Εισαγωγή στη Ρομποτική

4γ. Εύρεση πινάκων ομογενούς μετασχηματισμού

Π. ΑΣΒΕΣΤΑΣ
E-Mail: pasv@uniwa.gr

1

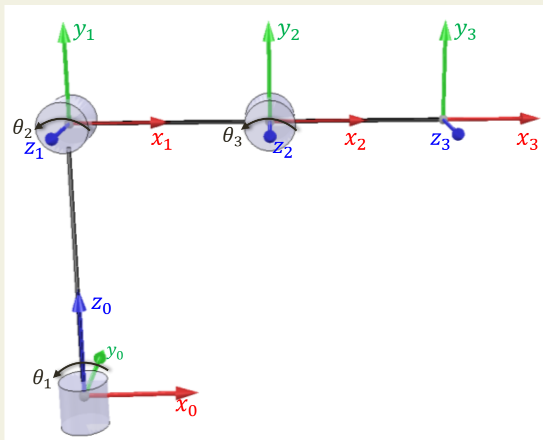
Εισαγωγή

- Αφού τοποθετηθούν τα συστήματα συντεταγμένων, στη συνέχεια εξετάζεται η σχετική κίνηση κάθε συστήματος συντεταγμένων σε σχέση με το προηγούμενό του.
- Συγκεκριμένα, θέλουμε να βρούμε τη θέση ενός συστήματος συντεταγμένων αν αλλάξει κατάσταση η **προηγούμενη** άρθρωση (γίνει περιστροφή αν πρόκειται για περιστροφική άρθρωση ή γίνει μετατόπιση αν πρόκειται για πρισματική άρθρωση).

