ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΑΤΤΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΒΙΟΪΑΤΡΙΚΗΣ

# ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΡΟΜΠΟΤΙΚΗ

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΤΡΟΧΙΑΣ

Π. ΑΣΒΕΣΤΑΣ

Αναπληρωτής Καθηγητής

ΑΙΓΑΛΕΩ 2019

# Πίνακας Περιεχομένων

# Λίστα Εικόνων

# 5 Σχεδιασμός Τροχιάς

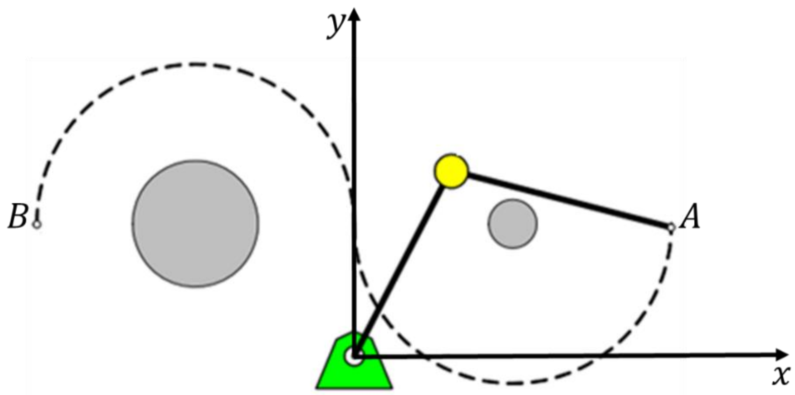
Στο παρόν κεφάλαιο εξετάζεται ο τρόπος με τον οποίο μπορεί να σχεδιαστεί η πορεία που θα διαγράψει ο τελικός επενεργητής για να μεταβεί από ένα σημείο σε ένα άλλο. Η διαδικασία περιλαμβάνει δύο βήματα:

- Ορισμός αρχικών συνθηκών: ορίζονται η χρονική διάρκεια της κίνησης, τα δύο σημεία ανάμεσα στα οποία θα κινηθεί ο τελικός επενεργητής, και προαιρετικά η ταχύτητα και η επιτάχυνση στα σημεία αυτά.
- Ορισμός της μορφής της τροχιάς: καθορίζεται αν η τροχιά θα είναι αυθαίρετη, ευθύγραμμη καμπυλόγραμμη ή αν ο τελικός επενεργητής θα πρέπει να περάσει από συγκεκριμένα ενδιάμεσα σημεία.

Το αποτέλεσμα αυτής της διαδικασίας είναι η εύρεση μίας χρονικής συνάρτησης για κάθε συντεταγμένη. Οι συναρτήσεις αυτές προσδιορίζουν τη θέση που θα έχει ο τελικός επενεργητής κάθε χρονική στιγμή, δηλαδή οι συντεταγμένες του τελικού επενεργητή θεωρούνται πλέον ότι μεταβάλλονται με τον χρόνο $(x(t), y(t), z(t))$.

Επομένως, έχοντας εξάγει τις αντίστροφες σχέσεις, όπως περιεγράφηκε στο Κεφάλαιο 4, και ξέροντας την επιθυμητή θέση του τελικού επενεργητή κάθε χρονική στιγμή, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε τις τιμές των μεταβλητών κάθε άρθρωσης που απαιτούνται για να τη μετάβαση στη συγκεκριμένη θέση.

Η Εικόνα 5-1 παρουσιάζει ένα παράδειγμα της διαδρομής που διαγράφει ο τελικός επενεργητής ενός απλού βραχίονα μεταξύ δύο σημείων $A$ και $B$ για να αποφύγει δύο εμπόδια.




Εικόνα 5-1. Κάτοψη της διαδρομής στο επίπεδο $x - y$ του τελικού επενεργητή ενός απλού βραχίονα για την αποφυγή δύο εμποδίων.

## 5.1 Ταχύτητα και επιτάχυνση

Στην ουσία στον σχεδιασμό τροχιάς, αυτό που προσπαθούμε να κάνουμε είναι να βρούμε πως μεταβάλλονται με τον χρόνο οι τρεις συντεταγμένες του τελικού επενεργητή. Για τον σκοπό αυτό, πολλές φορές γίνεται χρήση της ταχύτητας και της επιτάχυνσης του τελικού επενεργητή. Η ταχύτητα και η επιτάχυνση έχουν τρεις συνιστώσες που αντιστοιχούν στους τρεις άξονες του συστήματος συντεταγμένων αναφοράς. Συγκεκριμένα, για έναν τελικό επενεργητή του οποίου οι συντεταγμένες δίνονται από τις χρονικές συναρτήσεις $(x(t), y(t), z(t))$, η ταχύτητα του κατά μήκος ενός άξονα ορίζεται ως η πρώτη παράγωγος ως προς τον χρόνο της αντίστοιχης συντεταγμένης:

Ταχύτητα κατά μήκος του άξονα $x$: $\frac{dx(t)}{dt}$

Ταχύτητα κατά μήκος του άξονα $y$: $\frac{dy(t)}{dt}$

Ταχύτητα κατά μήκος του άξονα $z$: $\frac{dz(t)}{dt}$

Για συντομογραφία, χρησιμοποιούνται επίσης τα ακόλουθα σύμβολα:

$$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

$$\dot{y}(t) = \frac{dy(t)}{dt}$$

$$\dot{z}(t) = \frac{dz(t)}{dt}$$

Η μονάδα μέτρησης της ταχύτητας στο διεθνές σύστημα (SI) είμαι $\mathrm{m/s}$ (μέτρα ανά δευτερόλεπτο).

Όπως έχει οριστεί η ταχύτητα μπορεί να πάρει και αρνητικής τιμές, το οποίο σημαίνει ότι με το πέρασμα του χρόνου ο τελικός επενεργητής μεταβαίνει σε μικρότερες τιμές κατά μήκος του αντίστοιχου άξονα.

Αντίστοιχα, η επιτάχυνση κατά μήκος ενός άξονα ορίζεται ως η δεύτερη παράγωγος ως προς τον χρόνο της αντίστοιχης συντεταγμένης (ή η πρώτη παράγωγος της ταχύτητας):

Επιτάχυνση κατά μήκος του άξονα $x$: $\frac{d^2x(t)}{dt^2}$

Επιτάχυνση κατά μήκος του άξονα $y$: $\frac{d^2y(t)}{dt^2}$

Επιτάχυνση κατά μήκος του άξονα $z$: $\frac{d^2z(t)}{dt^2}$

Για συντομογραφία, χρησιμοποιούνται επίσης τα ακόλουθα σύμβολα:

$$\ddot{x}(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

$$\ddot{y}(t) = \frac{d^2y(t)}{dt^2}$$

$$\ddot{z}(t) = \frac{d^2z(t)}{dt^2}$$

Η μονάδα μέτρησης της επιτάχυνσης στο διεθνές σύστημα (SI) είμαι $\mathrm{m/s^2}$ (μέτρα ανά δευτερόλεπτο τετράγωνο).

Αρνητική τιμή της επιτάχυνσης σημαίνει ότι με το πέρασμα του χρόνου ο τελικός επενεργητής κινείται πιο αργά.

**Παράδειγμα 5-1**

**Έστω ένας βραχίονας που κινείται στο επίπεδο $x - y$ (δηλαδή $z(t) = 0$ κάθε χρονική στιγμή) με $x(t) = 20t^3 - 30t^2 + 4$ και $y(t) = 9t^3 - 9t^2 + 6$, όπου η χρονική μεταβλητή $t$ είναι σε δευτερόλεπτα και οι συντεταγμένες σε εκατοστά. Να υπολογιστούν η ταχύτητα και η επιτάχυνση τη χρονική στιγμή 0,5 $s$.**

**Λύση**

Προφανώς, η ταχύτητα και η επιτάχυνση κατά μήκος του άξονα $z$ είναι μηδενικές κάθε χρονική στιγμή.

Η ταχύτητα κατά μήκος του άξονα $x$ είναι $\dot{x}(t) = 60t^2 - 60t$ και κατά μήκος του άξονα $y$ είναι $\dot{y}(t) = 27t^2 - 18t$. Επομένως, για $t = 0{,}5\ \mathrm{s}$, είναι $\dot{x}(0{,}5) = 60(0{,}5)^2 - 60(0{,}5) = -15\ \mathrm{cm/s}$ και $\dot{y}(0{,}5) = 27(0{,}5)^2 - 18(0{,}5) = -2{,}25\ \mathrm{cm/s}$.

Η επιτάχυνση κατά μήκος του άξονα $x$ είναι $\ddot{x}(t) = 120t - 60$ και κατά μήκος του άξονα $y$ είναι $\ddot{y}(t) = 54t - 18$. Για $t = 0{,}5\ \mathrm{s}$, είναι $\ddot{x}(0{,}5) = 120(0{,}5) - 60 = 0\ \mathrm{cm/s^2}$ και $\ddot{y}(0{,}5) = 54(0{,}5) - 18 = 9\ \mathrm{cm/s^2}$. ■

## 5.2 Συμβολισμοί

Στην ανάλυση που ακολουθεί, θεωρούμε ότι δίνονται οι συντεταγμένες του αρχικού σημείου $(x_0, y_0, z_0)$ και του τελικού σημείου $(x_T, y_T, z_T)$. Επίσης, δίνεται η χρονική διάρκεια της κίνησης $(T)$ και για απλοποίηση των υπολογισμών θεωρείται ότι η κίνηση ξεκινάει τη χρονική στιγμή 0 s. Επίσης, μπορεί να δίνονται οι συνιστώσες της ταχύτητας στο αρχικό σημείο (δηλαδή όταν ξεκινάει η κίνηση), οι οποίες συμβολίζονται $(\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$ και στο τελικό σημείο (όταν τελειώνει η κίνηση) $(\dot{x}_T, \dot{y}_T, \dot{z}_T)$. Αντίστοιχα, οι επιταχύνσεις στα δύο οριακά σημεία θα συμβολίζονται με $(\ddot{x}_0, \ddot{y}_0, \ddot{z}_0)$ και $(\ddot{x}_T, \ddot{y}_T, \ddot{z}_T)$.

