τους άξονες. Συγκεκριμένα παρατηρούμε ότι εάν κάνουμε μία περιστροφή ως προς τον άξονα x κατά $+90°$ ο άξονας y θα έρθει στην επιθυμητή θέση. Εάν στη συνέχεια κάνουμε μία περιστροφή ως προς το νέο άξονα y κατά $-90°$ θα προκύψουν οι τελικές θέσεις των αξόνων.



Επομένως ο πίνακας περιστροφής θα είναι:

$$\mathbf{R_1^0} = \mathbf{R^0_{1(\mathit{x})}}\mathbf{R^0_{1(\mathit{y})}}\mathbf{R^0_{1(\mathit{z})}}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2ος Τρόπος

Υπάρχει όμως πιο εύκολος τρόπος ειδικά όταν οι γωνίες περιστροφής είναι $\pm 90°$, με χρήση των συνημιτόνων των γωνιών μεταξύ των αξόνων των δύο συστημάτων συντεταγμένων:

- $\hat{\mathbf{x}}_1$ αντιπαράλληλο με $\hat{\mathbf{y}}_0$: η 1η στήλη του πίνακα θα είναι $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

- $\hat{\mathbf{y}}_{\mathbf{1}}$ παράλληλο με $\hat{\mathbf{z}}_{\mathbf{0}}$: η 2η στήλη του πίνακα θα είναι $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.
- $\hat{\mathbf{z}}_{\mathbf{1}}$ αντιπαράλληλο με $\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{0}}$: η 3η στήλη του πίνακα θα είναι $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Συνδυάζοντας τα παραπάνω προκύπτει πάλι ότι $\mathbf{R}_{\mathbf{1}}^{\mathbf{0}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.■

3.3.5 Βασικές ιδιότητες πίνακα περιστροφής

Ένας έγκυρος πίνακας περιστροφής έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

- Το άθροισμα των τετραγώνων των τιμών κάθε γραμμής και κάθε στήλης πρέπει να ισούται με μονάδα.
- Τα δύο συστήματα συντεταγμένων στα οποία αναφέρεται πρέπει να τηρούν τον κανόνα του δεξιού χεριού.

3.4 Μετατόπιση και περιστροφή στις τρεις διαστάσεις

Σε περίπτωση που έχουμε περιστροφή και μετατόπιση, τότε σε αντιστοιχία με τις δύο διαστάσεις, θα είναι:

$$\begin{bmatrix} x^{(0)} \\ y^{(0)} \\ z^{(0)} \end{bmatrix} = \mathbf{R}_{\mathbf{1}}^{\mathbf{0}} \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \\ z^{(1)} \end{bmatrix} + \mathbf{d}_{\mathbf{1}}^{\mathbf{0}} \tag{14}$$

όπου $\mathbf{R}_{\mathbf{1}}^{\mathbf{0}}$ είναι ο 3×3 πίνακας περιστροφής στη μορφή $\begin{bmatrix} r_{00} & r_{01} & r_{02} \\ r_{10} & r_{11} & r_{12} \\ r_{20} & r_{21} & r_{22} \end{bmatrix}$ και $\mathbf{d}_{\mathbf{1}}^{\mathbf{0}} = \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}$ είναι το διάνυσμα μετατόπισης. Επίσης ορίζεται και ο πίνακας **ομογενούς μετασχηματισμού**, ο οποίος είναι 4×4 και είναι στη μορφή:

$$\mathbf{H}_{\mathbf{1}}^{\mathbf{0}} = \begin{bmatrix} r_{00} & r_{01} & r_{02} & dx \\ r_{10} & r_{11} & r_{12} & dy \\ r_{20} & r_{21} & r_{22} & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

και ισχύει ότι:

$$\begin{bmatrix} x^{(0)} \\ y^{(0)} \\ z^{(0)} \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{H}_{\mathbf{1}}^{\mathbf{0}} \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \\ z^{(1)} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{15}$$

Παράδειγμα 3-3

Έστω δύο συστήματα συντεταγμένων, το $\{\mathbf{0}\}$ και το $\{\mathbf{1}\}$ και ένα σημείο που έχει συντεταγμένες $(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{0})$ ως προς το σύστημα συντεταγμένων $\{\mathbf{1}\}$. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου ως

προς το σύστημα $\{0\}$, αν το σύστημα συντεταγμένων $\{1\}$ έχει μετατοπιστεί με διάνυσμα $\begin{bmatrix} \mathbf{5} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{2} \end{bmatrix}$ και έχει υποστεί περιστροφή $45°$ ως προς τον άξονα x και $-30°$ ως προς τον άξονα z.

Λύση

Είναι $\begin{bmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \\ z^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$. Ο πίνακας περιστροφής ως προς τον άξονα x είναι $\mathbf{R^0_{1(x)}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 45° & -\sin 45° \\ 0 & \sin 45° & \cos 45° \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.707 & -0.707 \\ 0 & 0.707 & 0.707 \end{bmatrix}$. Καθώς δεν υπάρχει περιστροφή ως προς τον άξονα y, ο αντίστοιχος πίνακας θα είναι $\mathbf{R^0_{1(y)}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Ο πίνακας περιστροφής ως προς τον άξονα z είναι $\mathbf{R^0_{1(z)}} = \begin{bmatrix} \cos(-30°) & -\sin(-30°) & 0 \\ \sin(-30°) & \cos(-30°) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.866 & 0.5 & 0 \\ -0.5 & 0.866 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Ο συνολικός πίνακας περιστροφής θα είναι: $\mathbf{R^0_1} = \mathbf{R^0_{1(\mathit{x})}}\mathbf{R^0_{1(\mathit{y})}}\mathbf{R^0_{1(\mathit{z})}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.707 & -0.707 \\ 0 & 0.707 & 0.707 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.866 & 0.5 & 0 \\ -0.5 & 0.866 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.866 & 0.5 & 0 \\ -0.3535 & 0.6123 & -0.707 \\ -0.3535 & 0.6123 & 0.707 \end{bmatrix}$.

Ο αντίστοιχος πίνακας ομογενούς μετασχηματισμού θα είναι:

$$\mathbf{H^0_1} = \begin{bmatrix} 0.866 & 0.5 & 0 & 5 \\ -0.3535 & 0.6123 & -0.707 & 0 \\ -0.3535 & 0.6123 & 0.707 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Συνεπώς, θα έχουμε ότι:

$$\begin{bmatrix} x^{(0)} \\ y^{(0)} \\ z^{(0)} \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{H^0_1}\begin{bmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \\ z^{(1)} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.866 & 0.5 & 0 & 5 \\ -0.3535 & 0.6123 & -0.707 & 0 \\ -0.3535 & 0.6123 & 0.707 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.9 \\ 0.87 \\ 2.9 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Άρα οι συντεταγμένες θα είναι (6.9,0.87,2.9).■