2

Εισαγωγή

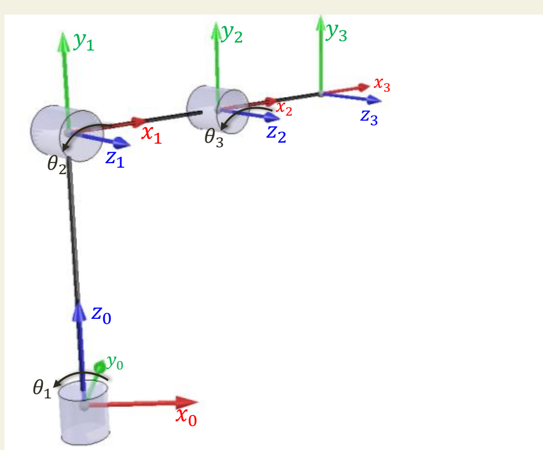
- Αρχική θέση



3

Εισαγωγή

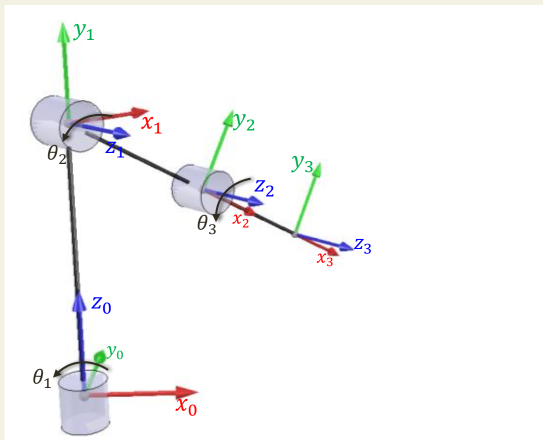
- Περιστροφή λόγω θ_1



4

Εισαγωγή

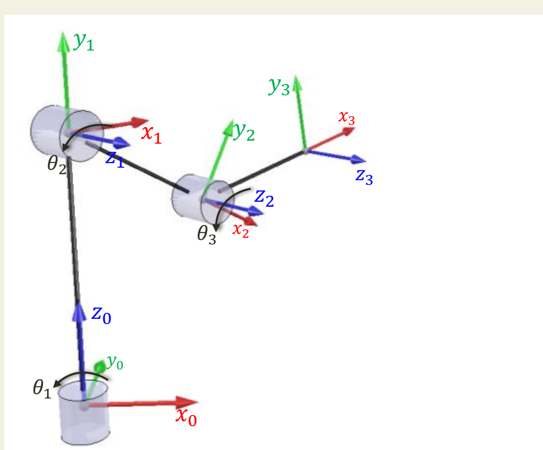
- Περιστροφή λόγω θ_2



5

Εισαγωγή

- Περιστροφή λόγω θ_3



6

Πίνακας Ομογενούς Μετασχηματισμού

- Η μελέτη της σχετικής κίνησης επιτυγχάνεται με χρήση του πίνακα ομογενούς μετασχηματισμού μεταξύ κάθε ζεύγους διαδοχικών συστημάτων συντεταγμένων $\{\boldsymbol{i}\}$ και $\{\boldsymbol{i}+\mathbf{1}\}$ ($i = 0,1,2 \ldots$)
- Ως γνωστόν ο πίνακας ομογενούς μετασχηματισμού περιλαμβάνει:
  - Πίνακα περιστροφής 3×3
  - Διάνυσμα μετατόπισης 3×1

7

Πίνακας Περιστροφής

- Έστω δύο διαδοχικά συστήματα συντεταγμένων $\{\boldsymbol{i}\}$ και $\{\boldsymbol{i}+\mathbf{1}\}$ ($i = 0,1,2 \ldots$).
- Ο πίνακας περιστροφής $\mathbf{R}_{\boldsymbol{i}+\mathbf{1}}^{\boldsymbol{i}}$ του συστήματος $\{\boldsymbol{i}+\mathbf{1}\}$ ως προς το σύστημα $\{\boldsymbol{i}\}$ είναι το γινόμενο δύο πινάκων 3×3:
  - του πίνακα που περιγράφει την περιστροφή (εάν υπάρχει) λόγω της άρθρωσης που είναι το σύστημα $\{\boldsymbol{i}\}$.
  - του πίνακα που περιγράφει τον προσανατολισμό των αξόνων του συστήματος $\{\boldsymbol{i}+\mathbf{1}\}$ ως προς τους άξονες του συστήματος $\{\boldsymbol{i}\}$.

8

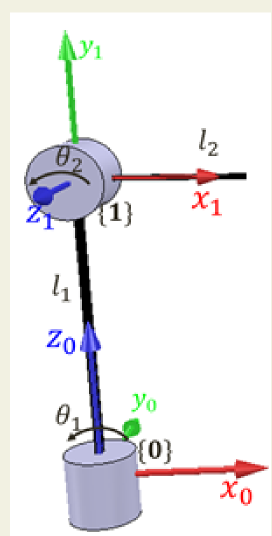
Πίνακας Περιστροφής

- Οι τιμές του πρώτου πίνακα έχει να κάνει με το είδος της άρθρωσης όπου βρίσκεται στο σύστημα $\{\boldsymbol{i}\}$:
  - Πρισματική άρθρωση: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
  - Περιστροφική άρθρωση με γωνία περιστροφής θ : $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Παράδειγμα 4-7

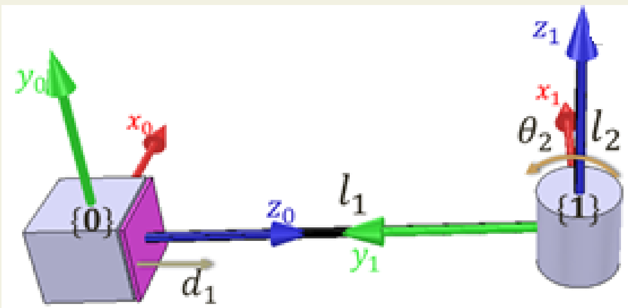
Έστω το τμήμα ενός κινηματικού διαγράμματος της διπλανής εικόνας, το οποίο έχει δύο συστήματα συντεταγμένων: $\{0\}$ και $\{1\}$. Θέλουμε να υπολογίσουμε τον πίνακα περιστροφής $\mathbf{R}_1^0$.

$$\mathbf{R}_1^0 = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & 0 & \sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & 0 & -\cos\theta_1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



Παράδειγμα 4-8

Έστω το τμήμα κινηματικού διαγράμματος που φαίνεται στην εικόνα. Να υπολογιστεί ο πίνακας $\mathbf{R}_1^0$.