## 5.3 Ευθύγραμμη τροχιά

Στην περίπτωση αυτή, είναι γνωστά δεδομένα στις δύο οριακές θέσεις (αρχικό και τελικό σημείο και προαιρετικά ταχύτητα, επιτάχυνση σε αυτά). Η τροχιά που θα διαγράψει ο τελικός επενεργητής θα είναι ευθύγραμμη. Συγκεκριμένα, η τροχιά θα υπακούει στις ακόλουθες εξισώσεις:

$$y = y_0 + \frac{y_T - y_0}{x_T - x_0}(x - x_0) \tag{1}$$

$$z = z_0 + \frac{z_T - z_0}{x_T - x_0}(x - x_0) \tag{2}$$

Συνεπώς, εάν εξαχθεί η χρονική συνάρτηση $x(t)$, τότε με χρήση των προηγούμενων σχέσεων θα προκύψουν και οι $y(t)$ και $z(t)$.

Θα εξεταστούν τρεις περιπτώσεις:

- Είναι γνωστά μόνο το αρχικό και το τελικό σημείο.
- Είναι γνωστά το αρχικό και το τελικό σημείο καθώς και η ταχύτητα σε αυτά.

- Είναι γνωστά το αρχικό και το τελικό σημείο, η ταχύτητα και η επιτάχυνση σε αυτά.

### 5.3.1 Γνωστά μόνο αρχικό και τελικό σημείο

Έστω ότι δίνονται μόνο οι συντεταγμένες του αρχικού σημείου $(x_0, y_0, z_0)$ και του τελικού σημείου $(x_T, y_T, z_T)$. Η χρονική συνάρτηση $x(t)$ επιλέγεται να έχει πολυωνυμική μορφή. Αφού είναι γνωστές δύο τιμές (στο αρχικό και στο τελικό σημείο), επιλέγουμε ένα πολυώνυμο 1$^{ου}$ βαθμού (ως προς τον χρόνο), αφού αυτό έχει δύο συντελεστές. Έτσι θεωρούμε ότι είναι:

$$x(t) = a_1 t + a_0$$

Οι συντελεστές $\alpha_0, \alpha_1$ προσδιορίζονται ως ακολούθως: τη χρονική στιγμή 0 ο τελικός επενεργητής πρέπει να είναι στη θέση $(x_0, y_0, z_0)$, δηλ.:

$$x(0) = x_0 \Rightarrow a_0 = x_0$$

Αντίστοιχα, τη χρονική στιγμή $T$ ο τελικός επενεργητής πρέπει να είναι στη θέση $(x_T, y_T, z_T)$:

$$x(T) = x_T \Rightarrow a_1 T + a_0 = x_T \Rightarrow a_1 = \frac{x_T - x_0}{T}$$

Επομένως, θα είναι:

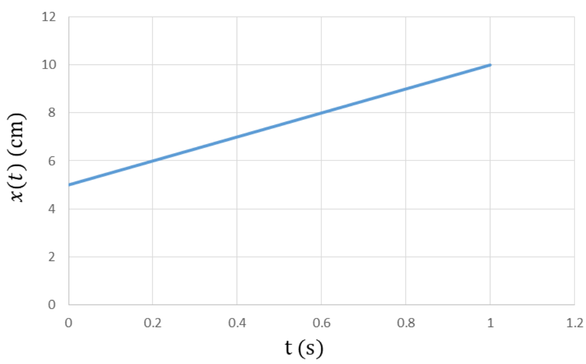
$$x(t) = \frac{x_T - x_0}{T} t + x_0$$

και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτουν η $y(t)$ και η $z(t)$, οι οποίες θα είναι και αυτές πολυώνυμα πρώτου βαθμού και είναι εύκολο να δειχτεί ότι θα ισχύει ότι:

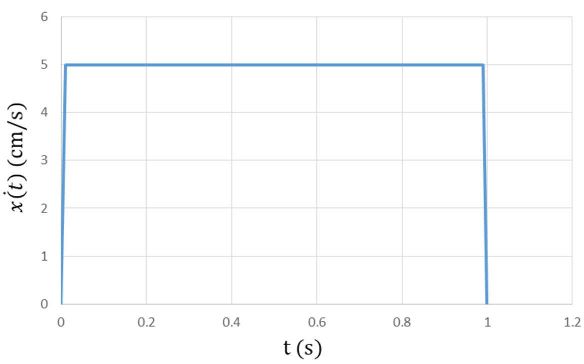
$$y(t) = \frac{y_T - y_0}{T} t + y_0$$

$$z(t) = \frac{z_T - z_0}{T} t + z_0$$

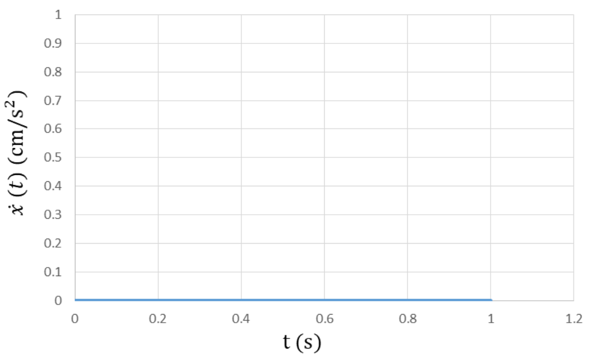
Εύκολα διαπιστώνεται ότι η ταχύτητα είναι σταθερή κατά μήκος κάθε άξονα, ενώ η επιτάχυνση είναι μηδενική. Αν επιθυμείται ο βραχίονας να είναι σε κατάσταση ηρεμίας στο αρχικό και στο τελικό σημείο (δηλαδή να ξεκινάει σταματημένος και τερματίζει πάλι σταματημένος), τότε μπορεί να κάνει απότομες κινήσεις σε αυτά τα σημεία. Αυτό οφείλεται στο ότι η ταχύτητα δεν αυξάνει σταδιακά από τη μηδενική τιμή στη σταθερή τιμή όταν ξεκινάει την κίνηση (αντίστοιχα δεν μειώνεται σταδιακά από τη σταθερή τιμή στη μηδενική τιμή όταν τερματίζει την κίνηση) (Εικόνα 5-2).




(α)




(β)




(γ)

Εικόνα 5-2. Καμπύλες για βραχίονα που ξεκινάει και τερματίζει με μηδενική ταχύτητα όταν είναι γνωστά μόνο δύο σημεία με χρήση πολυώνυμου 1ου βαθμού. (α) Απόσταση. (β) Ταχύτητα. (γ) Επιτάχυνση. Παρατηρείται ασυνέχεια στην ταχύτητα στην αρχή και στο τέλος της κίνησης.

**Παράδειγμα 5-2**

**Ο τελικός επενεργητής ενός βραχίονα κινείται αποκλειστικά στο επίπεδο $x - y$. Το αρχικό σημείο έχει συντεταγμένες (10,0,0) και το τελικό σημείο έχει συντεταγμένες (0,10,0). Η διάρκεια της κίνησης είναι $1\,s$. Να βρεθεί η χρονική συνάρτηση για κάθε συντεταγμένη του τελικού επενεργητή χρησιμοποιώντας πολυώνυμα 1ου βαθμού.**

**Λύση**

Είναι $(x_0, y_0, z_0) = (10{,}0{,}0)$ και $(x_T, y_T, z_t) = (0{,}10{,}0)$. Αφού ο επενεργητής κινείται αποκλειστικά στο επίπεδο $x - y$ θα είναι $z(t) = 0$.

Θεωρούμε πολυώνυμα 1ου βαθμού για τη $x(t)$:

$$x(t) = a_1 t + a_0$$

Τη χρονική στιγμή 0 θα ισχύει:

$$x(0) = 10 \Rightarrow \alpha_0 = 10$$

Τη χρονική στιγμή 1 s θα είναι:

$$x(1) = 0 \Rightarrow a_1 + a_0 = 0 \Rightarrow \alpha_1 + 10 = 0 \Rightarrow a_1 = -10$$

