Εισαγωγή στη Ρομποτική

4δ. Εξαγωγή σχέσεων

Π. ΑΣΒΕΣΤΑΣ
E-Mail: pasv@uniwa.gr

1

Εισαγωγή

- Τελικός στόχος: εύρεση σχέσεων ανάμεσα στις συντεταγμένες (x, y, z) του τελικού επενεργητή, ως προς το σύστημα συντεταγμένων αναφοράς $\{\mathbf{0}\}$, και στις μεταβλητές των αρθρώσεων (και τα μήκη των συνδέσμων).
- Δύο ειδών σχέσεις:
  - **ευθείες σχέσεις**: (x, y, z) συναρτήσει των μεταβλητών των αρθρώσεων
  - **αντίστροφες σχέσεις**: μεταβλητές των αρθρώσεων συναρτήσει των συντεταγμένων (x, y, z)

2

Ευθείες σχέσεις

- Προκύπτουν λαμβάνοντας υπόψη ότι ο τελικός επενεργητής ως προς το σύστημα συντεταγμένων $\{N\}$ έχει συντεταγμένες $(0,0,0)$. Καθώς, έχει υπολογιστεί ο πίνακας $\mathbf{H}_{\mathbf{N}}^{\mathbf{0}}$ ισχύει ότι:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{H}_{\mathbf{N}}^{\mathbf{0}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- **Το γινόμενο $\mathbf{H}_{\mathbf{N}}^{\mathbf{0}} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$ αντιστοιχεί στην τελευταία στήλη του πίνακα $\mathbf{H}_{\mathbf{N}}^{\mathbf{0}}$.**

3

Αντίστροφες σχέσεις

- Προκύπτουν από τις ευθείες σχέσεις, επιλύοντας αυτές ως προς τις μεταβλητές των αρθρώσεων.
- Συνήθως, οι ευθείες σχέσεις είναι μη γραμμικές σχέσεις που περιέχουν ημίτονα και συνημίτονα γωνιών $\Rightarrow$ δεν υπάρχει τυποποιημένος τρόπος εύρεσης των αντίστροφων σχέσεων.

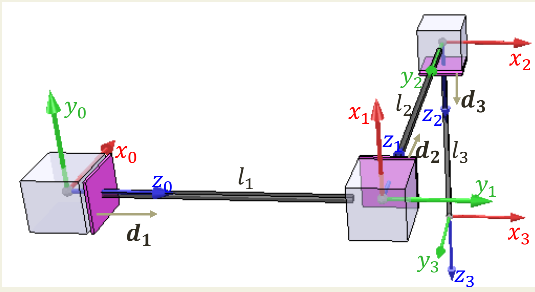
4

Άσκηση

α) Να βρεθούν οι ευθείες και οι αντίστροφες σχέσεις για έναν βραχίονα καρτεσιανού τύπου.

β) Εάν $\boldsymbol{l_1 = 30\ \mathrm{cm}}$, $\boldsymbol{l_2 = 20\ \mathrm{cm}}$ και $\boldsymbol{l_3 = 10\ \mathrm{cm}}$, να υπολογιστούν οι μεταβλητές των αρθρώσεων ώστε ο τελικός επενεργητής να μεταβεί στη θέση $\boldsymbol{(25\ \mathrm{cm}, -12\ \mathrm{cm}, 33\ \mathrm{cm})}$.

γ) Να υπολογιστεί ο προσανατολισμός του τελικού επενεργητή στη θέση αυτή.



5

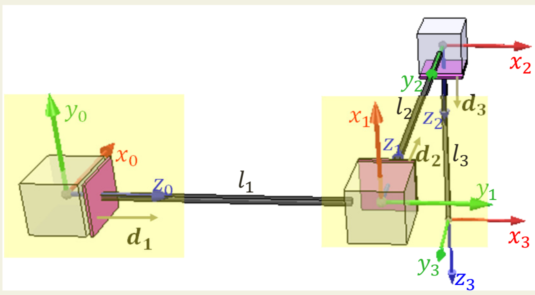
Άσκηση (Λύση)

α) Σχέσεις

$$\mathbf{R_1^0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{d_1^0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_1 + l_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H_1^0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 + l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



6

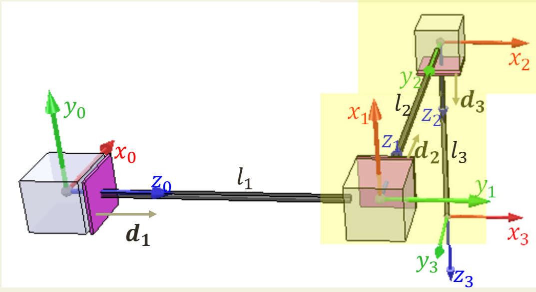
Άσκηση (Λύση)