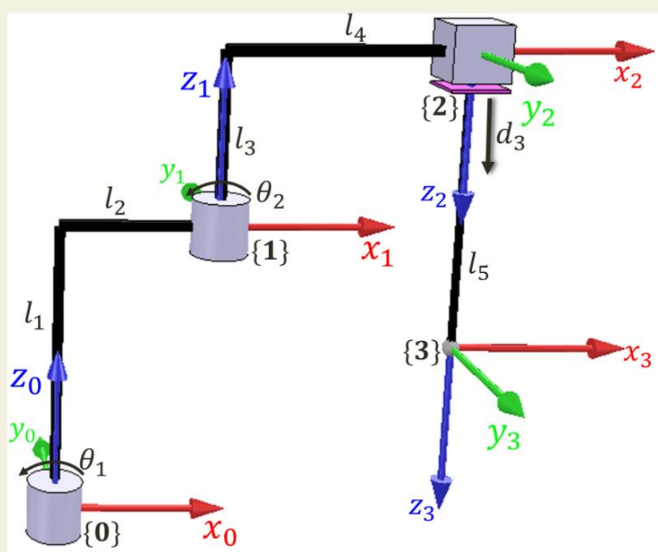
$$\mathbf{R}_1^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

11

Παράδειγμα 4-9

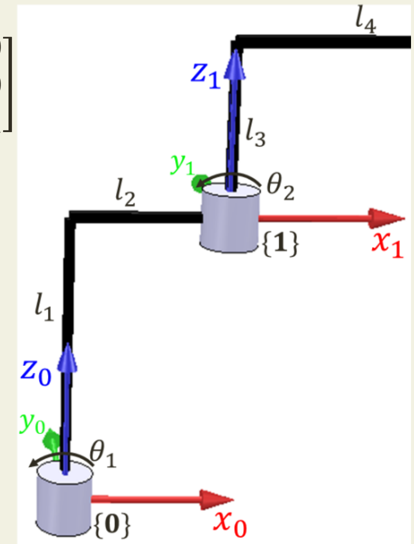
Να υπολογιστούν όλοι οι διαδοχικοί πίνακες περιστροφής ενός βραχίονα SCARA τριών βαθμών ελευθερίας.



12

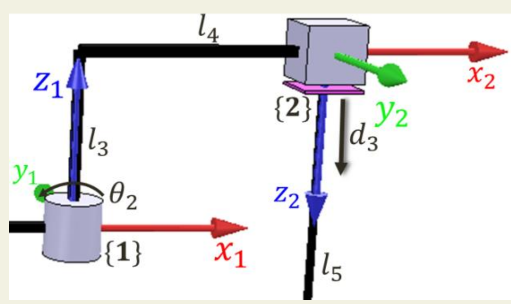
Παράδειγμα 4-9 (Λύση)

$$\mathbf{R}_1^0 = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



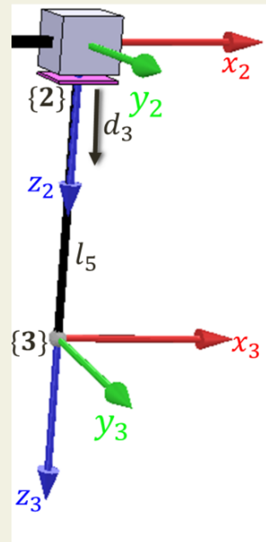
Παράδειγμα 4-9 (Λύση)

$$\mathbf{R}_2^1 = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & \sin\theta_2 & 0 \\ \sin\theta_2 & -\cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$



Παράδειγμα 4-9 (Λύση)