Συνεπώς:

$$x(t) = -10t + 10$$

Επιπλέον είναι:

$$y(t) = y_0 + \frac{y_T - y_0}{x_T - x_0}(x(t) - x_0) \Rightarrow y(t) = 0 + \frac{10 - 0}{0 - 10}(x(t) - 10) \Rightarrow y(t) = 10 - x(t)$$

$$y(t) = 10t \blacksquare$$

### 5.3.2 Γνωστά αρχικό και τελικό σημείο και ταχύτητες

Έστω τώρα ότι εκτός από τις συντεταγμένες του αρχικού σημείου $(x_0, y_0, z_0)$ και του τελικού σημείου $(x_T, y_T, z_T)$ είναι γνωστές και οι ταχύτητες σε αυτά $(\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$ και $(\dot{x}_T, \dot{y}_T, \dot{z}_T)$. Αφού για κάθε συντεταγμένη είναι γνωστές τέσσερις τιμές, μπορούμε να επιλέξουμε ένα πολυώνυμο 3^ου^ βαθμού (ως προς τον χρόνο), αφού αυτό έχει τέσσερις συντελεστές. Έτσι θεωρούμε ότι είναι:

$$x(t) = a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0$$

Αρχικά, υπολογίζουμε την πρώτη παράγωγο της $x(t)$:

$$\dot{x}(t) = 3a_3 t^2 + 2a_2 t + a_1$$

Τη χρονική στιγμή 0 είναι:

$$x(0) = x_0 \Rightarrow \alpha_0 = x_0$$

$$\dot{x}(0) = \dot{x}_0 \Rightarrow a_1 = \dot{x}_0$$

Αντίστοιχα, για τη χρονική στιγμή $T$ έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} x(T) = x_T \\ \dot{x}(T) = \dot{x}_T \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} a_3T^3 + a_2T^2 + a_1T + a_0 = x_T \\ 3a_3T^2 + 2a_2T + a_1 = \dot{x}_T \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} T^3 \cdot a_3 + T^2 \cdot a_2 = x_T - x_0 - \dot{x}_0 T \\ 3T^2 \cdot a_3 + 2T \cdot a_2 = \dot{x}_T - \dot{x}_0 \end{aligned}\right\}$$

Οι παραπάνω δύο εξισώσεις σχηματίζουν ένα σύστημα με αγνώστους τα $\alpha_2$ και $\alpha_3$. Επιλύοντας αυτό το σύστημα προκύπτει ότι:

$$\alpha_2 = \frac{3(x_T - x_0) - (\dot{x}_T + 2\dot{x}_0)T}{T^2}$$

$$\alpha_3 = \frac{-2(x_T - x_0) + (\dot{x}_T + \dot{x}_0)T}{T^3}$$

Αν επιθυμούμε οι ταχύτητες να είναι μηδενικές στα δύο σημεία (δηλ. ο βραχίονας να ξεκινάει και να καταλήγει σε ηρεμία), τότε οι συντελεστές θα είναι:

$$\alpha_0 = x_0$$

$$\alpha_1 = 0$$

$$\alpha_2 = -\frac{3(x_0 - x_T)}{T^2}$$

$$\alpha_3 = \frac{2(x_0 - x_T)}{T^3}$$

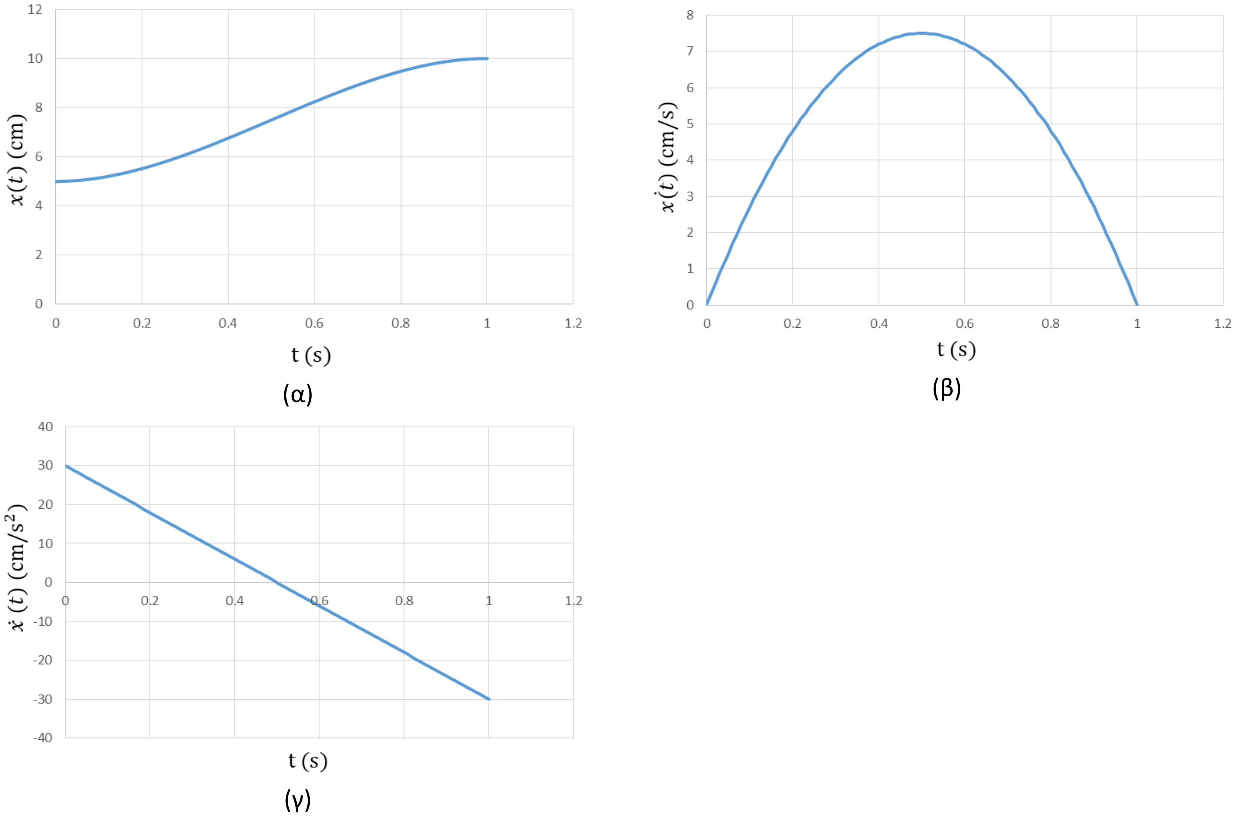
Στην περίπτωση αυτή θα έχουμε:

$$x(t) = 2(x_0 - x_T)\frac{t^3}{T^3} - 3(x_0 - x_T)\frac{t^2}{T^2} + x_0$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτουν η $y(t)$ και η $z(t)$, οι οποίες θα είναι και αυτές πολυώνυμα 3^ου^ βαθμού.

Η χρήση πολυωνύμων 3^ου^ βαθμού εξασφαλίζει ότι η ταχύτητα δεν θα αλλάζει απότομα κατά την εκκίνηση ή τον τερματισμό της κίνησης του βραχίονα. Δεν ισχύει το ίδιο όμως και με την επιτάχυνση, όπου τόσο στην αρχή και όσο και στο τέλος η επιτάχυνση είναι μη μηδενική. Αυτό σημαίνει, ότι ξεκινώντας ο βραχίονας επιταχύνει απότομα (αντίστοιχα στον τερματισμό επιβραδύνει) απότομα.

Αυτό φαίνεται στην Εικόνα 5-3, όπου υπάρχει συνέχεια για την ταχύτητα στην αρχή και στο τέλος, αλλά δεν ισχύει για την επιτάχυνση.




Εικόνα 5-3. Καμπύλες για βραχίονα που ξεκινάει και τερματίζει με μηδενική ταχύτητα με χρήση πολυώνυμου 3ου βαθμού. (α) Απόσταση. (β) Ταχύτητα. (γ) Επιτάχυνση. Παρατηρείται ασυνέχεια στην επιτάχυνση στην αρχή και στο τέλος της κίνησης.

### Παράδειγμα 5-3

**Ο τελικός επενεργητής ενός βραχίονα κινείται αποκλειστικά στο επίπεδο $x - y$. Το αρχικό σημείο έχει συντεταγμένες (10,0,0) και το τελικό σημείο έχει συντεταγμένες (0,10,0). Η ταχύτητα στα δύο σημεία είναι μηδενική και η διάρκεια της κίνησης είναι $1$ s. Να βρεθεί η χρονική συνάρτηση για κάθε συντεταγμένη του τελικού επενεργητή χρησιμοποιώντας πολυώνυμα 3ου βαθμού.**

### Λύση

Είναι $(x_0, y_0, z_0) = (10{,}0{,}0)$ και $(x_T, y_T, z_t) = (0{,}10{,}0)$. Αφού ο επενεργητής κινείται αποκλειστικά στο επίπεδο $x - y$ θα είναι $z(t) = 0$.

Θεωρούμε πολυώνυμα 3ου βαθμού για τη $x(t)$:

$$x(t) = a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0$$

Η πρώτη παράγωγος είναι:

$$\dot{x}(t) = 3a_3 t^2 + 2a_2 t + a_1$$

Τη χρονική στιγμή 0 θα ισχύει:

$$x(0) = 10 \Rightarrow \alpha_0 = 10$$

$$\dot{x}(0) = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$$

Επομένως η $x(t)$ γράφεται:

$$x(t) = a_3 t^3 + a_2 t^2 + 10$$

και η παράγωγος είναι:

$$\dot{x}(t) = 3a_3 t^2 + 2a_2 t$$

Τη χρονική στιγμή 1 s θα είναι:

$$\left.\begin{matrix} x(1) = 0 \\ \dot{x}(1) = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a_3 + a_2 + 10 = 0 \\ 3a_3 + 2a_2 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a_3 + a_2 = -10 \\ 3a_3 + 2a_2 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \alpha_2 = -30 \\ \alpha_3 = 20 \end{matrix}\right\}$$