α) Σχέσεις

$$\mathbf{R}_2^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{d}_2^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_2 + l_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_2^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_2 + l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



7

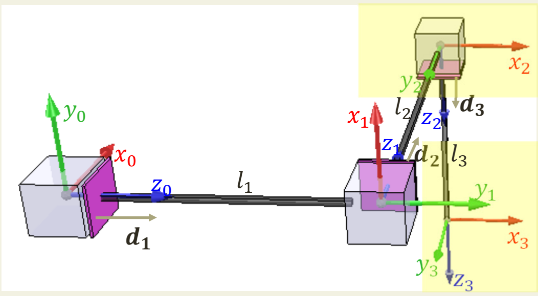
Άσκηση (Λύση)

α) Σχέσεις

$$\mathbf{R}_3^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{d}_3^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_3 + l_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_3^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 + l_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



8

Άσκηση (Λύση)

α) Σχέσεις

$$\mathbf{H_3^0} = \mathbf{H_1^0 H_2^1 H_3^2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 + l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_2 + l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 + l_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 + l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -(d_3 + l_3) \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_2 + l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & d_2 + l_2 \\ 0 & 0 & -1 & -(d_3 + l_3) \\ 1 & 0 & 0 & d_1 + l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

9

Άσκηση (Λύση)

β) Σχέσεις

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{H_3^0} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & d_2 + l_2 \\ 0 & 0 & -1 & -(d_3 + l_3) \\ 1 & 0 & 0 & d_1 + l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_2 + l_2 \\ -(d_3 + l_3) \\ d_1 + l_1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} x = d_2 + l_2 \\ y = -(d_3 + l_3) \\ z = d_1 + l_1 \end{matrix}} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} d_2 = x - l_2 \\ d_3 = -y - l_3 \\ d_1 = z - l_1 \end{matrix}}$$

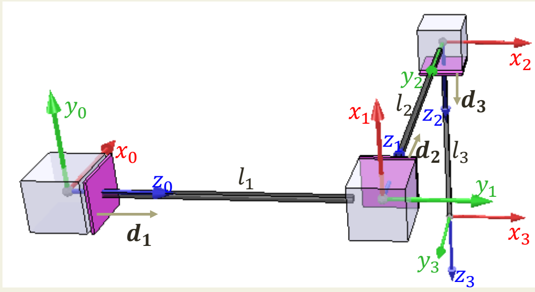
Ευθείες σχέσεις — Αντίστροφες σχέσεις

10

Άσκηση (Λύση)

β) $l_1 = 30\text{ cm}$, $l_2 = 20\text{ cm}$ και $l_3 = 10\text{ cm}$
$(x, y, z) = (25\text{ cm}, -12\text{ cm}, 33\text{ cm})$
$d_1 =;\ d_2 =;\ d_3 =;$

$$\left.\begin{aligned} d_2 &= x - l_2 \\ d_3 &= -y - l_3 \\ d_1 &= z - l_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} d_2 &= 5\text{ cm} \\ d_3 &= 2\text{ cm} \\ d_1 &= 3\text{ cm} \end{aligned}\right\} \textbf{ Αναμενόμενα;;}$$



γ) Προσανατολισμός

$$\mathbf{H}_3^0 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & d_2 + l_2 \\ 0 & 0 & -1 & -(d_3 + l_3) \\ 1 & 0 & 0 & d_1 + l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{R}_3^0 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_3 \upuparrows z_0 \\ y_3 \uparrow\downarrow x_0 \\ z_3 \uparrow\downarrow y_0 \end{matrix} \textbf{ Αναμενόμενα;;}$$

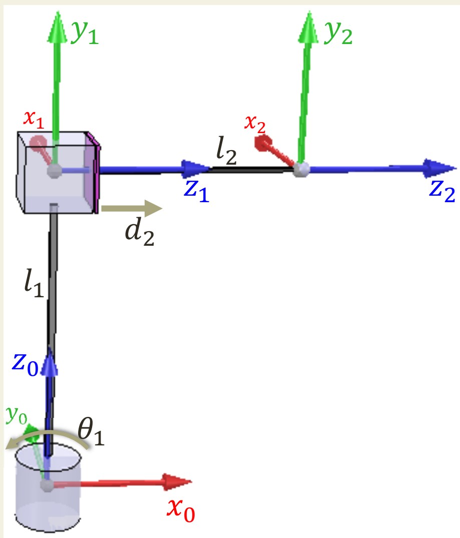
11

Άσκηση

α) Να βρεθούν οι ευθείες και οι αντίστροφες σχέσεις για το κινηματικό διάγραμμα της εικόνας.