$$\mathbf{R}_3^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



15

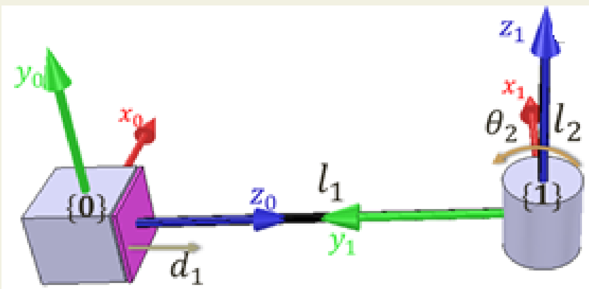
Μετατόπιση

- Έστω δύο διαδοχικά συστήματα συντεταγμένων $\{\boldsymbol{i}\}$ και $\{\boldsymbol{i}+\mathbf{1}\}$ $(i = 0,1,2 \ldots)$.
- Αν η άρθρωση πάνω στην οποία βρίσκεται το σύστημα $\{\boldsymbol{i}\}$ είναι:
  - **πρισματική**: $\mathbf{d}_{\boldsymbol{i}+\mathbf{1}}^{\boldsymbol{i}} =$ (μετατόπιση που φαίνεται στο κινηματικό διάγραμμα) $+$ (μετατόπιση λόγω πρισματικής άρθρωσης)
  - **περιστροφική**: $\mathbf{d}_{\boldsymbol{i}+\mathbf{1}}^{\boldsymbol{i}} =$ (Πίνακας περιστροφής ως προς z) $\times$ (μετατόπιση που φαίνεται στο κινηματικό διάγραμμα)

16

Παράδειγμα 4-10

Έστω το τμήμα κινηματικού διαγράμματος που φαίνεται στη διπλανή εικόνα. Να υπολογιστεί το διάνυσμα μετατόπισης $\mathbf{d}_1^0$.



Το $\{\mathbf{0}\}$ σε πρισματική άρθρωση⇒

$$\mathbf{d}_1^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 + d_1 \end{bmatrix}$$

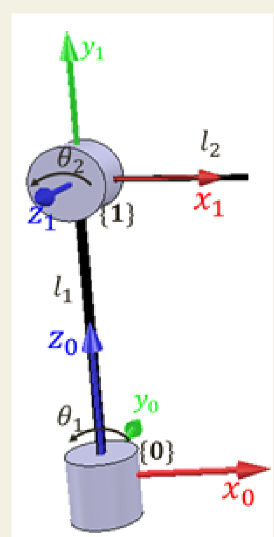
17

Παράδειγμα 4-11

Έστω το τμήμα ενός κινηματικού διαγράμματος της διπλανής εικόνας, το οποίο έχει δύο συστήματα συντεταγμένων: $\{0\}$ και $\{1\}$. Να υπολογιστεί το διάνυσμα μετατόπισης $\mathbf{d}_1^0$.

Το $\{\mathbf{0}\}$ σε περιστροφική άρθρωση⇒

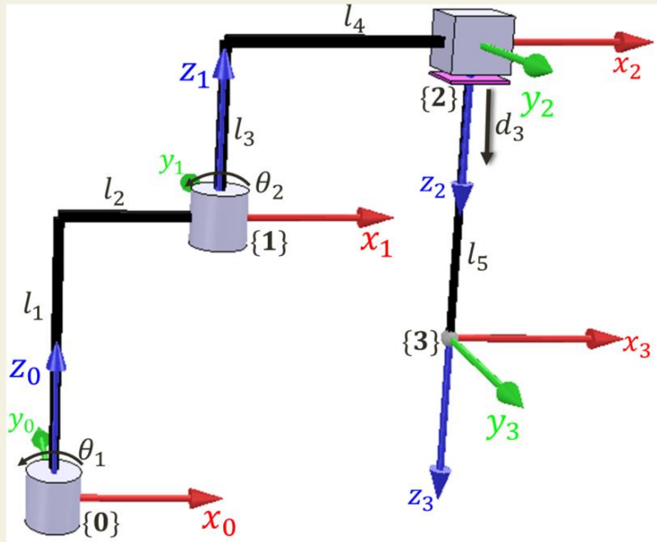
$$\mathbf{d}_1^0 = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \end{bmatrix}$$



18

Παράδειγμα 4-12

Να υπολογιστούν όλα τα διαδοχικά διανύσματα μετατόπισης ενός βραχίονα SCARA τριών βαθμών ελευθερίας.