Συνεπώς:

$$x(t) = 20t^3 - 30t^2 + 10$$

Επιπλέον θα είναι:

$$y(t) = y_0 + \frac{y_T - y_0}{x_T - x_0}(x(t) - x_0) \Rightarrow y(t) = 0 + \frac{10 - 0}{0 - 10}(x(t) - 10) \Rightarrow y(t) = 10 - x(t) \Rightarrow$$

$$y(t) = -20t^3 + 30t^2 \blacksquare$$

### 5.3.3 Γνωστά αρχικό και τελικό σημείο, ταχύτητες και επιταχύνσεις

Η περίπτωση αυτή αποτελεί επέκταση της προηγούμενης περίπτωσης, όπου έχουμε επιπλέον την επιτάχυνση στο αρχικό και στο τελικό σημείο: $(\ddot{x}_0, \ddot{y}_0, \ddot{z}_0)$ και $(\ddot{x}_T, \ddot{y}_T, \ddot{z}_T)$ αντίστοιχα. Συνεπώς, είναι γνωστές πλέον έξι τιμές που αφορούν κάθε χρονική συνάρτηση, το οποίο σημαίνει ότι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε πολυώνυμα 5ου βαθμού για την μοντελοποίηση των συναρτήσεων:

$$x(t) = \alpha_5 t^5 + a_4 t^4 + a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0$$

Η παράγωγος 1ης τάξης που έχουν να κάνουν με την ταχύτητα είναι:

$$\dot{x}(t) = 5a_5 t^4 + 4\alpha_4 t^3 + 3a_3 t^2 + 2a_2 t + a_1$$

Η παράγωγος 2ης τάξης που αφορούν στην επιτάχυνση είναι:

$$\ddot{x}(t) = 20a_5 t^3 + 12a_4 t^2 + 6a_3 t + 2a_2$$

Για τη συνάρτηση $x(t)$ πρέπει να ισχύει ότι:

$$x(0) = x_0$$

$$\dot{x}(0) = \dot{x}_0$$

$$\ddot{x}(0) = \ddot{x}_0$$

$$x(T) = x_T$$

$$\dot{x}(T) = \dot{x_T}$$

$$\ddot{x}(T) = \ddot{x_T}$$

Από τις 3 πρώτες σχέσεις παίρνουμε ότι:

$$\alpha_0 = x_0$$

$$a_1 = \dot{x}_0$$

$$a_2 = 0{,}5\ddot{x}_0$$

Από τις υπόλοιπες τρεις σχέσεις, προκύπτει ένα σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους:

$$\alpha_5 T^5 + a_4 T^4 + a_3 T^3 = x_T - 0{,}5\ddot{x}_0 T^2 - \dot{x}_0 T - x_0$$

$$5a_5 T^4 + 4\alpha_4 T^3 + 3a_3 T^2 = \dot{x_T} - \ddot{x}_0 T - \dot{x}_0$$

$$20a_5 T^3 + 12a_4 T^2 + 6a_3 T = \ddot{x_T} - \ddot{x}_0$$

Επιλύοντας το σύστημα, προκύπτουν και οι υπόλοιποι συντελεστές:

$$\alpha_3 = -\frac{1}{2T^3}(20x_0 - 20x_T + 12T\dot{x}_0 + 8T\dot{x_T} + 3T^2\ddot{x}_0 - T^2\ddot{x_T})$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{2T^4}(30x_0 - 30x_T + 16T\dot{x}_0 + 14T\dot{x_T} + 3T^2\ddot{x}_0 - 2T^2\ddot{x_T})$$

$$\alpha_5 = -\frac{1}{2T^5}(12x_0 - 12x_T + 6T\dot{x}_0 + 6T\dot{x_T} + T^2\ddot{x}_0 - T^2\ddot{x_T})$$

Αντίστοιχες είναι οι σχέσεις για τους συντελεστές των άλλων συναρτήσεων.

Στη συνηθισμένη περίπτωση που θέλουμε μηδενική ταχύτητα και επιτάχυνση στο αρχικό και στο τελικό σημείο, οι συντελεστές γίνονται:

$$\alpha_0 = x_0$$

$$a_1 = 0$$

$$a_2 = 0$$

$$\alpha_3 = -\frac{10}{T^3}(x_0 - x_T)$$

$$\alpha_4 = \frac{15}{T^4}(x_0 - x_T)$$

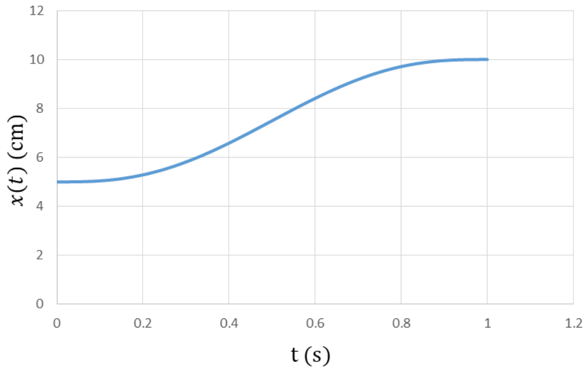
$$\alpha_5 = -\frac{6}{T^5}(x_0 - x_T)$$

Επομένως, θα είναι:

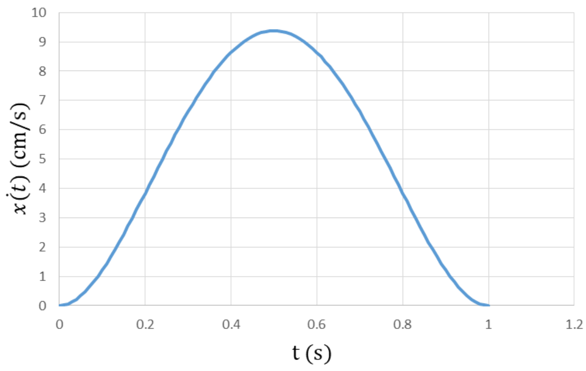
$$x(t) = -6(x_0 - x_T)\frac{t^5}{T^5} + 15(x_0 - x_T)\frac{t^4}{T^4} - 10(x_0 - x_T)\frac{t^3}{T^3} + x_0$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτουν η $y(t)$ και η $z(t)$, οι οποίες θα είναι και αυτές πολυώνυμα 5$^{ου}$ βαθμού.

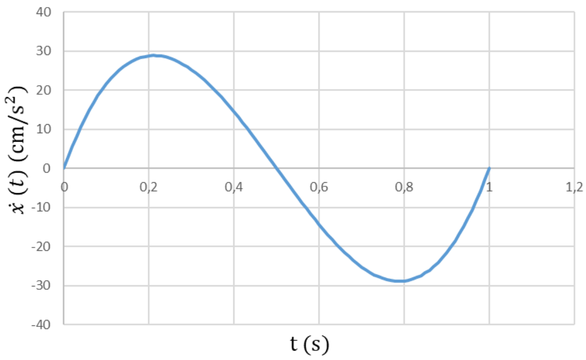
Η χρήση πολυωνύμων 5$^{ου}$ βαθμού εξασφαλίζει ότι τόσο η ταχύτητα όσο και η επιτάχυνση δεν θα έχουν απότομες μεταβολές τόσο στην έναρξη όσο και στον τερματισμό της κίνησης.




(α)



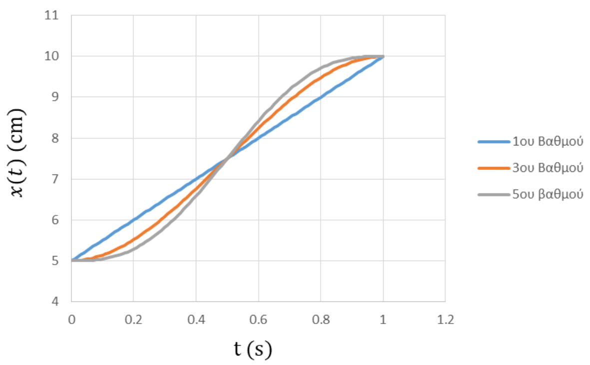

(β)



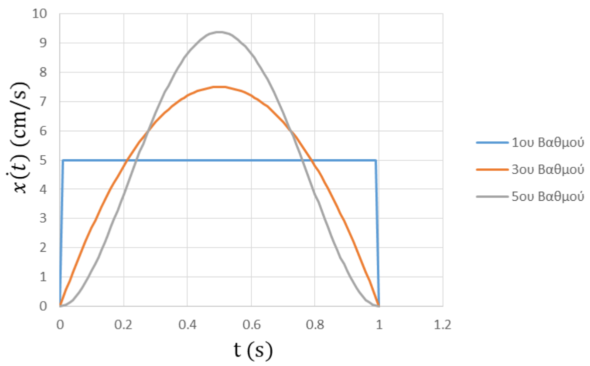

(γ)

Εικόνα 5-4. Καμπύλες για βραχίονα που ξεκινάει και τερματίζει με μηδενική ταχύτητα και επιτάχυνση με χρήση πολυώνυμου 5$^{ου}$ βαθμού. (α) Απόσταση. (β) Ταχύτητα. (γ) Επιτάχυνση.

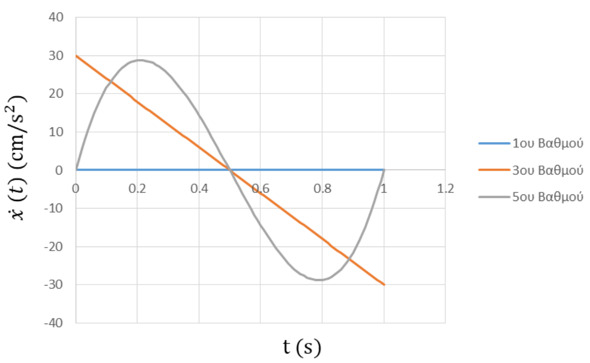
Η Εικόνα 5-5 παρουσιάζει ενδεικτικές καμπύλες συγκεντρωτικά για τις τρεις πολυωνυμικές προσεγγίσεις που παρουσιάστηκαν




(α)




(β)




(γ)

Εικόνα 5-5. Σύγκριση των τριών πολυωνυμικών προσεγγίσεων. (α) Απόσταση. (β) Ταχύτητα. (γ) Επιτάχυνση.

**Παράδειγμα 5-4**

**Ο τελικός επενεργητής ενός βραχίονα κινείται αποκλειστικά στο επίπεδο $x - y$. Το αρχικό σημείο έχει συντεταγμένες (10,0,0) και το τελικό σημείο έχει συντεταγμένες (0,10,0). Η ταχύτητα και η επιτάχυνση στα δύο σημεία είναι μηδενικές και η διάρκεια της κίνησης είναι $1\ s$. Να βρεθεί η χρονική συνάρτηση για κάθε συντεταγμένη του τελικού επενεργητή χρησιμοποιώντας πολυώνυμα 5ου βαθμού.**

**Λύση**

Είναι $(x_0, y_0, z_0) = (10{,}0{,}0)$ και $(x_T, y_T, z_t) = (0{,}10{,}0)$ με $T = 1$ s. Αφού ο επενεργητής κινείται αποκλειστικά στο επίπεδο $x - y$ θα είναι $z(t) = 0$.

Σύμφωνα με τη θεωρία, για μηδενική ταχύτητα και επιτάχυνση στο αρχικό και στο τελικό σημείο, οι συντελεστές γίνονται:

$$\alpha_0 = x_0 = 10$$

$$a_1 = 0$$

$$a_2 = 0$$

$$\alpha_3 = -\frac{10}{T^3}(x_0 - x_T) = -100$$

$$\alpha_4 = \frac{15}{T^4}(x_0 - x_T) = 150$$

$$\alpha_5 = -\frac{6}{T^5}(x_0 - x_T) = -60$$

Επομένως:

$$x(t) = -60t^5 + 150t^4 - 100t^3 + 10$$

Επιπλέον:

$$y(t) = y_0 + \frac{y_T - y_0}{x_T - x_0}(x(t) - x_0) \Rightarrow y(t) = 0 + \frac{10 - 0}{0 - 10}(x(t) - 10) \Rightarrow y(t) = 10 - x(t) \Rightarrow$$

$$y(t) = 60t^5 - 150t^4 + 10t^3 \blacksquare$$

## 5.4 Καμπυλόγραμμη τροχιά

Στην περίπτωση που η τροχιά δεν είναι ευθύγραμμη, αλλά καμπυλόγραμμη (για παράδειγμα για να παρακάμπτεται ένα εμπόδιο), ο τρόπος εργασίας είναι εξακολουθεί να είναι παρόμοιος με πριν. Η μόνη διαφοροποίηση έχει να κάνει με τις εξισώσεις που περιγράφουν την τροχιά στον χώρο.

**Παράδειγμα 5-5**

**Ο τελικός επενεργητής ενός βραχίονα κινείται σε τμήμα κυκλικής τροχιάς αποκλειστικά στο επίπεδο $x - y$. Το αρχικό σημείο έχει συντεταγμένες (6,2,0), το τελικό σημείο έχει συντεταγμένες (1,7,0), ενώ επίσης περνάει και από το ενδιάμεσο σημείο (4,6,0). Η ταχύτητα και η επιτάχυνση στο αρχικό και στο τελικό σημείο είναι μηδενικές και η διάρκεια της κίνησης είναι $1\ s$. Να βρεθεί**

**η χρονική συνάρτηση για κάθε συντεταγμένη του τελικού επενεργητή χρησιμοποιώντας πολυώνυμα 5[ου] βαθμού.**

**Λύση**

Είναι $(x_0, y_0, z_0) = (6,2,0)$, $(x_T, y_T, z_t) = (1,7,0)$ και επιπλέον έχουμε το ενδιάμεσο σημείο $(x_1, y_1, z_1) = (4,6,0)$. Η διάρκεια της κίνησης είναι $T = 1\,\mathrm{s}$. Αφού ο επενεργητής κινείται αποκλειστικά στο επίπεδο $x - y$ θα είναι $z(t) = 0$.

Σύμφωνα με τη θεωρία, για μηδενική ταχύτητα και επιτάχυνση στο αρχικό και στο τελικό σημείο, οι συντελεστές γίνονται:

$$\alpha_0 = x_0 = 6$$

$$a_1 = 0$$

$$a_2 = 0$$

$$\alpha_3 = -\frac{10}{T^3}(x_0 - x_T) = -50$$

$$\alpha_4 = \frac{15}{T^4}(x_0 - x_T) = 75$$

$$\alpha_5 = -\frac{6}{T^5}(x_0 - x_T) = -30$$

Επομένως:

$$x(t) = -30t^5 + 75t^4 - 50t^3 + 6$$

Σύμφωνα με την εκφώνηση, τα τρία σημεία είναι πάνω σε κύκλο. Έστω $(x_c, y_c)$ το κέντρο και $r$ η ακτίνα του κύκλου. Η εξίσωση θα είναι κατά τα γνωστά:

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$$

Για να υπολογιστεί το κέντρο και η ακτίνα του κύκλου εργαζόμαστε ως εξής: αρχικά αναπτύσσουμε τα τετράγωνα που εμφανίζονται στην προηγούμενη σχέση:

$$x^2 - 2x_c x + x_c^2 + y^2 - 2y_c y + y_c^2 = r^2$$

Με αναδιάταξη των όρων παίρνουμε:

$$x^2 + y^2 - 2x_c x - 2y_c y + x_c^2 + y_c^2 - r^2 = 0$$

Για απλοποίηση στον συμβολισμό, θέτουμε $D = -2x_c$, $E = -2y_c$ και $F = x_c^2 + y_c^2 - r^2$, οπότε έχουμε:

$$x^2 + y^2 + D \cdot x + E \cdot y + F = 0$$

Αντικαθιστώντας τις συντεταγμένες των τριών σημείων προκύπτουν οι ακόλουθες εξισώσεις:

$$6D + 2E + F = -40$$

$$4D + 6E + F = -52$$

$$D + 7E + F = -50$$

Επιλύοντας το σύστημα των εξισώσεων λαμβάνουμε:

$$D = -2$$

$$E = -4$$

$$F = -20$$

Συνεπώς θα είναι $x_c = 1$, $y_c = 2$ και $r = 5$. Η εξίσωση του κύκλου θα είναι:

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$$

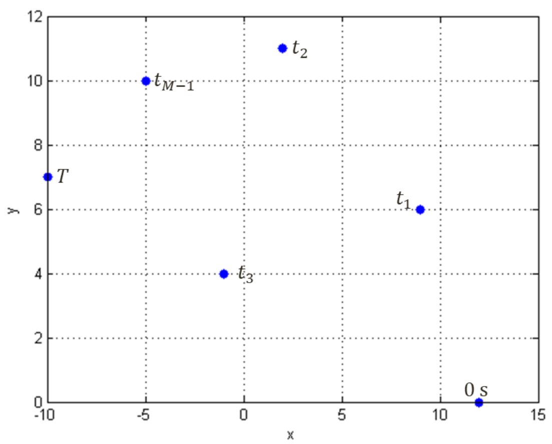
Επιλύοντας ως προς $y$ θα είναι $y = 2 + \sqrt{25-(x-1)^2}$ και συνεπώς η αντίστοιχη χρονική συνάρτηση θα είναι:

$$y(t) = 2 + \sqrt{25-[x(t)-1]^2} \blacksquare$$

## 5.5 Τροχιά από ενδιάμεσα σημεία

Πολλές φορές η τροχιά που πρέπει να διαγράψει ο τελικός επενεργητής ενός βραχίονα δεν έχει μία προκαθορισμένη μορφή (π.χ. ευθύγραμμη, κυκλική κ.λπ.), με αποτέλεσμα να μην υπάρχουν (ή να είναι πολύ δύσκολο να εξαχθούν) εξισώσεις που να την περιγράφουν (όπως για παράδειγμα οι εξισώσεις (1) και (2) στην περίπτωση της ευθύγραμμης τροχιάς). Επίσης, μπορεί να δίνονται κάποια σημεία από τα οποία να επιθυμείται να περάσει ακριβώς (ή τουλάχιστον πολύ κοντά) ο τελικός επενεργητής. Συνεπώς δεν είναι πλέον εφικτό να εξαχθεί η $x(t)$ και με χρήση των εξισώσεων της τροχιάς να βρεθούν οι $y(t)$ και $z(t)$, όπως παρουσιάστηκε παραπάνω. Πρέπει να εργαστούμε για κάθε χρονική συνάρτηση ξεχωριστά.

Στις περιπτώσεις αυτές, η διαδικασία που μπορεί να ακολουθηθεί έχει ως εξής: θεωρούμε ότι είναι διαθέσιμα $M+1$ σημεία $(x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1), \dots, (x_{M-1}, y_{M-1}, z_{M-1}), (x_T, y_T, z_T)$. Τα ενδιάμεσα σημεία $(x_1, y_1, z_1), \dots, (x_{M-1}, y_{M-1}, z_{M-1})$ μπορεί να δίνονται ή να επιλέγονται ώστε να προκύψει η επιθυμητή τροχιά. Επίσης έστω ότι δίνονται οι $M+1$ χρονικές στιγμές $\{0, t_1, \dots, t_{M-1}, T\}$ κατά τις οποίες ο τελικός επενεργητής θα πρέπει να βρίσκεται σε κάθε σημείο. Δηλαδή τη χρονική στιγμή 0 θα πρέπει να βρίσκεται στο σημείο $(x_0, y_0, z_0)$, τη χρονική στιγμή $t_1$ να είναι στο σημείο $(x_1, y_1, z_1)$ κ.ο.κ. (Εικόνα 5-6).