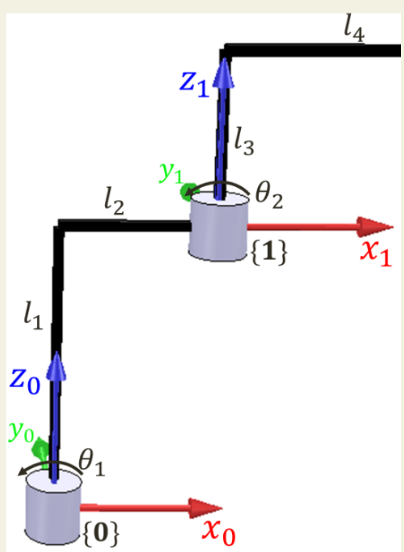
19

Παράδειγμα 4-12 (Λύση)

Το $\{\mathbf{0}\}$ σε περιστροφική άρθρωση⇒

$$\mathbf{d}_1^0 = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ l_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} l_2\cos\theta_1 \\ l_2\sin\theta_1 \\ l_1 \end{bmatrix}$$



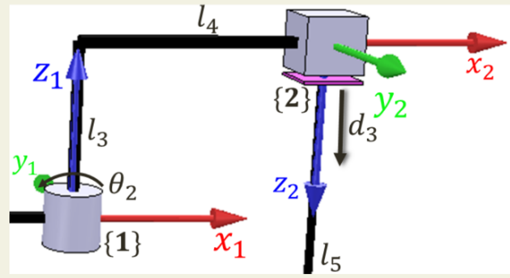
20

Παράδειγμα 4-12 (Λύση)

Το $\{\mathbf{1}\}$ σε περιστροφική άρθρωση⇒

$$\mathbf{d}_2^1 = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_4 \\ 0 \\ l_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} l_4\cos\theta_2 \\ l_4\sin\theta_2 \\ l_3 \end{bmatrix}$$

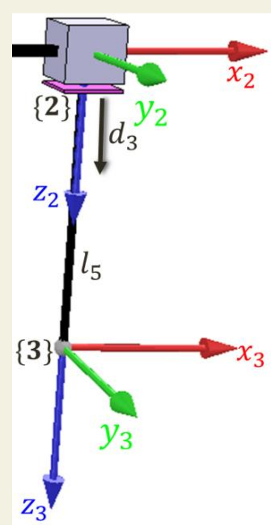


21

Παράδειγμα 4-12 (Λύση)

Το $\{\mathbf{2}\}$ σε πρισματική άρθρωση⇒

$$\mathbf{d}_3^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_5 + d_3 \end{bmatrix}$$



22

Πίνακας Ομογενούς Μετασχηματισμού

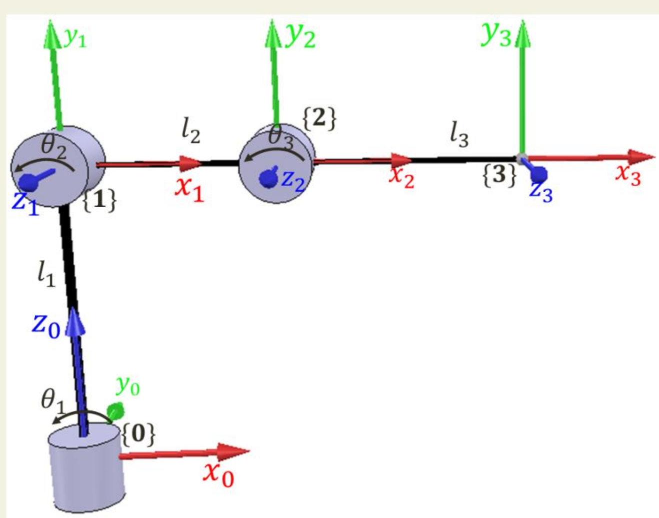
- Έστω δύο διαδοχικά συστήματα συντεταγμένων $\{\boldsymbol{i}\}$ και $\{\boldsymbol{i+1}\}$ $(i = 0,1,2 \ldots)$ με:
  - Πίνακα περιστροφής: $\mathbf{R}_{\boldsymbol{i+1}}^{\boldsymbol{i}}$
  - Διάνυσμα μετατόπισης: $\mathbf{d}_{\boldsymbol{i+1}}^{\boldsymbol{i}}$
- Πίνακας ομογενούς μετασχηματισμού:

$$\mathbf{H}_{\mathbf{i+1}}^{\mathbf{i}} = \left[\begin{array}{ccc|c} & \mathbf{R}_{\mathbf{i+1}}^{\mathbf{i}} & & \mathbf{d}_{\mathbf{i+1}}^{\mathbf{i}} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

23

Παράδειγμα 4-13

Να υπολογιστούν όλοι οι επιμέρους πίνακες ομογενούς μετασχηματισμού για έναν βραχίονα ανθρωπομορφικού τύπου.