Εικόνα 5-6. Παράδειγμα σημείων που καθορίζουν μια τροχιά στο επίπεδο $x - y$. Έχουν σημειωθεί οι χρονικές στιγμές κατά τις οποίες πρέπει να διέρχεται ο τελικός επενεργητής από κάθε σημείο.

**Κάθε μία** χρονική συνάρτηση $x(t)$, $y(t)$ και $z(t)$ μπορεί να υπολογιστεί με χρήση μίας από τις μεθόδους:

- **Πολυωνυμική παρεμβολή**: χρήση ενός πολυωνύμου βαθμού $M$ ώστε ο τελικός επενεργητής να περνάει ακριβώς από κάθε δεδομένο σημείο. Εάν υπάρχουν συνθήκες για την ταχύτητα στο αρχικό και τελικό σημείο τότε ο βαθμός του πολυωνύμου πρέπει να αυξηθεί κατά 2, δηλαδή να είναι $M + 2$. Εάν επιπλέον υπάρχουν συνθήκες και για την επιτάχυνση, ο βαθμός του πολυωνύμου θα πρέπει να αυξηθεί κατά 4, δηλαδή $M + 4$.
- **Προσέγγιση ελαχίστων τετραγώνων**: Χρήση ενός πολυωνύμου βαθμού μικρότερου από $M$, ώστε ο τελικός επενεργητής να περνάει πολύ κοντά (αλλά όχι ακριβώς) από κάθε δεδομένο σημείο.
- **Παρεμβολή κυβικών spline**: Χρήση πολλών πολυωνύμων 3$^{ου}$ βαθμού. Ο τελικός επενεργητής θα περνάει ακριβώς από κάθε σημείο.

### 5.5.1 Πολυωνυμική παρεμβολή

Η πολυωνυμική παρεμβολή είναι μία μεθοδολογία με την οποία βρίσκονται οι συντελεστές ενός πολυωνύμου για κάθε χρονική συνάρτηση $x(t)$, $y(t)$ και $z(t)$ ξεχωριστά. Ο βαθμός κάθε πολυωνύμου ισούται με το πλήθος των σημείων μείον ένα. Δηλαδή εάν έχουμε δέκα σημεία θα χρειαστούμε πολυώνυμα 9$^{ου}$ βαθμού. Αν επιπλέον υπήρχαν συνθήκες για την ταχύτητα και την επιτάχυνση στο αρχικό και στο τελικό σημείο, τότε ο βαθμός του πολυωνύμου θα ήταν 13. Στη γενική περίπτωση $M + 1$ σημείων όπου υπάρχουν και συνθήκες για την ταχύτητα και την επιτάχυνση στο αρχικό και στο τελικό σημείο, θα έχουμε ένα πολυώνυμο βαθμού $K = M + 4$:

$$x(t) = a_K t^K + a_{K-1} t^{K-1} + \cdots + \alpha_2 t^2 + a_1 t + a_0$$

Επίσης είναι:

$$\dot{x}(t) = K a_K t^{K-1} + (K-1) a_{K-1} t^{K-2} + \cdots + 2a_2 t + a_1$$
$$\ddot{x}(t) = K(K-1) a_K t^{K-2} + (K-1)(K-2) a_{K-1} t^{K-3} + \cdots + 2a_2$$

Απαιτώντας:

$$\left.\begin{array}{r} x(0) = x_0 \\ x(t_1) = x_1 \\ x(t_2) = x_2 \\ \vdots \\ x(t_{M-2}) = x_{M-2} \\ x(T) = x_T \\ \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \\ \ddot{x}(0) = \ddot{x}_0 \\ \dot{x}(T) = \dot{x}_T \\ \ddot{x}(T) = \ddot{x}_T \end{array}\right\} \tag{3}$$

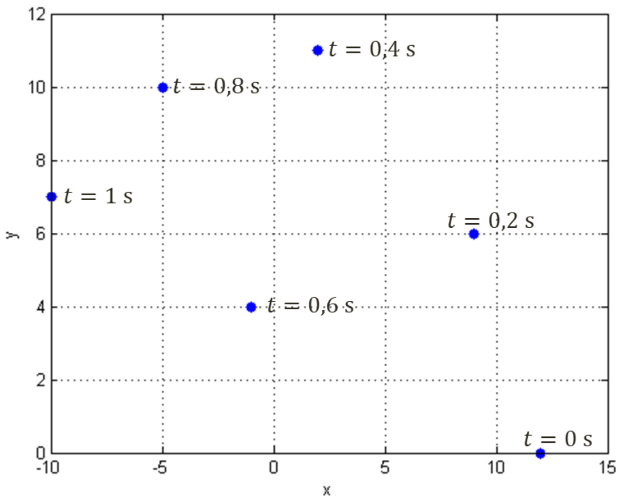
θα προκύψει ένα σύστημα εξισώσεων της μορφής:

$$\mathbf{Ap} = \mathbf{b} \tag{4}$$

όπου ο πίνακας $\mathbf{A}$ έχει διαστάσεις $(K+1)\times(K+1)$, το διάνυσμα $\mathbf{b}$ έχει διαστάσεις $(K+1)\times 1$ και το διάνυσμα $\mathbf{p}$ περιέχει τους $K+1$ συντελεστές του πολυωνύμου. Το σύστημα αυτό μπορεί να λυθεί ως προς $\mathbf{p}$ με κάποια από τις κλασικές μεθόδους της άλγεβρας (με ορίζουσες, απαλοιφή Gauss, ανάλυση LU κ.λπ.). Εργαζόμαστε με παρόμοιο τρόπο και για τα $y(t)$ και $z(t)$.

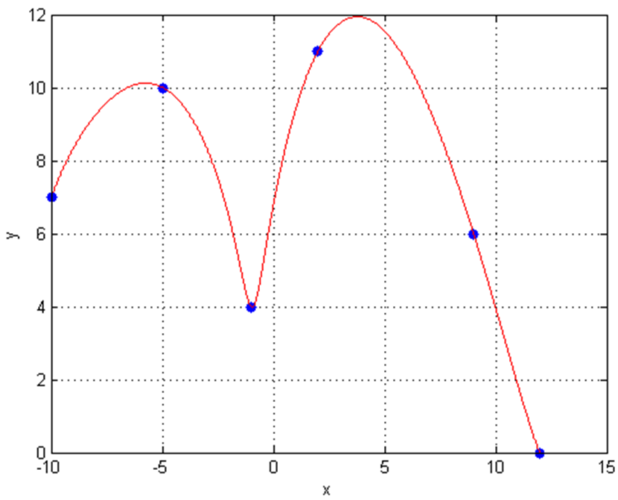
Οι περιπτώσεις που παρουσιάζονται στο προηγούμενο εδάφιο για πολυώνυμα 1$^{ου}$, 3$^{ου}$ και 5$^{ου}$ στην ουσία βαθμού αποτελούν εφαρμογές της συγκεκριμένης τεχνικής.

Για παράδειγμα, έστω τα σημεία στο επίπεδο $x-y$ που φαίνονται στην επόμενη εικόνα και έστω ότι απαιτείται η ταχύτητα και η επιτάχυνση να είναι μηδενικές στο πρώτο και στο τελευταίο χρονικά σημείο.




Εικόνα 5-7. Παράδειγμα τροχιάς από 6 σημεία.

Καθώς υπάρχουν 6 σημεία και 4 συνθήκες για την ταχύτητα και την επιτάχυνση χρειάζεται ένα πολυώνυμο 9$^{ου}$ βαθμού με 10 συντελεστές. Ο πίνακας A θα είναι $10\times 10$ και τα διανύσματα p και b θα είναι $10\times 1$ το καθένα. Επιλύοντας τα δύο συστήματα εξισώσεων (ένα για το $x(t)$ και ένα για το $y(y)$) υπολογίζονται οι συντελεστές των δύο πολυωνύμων. Η τροχιά που θα προκύψει είναι όπως δείχνει η επόμενη εικόνα.




Εικόνα 5-8. Τροχιά από την πολυωνυμική παρεμβολή με χρήση πολυωνύμου 9$^{ου}$ βαθμού.

### 5.5.2 Προσέγγιση ελαχίστων τετραγώνων

Η πολυωνυμική παρεμβολή έχει νόημα να χρησιμοποιηθεί όταν ο αριθμός των διαθέσιμων σημείων είναι μικρός (κάτω από 10). Αν ο αριθμός των σημείων από τα οποία πρέπει να περάσει ο τελικός επενεργητής είναι μεγάλος τότε θα χρειαστεί να δημιουργηθεί ένα πολυώνυμο αντίστοιχα μεγάλης τάξης, το οποίο σημαίνει ότι θα υπάρχει σημαντικό υπολογιστικό κόστος (δηλ. θα χρειάζεται αρκετός χρόνος για τους υπολογισμούς). Εναλλακτικά θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί ένα πολύωνυμο μικρότερου βαθμού (ή κάποια άλλη συνάρτηση), ώστε να μειωθεί το υπολογιστικό κόστος, αλλά με τίμημα ότι πλέον ο επενεργητής δεν θα περνάει ακριβώς από το δοσμένα σημεία, αλλά παραπλήσια. Η μεθοδολογία που χρησιμοποιείται για τους υπολογισμούς των συντελεστών των πολυωνύμων ονομάζεται **προσέγγιση των ελαχίστων τετραγώνων**.

Πιο αναλυτικά, στη γενική περίπτωση $M+1$ σημείων όπου δεν υπάρχουν συνθήκες για την ταχύτητα και την επιτάχυνση στο αρχικό και στο τελικό σημείο, θα έχουμε ένα πολυώνυμο βαθμού $P<M$:

$$x(t)=a_P t^P+a_{P-1}t^{P-1}+\cdots+\alpha_2 t^2+a_1 t+a_0$$

Γράφοντας και πάλι τις εξισώσεις (3) θα προκύψει ένα σύστημα στη μορφή που δίνεται στην (4) αλλά πλέον ο πίνακας $\mathbf{A}$ δεν είναι τετραγωνικός και συγκεκριμένα είναι $(M+1)\times(P+1)$, δηλαδή έχει περισσότερες γραμμές από στήλες (περισσότερες εξισώσεις από αγνώστους). Σύμφωνα με την προσέγγιση ελαχίστων τετραγώνων, δημιουργείται ένα νέο σύστημα εξισώσεων της μορφής:

$$(\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{A})\mathbf{p}=\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{b} \tag{5}$$

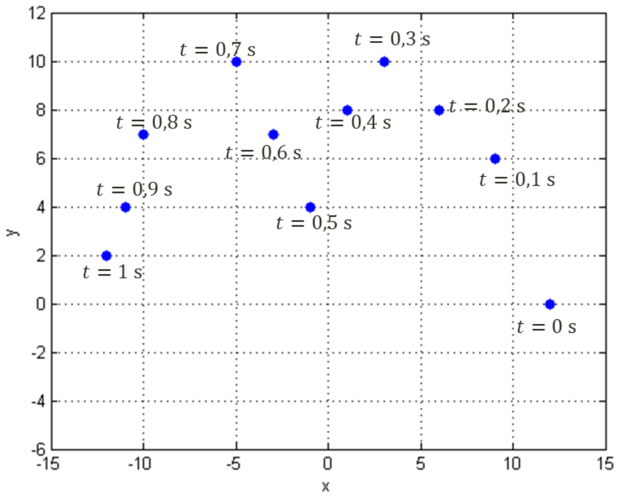
όπου $\mathbf{A}^{\mathbf{T}}$ συμβολίζει τον ανάστροφο πίνακα του $\mathbf{A}$. Ο πίνακας $\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}$ έχει διαστάσεις $(P+1)\times(P+1)$, είναι πλέον τετραγωνικός και το σύστημα εξισώσεων (5) μπορεί να λυθεί κατά τα γνωστά με κάποια μέθοδο επίλυσης γραμμικών συστημάτων.

Η επιλογή του βαθμού του πολυωνύμου $P$ επιλέγεται συνεκτιμώντας το υπολογιστικό κόστος και το σφάλμα προσέγγισης: μικρού βαθμού πολυώνυμο θα οδηγεί σε χαμηλό υπολογιστικό κόστος αλλά και σε μεγαλύτερη απόσταση της πραγματικής τροχιάς από την επιθυμητή. Αντίθετα, μεγάλου βαθμού πολυώνυμο θα φέρει πιο κοντά την πραγματική από την επιθυμητή τροχιά αλλά με τίμημα την αύξηση του υπολογιστικού κόστους.

Συγκεκριμένα, το συνολικό σφάλμα ($E$) μεταξύ πραγματικής και επιθυμητής τροχιάς μπορεί να δοθεί μέσω της ακόλουθης σχέσης:

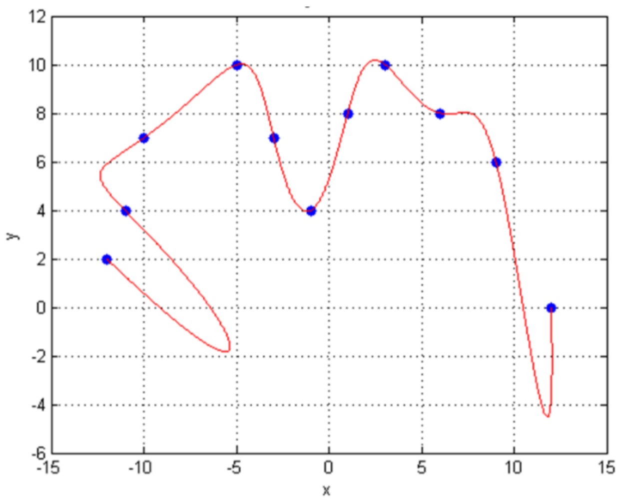
$$E=\frac{1}{M+1}\sqrt{[x(0)-x_0]^2+[x(t_1)-x_1]^2+\cdots+[x(t_{M-1})-x_{M-1}]^2+[x(T)-x_T]^2}$$

Για παράδειγμα έστω τα σημεία που φαίνονται στην επόμενη εικόνα χωρίς να υπάρχουν συνθήκες για την ταχύτητα και την επιτάχυνση.



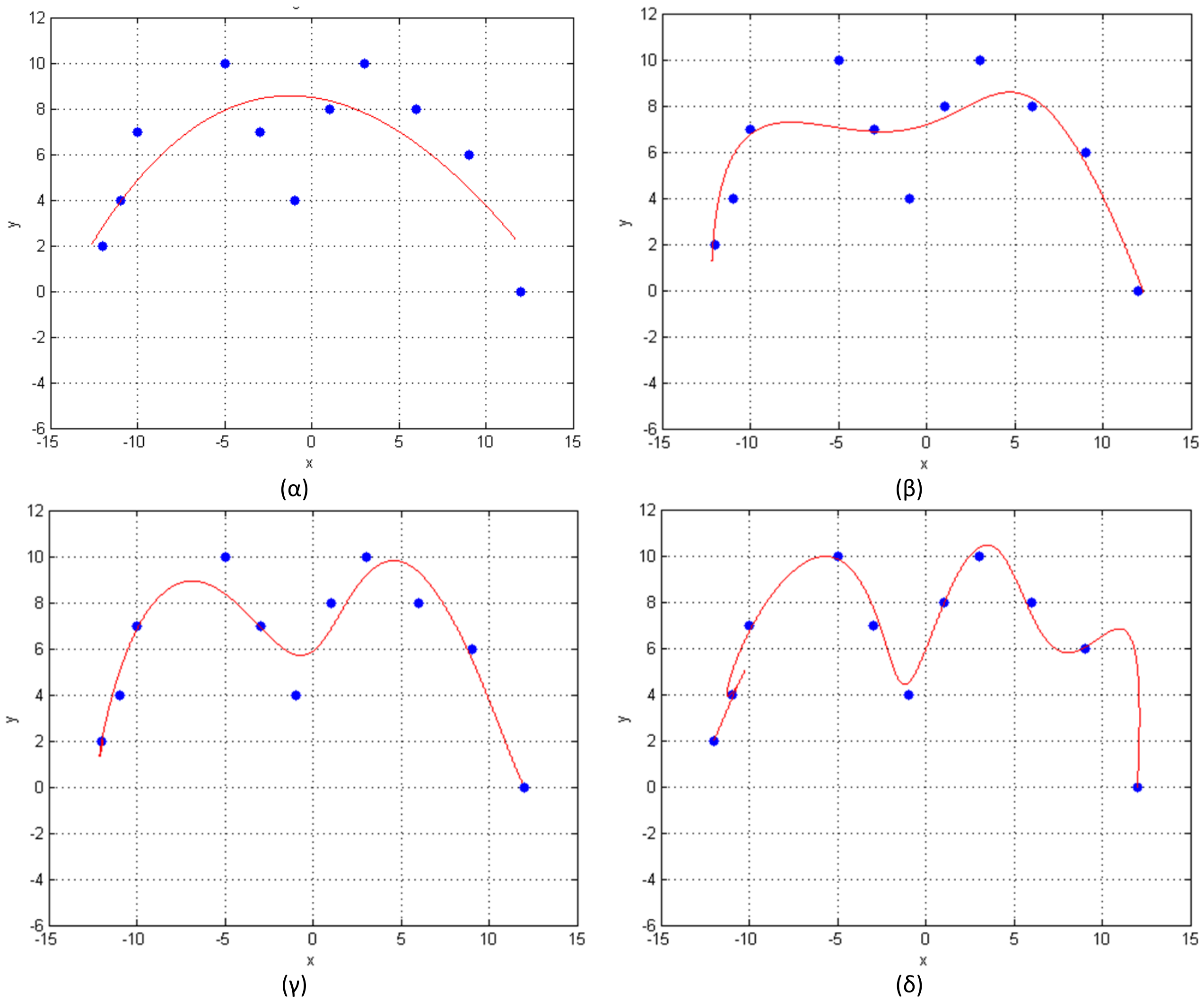

Εικόνα 5-9. Παράδειγμα τροχιάς από 11 σημεία.

Αφού δίνονται 11 σημεία θα χρειαζόταν ένα πολυώνυμο 10$^{ου}$ βαθμού. Η τροχιά που θα προέκυπτε με ένα τέτοιο πολυώνυμο θα ήταν όπως δείχνει η Εικόνα 5-10. Παρόλο που η τροχιά διέρχεται από τα δεδομένα σημεία, δεν παρουσιάζει μία αναμενόμενη μορφή στην αρχή και στο τέλος της καθώς παρουσιάζει «βυθίσματα» στην αρχή και το τέλος της.




Εικόνα 5-10. Τροχιά από πολυώνυμο 10$^{ου}$ βαθμού.