24

Παράδειγμα 4-13 (Λύση)

Πίνακας $\mathbf{H}_1^0$

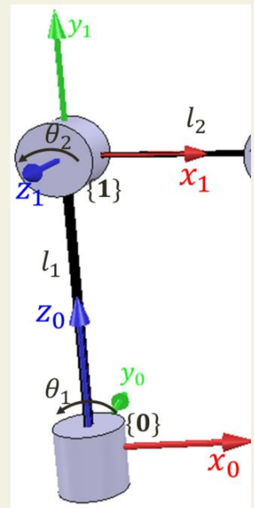
$$\mathbf{R}_1^0 = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & 0 & \sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & 0 & -\cos\theta_1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_1^0 = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & 0 & \sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & 0 & -\cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{d}_1^0 = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \end{bmatrix}$$



Παράδειγμα 4-13 (Λύση)

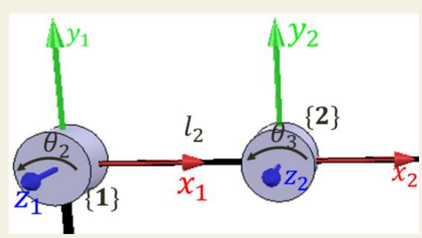
Πίνακας $\mathbf{H}_2^1$

$$\mathbf{R}_2^1 = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{d}_2^1 = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} l_2\cos\theta_2 \\ l_2\sin\theta_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$



$$\mathbf{H}_2^1 = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 & l_2\cos\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 & l_2\sin\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 4-13 (Λύση)

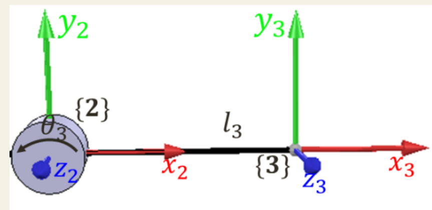
Πίνακας $\mathbf{H}_3^2$

$$\mathbf{R}_3^2 = \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 \\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 \\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{d}_3^2 = \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 \\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} l_3\cos\theta_3 \\ l_3\sin\theta_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

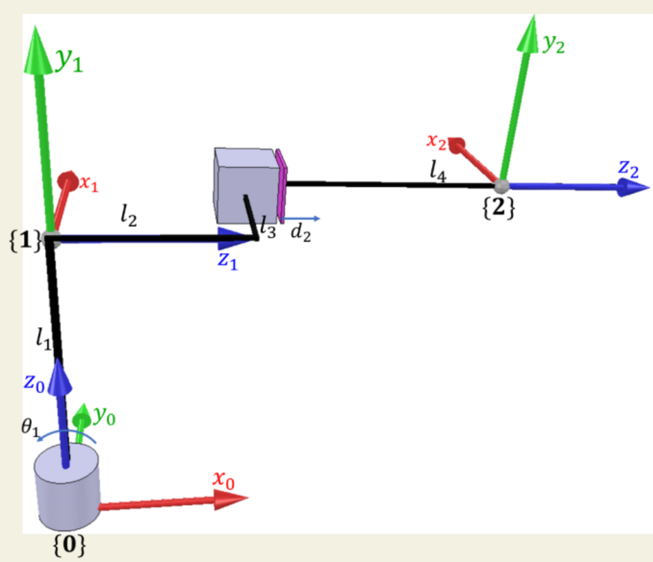


$$\mathbf{H}_3^2 = \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 & l_3\cos\theta_3 \\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 & l_3\sin\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

27

Παράδειγμα 4-14

Να υπολογιστούν όλοι οι επιμέρους πίνακες ομογενούς μετασχηματισμού του κινηματικού διαγράμματος.



28

Παράδειγμα 4-14 (Λύση)

Πίνακας $\mathbf{H}_1^0$

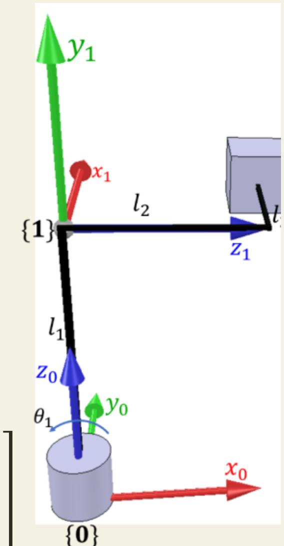
$$\mathbf{R}_1^0 = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\sin\theta_1 & 0 & \cos\theta_1 \\ \cos\theta_1 & 0 & \sin\theta_1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{d}_1^0 = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_1^0 = \begin{bmatrix} -\sin\theta_1 & 0 & \cos\theta_1 & 0 \\ \cos\theta_1 & 0 & \sin\theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



29

Παράδειγμα 4-14 (Λύση)

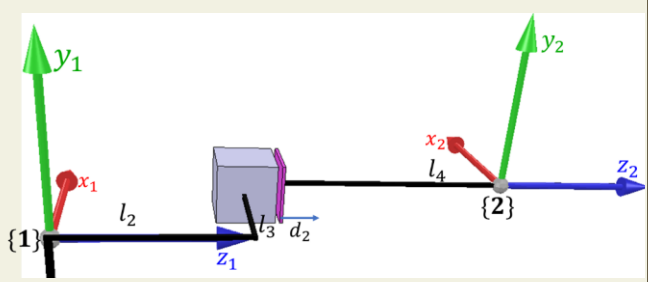
Πίνακας $\mathbf{H}_2^1$

$$\mathbf{R}_2^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{d}_2^1 = \begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \\ l_2 + l_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \\ l_2 + l_4 + d_2 \end{bmatrix}$$



$$\mathbf{H}_2^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_2 + l_4 + d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

30

Συνολικός Πίνακας Ομογενούς Μετασχηματισμού

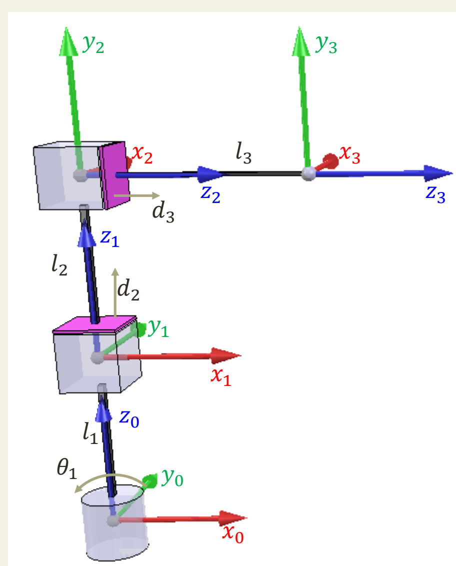
- Οι επιμέρους πίνακες ομογενούς μετασχηματισμού $\mathbf{H_{i+1}^{i}}$ $(i = 0,1,2,\ldots,N-1)$ μπορούν να πολλαπλασιαστούν διαδοχικά για να δώσουν ένα τελικό πίνακα 4×4 $(\mathbf{H}_N^{\mathbf{0}})$, ο οποίος περιγράφει τη θέση και τον προσανατολισμό του τελικού επενεργητή ως προς το σύστημα συντεταγμένων αναφοράς $\{\mathbf{0}\}$:

$$\mathbf{H}_N^{\mathbf{0}} = \mathbf{H_1^0} \cdot \mathbf{H_2^1} \cdot \cdots \cdot \mathbf{H}_N^{\mathbf{N-1}}$$

31

Άσκηση

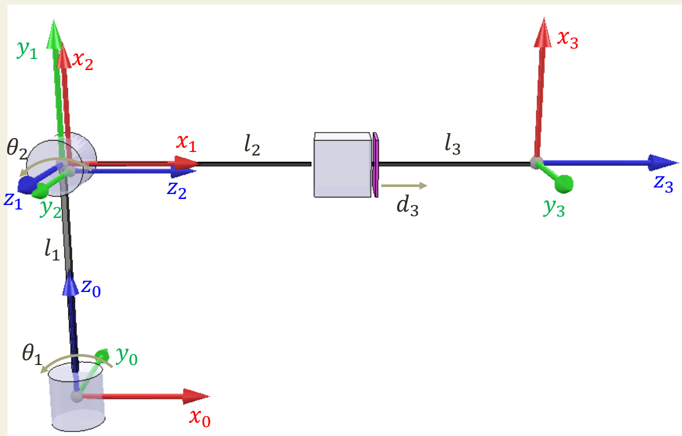
Να βρεθεί ο συνολικός πίνακας ομογενούς μετασχηματισμού για έναν βραχίονα κυλινδρικού τύπου.