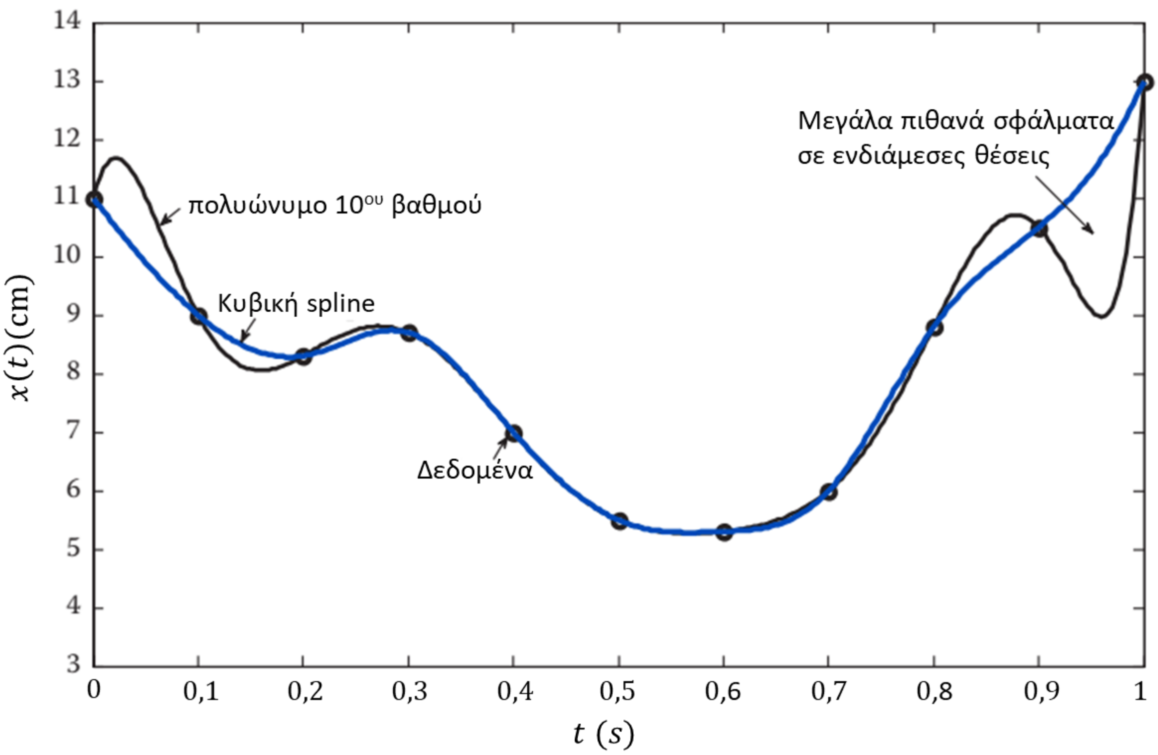
Έστω ότι χρησιμοποιούμε την προσέγγιση ελαχίστων τετραγώνων για πολυώνυμα βαθμού 2, 4, 6 και 8. Οι τροχιές που προκύπτουν δίνονται στην Εικόνα 5-11.




Εικόνα 5-11. Προσέγγιση ελαχίστων τετραγώνων. (α) Πολυώνυμο $2^{ου}$ βαθμού. (β) Πολυώνυμο $4^{ου}$ βαθμού. (γ) Πολυώνυμο $6^{ου}$ βαθμού. (δ) Πολυώνυμο $8^{ου}$ βαθμού.

### 5.5.3 Παρεμβολή κυβικών spline

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, η χρήση ενός πολυωνύμου μεγάλου βαθμού συνεπάγεται μεγάλο υπολογιστικό κόστος. Επιπλέον, μπορεί να οδηγήσει σε μεγάλα πιθανά σφάλματα σε ενδιάμεσες θέσεις, όπως δείχνει και η Εικόνα 5-12. Η δημιουργία σφαλμάτων προκύπτει γενικά από το γεγονός ότι ένα πολυώνυμο μεγάλου βαθμού έχει πολλά μέγιστα ή ελάχιστα (δηλαδή κορυφές και κοιλάδες στη γραφική του παράσταση), τα οποία μπορούν να εμφανιστούν σε θέσεις ανάμεσα σε δύο χρονικές στιγμές.




Εικόνα 5-12. Σύγκριση πολυωνύμου 10ου βαθμού με κυβικές spline σε ένα σύνολο 11 σημείων.

Η εναλλακτική λύση είναι να χρησιμοποιηθούν πολλά πολυώνυμα μικρού βαθμού (3ου ή μικρότερου βαθμού). Συγκεκριμένα, έστω $M+1$ σημεία $(x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1), \dots, (x_{M-1}, y_{M-1}, z_{M-1}), (x_T, y_T, z_T)$ και αντίστοιχες χρονικές στιγμές $\{0, t_1, \dots, t_{M-1}, T\}$. Τότε σε κάθε διάστημα χρονικών στιγμών $[t_i, t_{i+1}]$ $(i = 0,1, \dots, M-1)$ με $t_M = T$ δημιουργείται ένα πολυώνυμο βαθμού $L$ ($L \leq 3$), δηλαδή συνολικά $M$ το πλήθος τέτοια πολυώνυμα. Τα πολυώνυμα αυτά ονομάζονται splines και συνήθως είναι 3ου βαθμού, οπότε αναφέρονται και ως κυβικές splines.

Συγκεκριμένα, σε κάθε διάστημα $[t_i, t_{i+1}]$ $(i = 0,1, \dots, M-1)$ θεωρούμε ένα πολυώνυμο της μορφής:

$$S_i(t) = a_i(t - t_i)^3 + b_i(t - t_i)^2 + c_i(t - t_i) + d_i$$

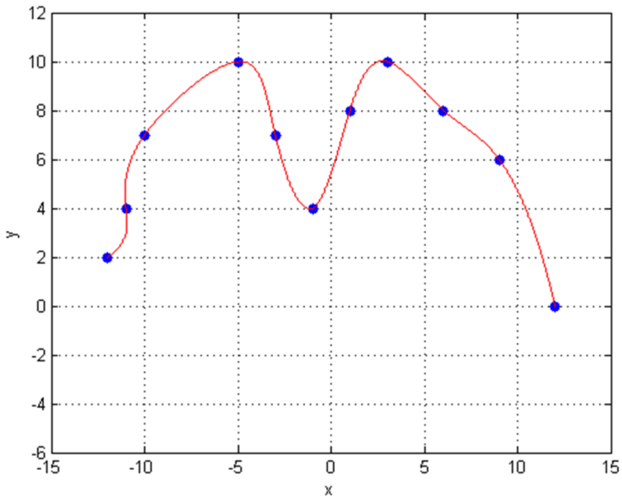
Καθώς υπάρχουν $M$ το πλήθος διαστήματα, συνολικά υπάρχουν $4M$ συντελεστές που πρέπει να υπολογιστούν. Επομένως, πρέπει να βρεθούν $4M$ εξισώσεις για τους συντελεστές αυτούς. Οι εξισώσεις αυτές προκύπτουν από τις ακόλουθες συνθήκες:

- $S_i(t_i) = x_i$ και $S_i(t_{i+1}) = x_{i+1}$ $(i = 0,1, \dots, M-1)$ ($2M$ εξισώσεις).
- Οι παράγωγοι 1ης τάξης στα ενδιάμεσα σημεία πρέπει να είναι ίσες, δηλαδή $\dot{S_\iota}(t_{i+1}) = \dot{S}_{i+1}(t_{i+1})$ $(i = 0,1, \dots, M-2)$ ($M-1$ εξισώσεις).
- Οι παράγωγοι 2ης τάξης στα ενδιάμεσα σημεία πρέπει να είναι ίσες, δηλαδή $\ddot{S}_i(t_{i+1}) = \ddot{S}_i(t_{i+1})$ $(i = 0,1, \dots, M-2)$ ($M-1$ εξισώσεις).
- Οι παράγωγοι 2ης τάξης στο αρχικό και στο τελικό σημείο να είναι μηδέν, δηλαδή $\ddot{S}_0(0) = 0$ και $\ddot{S}_{M-1}(T) = 0$. (2 εξισώσεις)

Για παράδειγμα έστω τα σημεία που φαίνονται στην Εικόνα 5-9 χωρίς να υπάρχουν συνθήκες για την ταχύτητα και την επιτάχυνση. Υπάρχουν 11 σημεία, που αντιστοιχούν σε 10 χρονικά διαστήματα. Συνεπώς, θα χρησιμοποιηθούν 10 πολυώνυμα 3ου βαθμού, ένα για κάθε χρονικό διάστημα. Συνολικά, υπάρχουν 40 άγνωστοι συντελεστές και χρειάζονται 40 εξισώσεις για να υπολογιστούν. Οι εξισώσεις αυτές θα είναι:

- Κάθε πολυώνυμο θα πρέπει να διέρχεται από τα δύο σημεία που αντιστοιχούν στο χρονικό του διάστημα (20 εξισώσεις).
- Σε κάθε ενδιάμεσο σημείο (τα 9 σημεία χωρίς το αρχικό και το τελικό σημείο), θα πρέπει να υπάρχει ισότητα των παραγώγων 1ης τάξης των αντίστοιχων πολυωνύμων (9 εξισώσεις).
- Σε κάθε ενδιάμεσο σημείο (τα 9 σημεία χωρίς το αρχικό και το τελικό σημείο), θα πρέπει να υπάρχει ισότητα των παραγώγων 2ης τάξης των αντίστοιχων πολυωνύμων (9 εξισώσεις).
- Στο αρχικό και στο τελικό σημείο, οι παράγωγοι 2ης τάξης των αντίστοιχων πολυωνύμων πρέπει να είναι μηδέν.

Η τροχιά που προκύπτει φαίνεται στην επόμενη εικόνα.




Εικόνα 5-13. Τροχιά με χρήση spline.