32

Άσκηση

Να βρεθεί ο συνολικός πίνακας ομογενούς μετασχηματισμού για έναν βραχίονα σφαιρικού τύπου.



33

Άσκηση

Να βρεθεί ο συνολικός πίνακας ομογενούς μετασχηματισμού για έναν βραχίονα τύπου SCARA.

$$\mathbf{H}_1^0 = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & l_2\cos\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & l_2\sin\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_2^1 = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & \sin\theta_2 & 0 & l_4\cos\theta_2 \\ \sin\theta_2 & -\cos\theta_2 & 0 & l_4\sin\theta_2 \\ 0 & 0 & -1 & l_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_3^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_5 + d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_3^0 = \mathbf{H}_1^0\mathbf{H}_2^1\mathbf{H}_3^2 = (\mathbf{H}_1^0\mathbf{H}_2^1)\mathbf{H}_3^2 = \mathbf{H}_1^0(\mathbf{H}_2^1\mathbf{H}_3^2)$$

34

Παράδειγμα 4-15

Να βρεθεί ο συνολικός πίνακας ομογενούς μετασχηματισμού για έναν βραχίονα ανθρωπομορφικού τύπου.

$$\mathbf{H}_1^0 = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & 0 & \sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & 0 & -\cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{H}_2^1 = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 & l_2\cos\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 & l_2\sin\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_3^2 = \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 & l_3\cos\theta_3 \\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 & l_3\sin\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_3^0 = \mathbf{H}_1^0\mathbf{H}_2^1\mathbf{H}_3^2 = (\mathbf{H}_1^0\mathbf{H}_2^1)\mathbf{H}_3^2 = \mathbf{H}_1^0(\mathbf{H}_2^1\mathbf{H}_3^2)$$

35

Παράδειγμα 4-15 (Λύση)

$$\mathbf{H}_1^0\mathbf{H}_2^1 = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & 0 & \sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & 0 & -\cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 & l_2\cos\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 & l_2\sin\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta_1\cos\theta_2 & -\cos\theta_1\sin\theta_2 & \sin\theta_1 & l_2\cos\theta_1\cos\theta_2 \\ \sin\theta_1\cos\theta_2 & -\sin\theta_1\sin\theta_2 & -\cos\theta_1 & l_2\sin\theta_1\cos\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 & l_1 + l_2\sin\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

36

Παράδειγμα 4-15 (Λύση)

$$(\mathbf{H}_1^0\mathbf{H}_2^1)\mathbf{H}_3^2 = \begin{bmatrix} \cos\theta_1\cos\theta_2 & -\cos\theta_1\sin\theta_2 & \sin\theta_1 & l_2\cos\theta_1\cos\theta_2 \\ \sin\theta_1\cos\theta_2 & -\sin\theta_1\sin\theta_2 & -\cos\theta_1 & l_2\sin\theta_1\cos\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 & l_1 + l_2\sin\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 & l_3\cos\theta_3 \\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 & l_3\sin\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta_1\cos(\theta_2+\theta_3) & -\cos\theta_1\sin(\theta_2+\theta_3) & \sin\theta_1 & \cos\theta_1\left[l_3\cos(\theta_2+\theta_3) + l_2\cos\theta_2\right] \\ \sin\theta_1\cos(\theta_2+\theta_3) & -\sin\theta_1\sin(\theta_2+\theta_3) & -\cos\theta_1 & \sin\theta_1\left[l_3\cos(\theta_2+\theta_3) + l_2\cos\theta_2\right] \\ \sin(\theta_2+\theta_3) & \cos(\theta_2+\theta_3) & 0 & l_1 + l_3\sin(\theta_2+\theta_3) + l_2\sin\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

37