β) Εάν $l_1 = 20\text{ cm}$ και $l_2 = 10\text{ cm}$, να υπολογιστούν οι μεταβλητές των αρθρώσεων, ώστε ο τελικός επενεργητής να μεταβεί στη θέση $(0\text{ cm}, 15\text{ cm}, 20\text{ cm})$.

γ) Να υπολογιστεί ο προσανατολισμός του τελικού επενεργητή στη θέση αυτή.



12

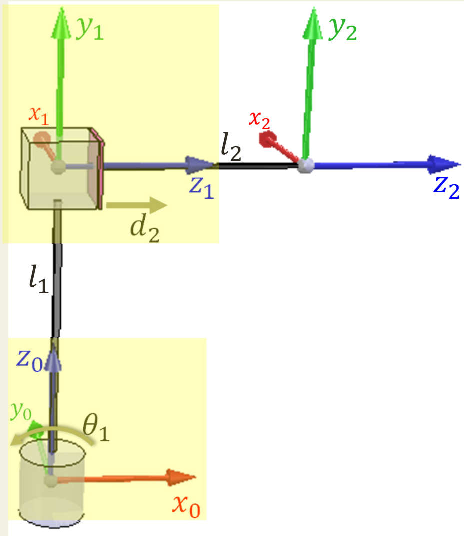
Άσκηση (Λύση)

α) Σχέσεις

$$\mathbf{R}_1^0 = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\theta_1 & 0 & \cos\theta_1 \\ \cos\theta_1 & 0 & \sin\theta_1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{d}_1^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_1^0 = \begin{bmatrix} -\sin\theta_1 & 0 & \cos\theta_1 & 0 \\ \cos\theta_1 & 0 & \sin\theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



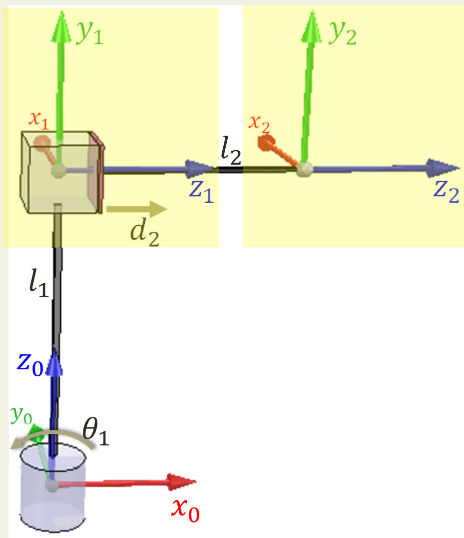
Άσκηση (Λύση)

α) Σχέσεις

$$\mathbf{R}_2^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{d}_2^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_2 + d_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_2^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_2 + d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Άσκηση (Λύση)

α) Σχέσεις

$$\mathbf{H}_2^0 = \mathbf{H}_1^0\mathbf{H}_2^1 = \begin{bmatrix} -\sin\theta_1 & 0 & \cos\theta_1 & 0 \\ \cos\theta_1 & 0 & \sin\theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_2 + d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\sin\theta_1 & 0 & \cos\theta_1 & \cos\theta_1\,(l_2 + d_2) \\ \cos\theta_1 & 0 & \sin\theta_1 & \sin\theta_1\,(l_2 + d_2) \\ 0 & 1 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

15

Άσκηση (Λύση)

α) Σχέσεις

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{H}_2^0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\theta_1 & 0 & \cos\theta_1 & \cos\theta_1\,(l_2 + d_2) \\ \cos\theta_1 & 0 & \sin\theta_1 & \sin\theta_1\,(l_2 + d_2) \\ 0 & 1 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_1\,(l_2 + d_2) \\ \sin\theta_1\,(l_2 + d_2) \\ l_1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{gathered} x = \cos\theta_1\,(l_2 + d_2) \\ y = \sin\theta_1\,(l_2 + d_2) \\ z = l_1 \end{gathered}}$$

Ευθείες σχέσεις

16

Άσκηση (Λύση)

α) Σχέσεις

$$x = \cos\theta_1\,(l_2 + d_2)$$

$$y = \sin\theta_1\,(l_2 + d_2)$$

$$\frac{y}{x} = \frac{\sin\theta_1}{\cos\theta_1} \Rightarrow \frac{y}{x} = \tan\theta_1 \Rightarrow \boxed{\theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = l_2 + d_2 \Rightarrow \quad \boxed{d_2 = \sqrt{x^2 + y^2} - l_2}$$

17

Άσκηση (Λύση)

β) $l_1 = 20\text{ cm}, \quad l_2 = 10\text{ cm}, \quad (x, y, z) = (0\text{ cm}, 15\text{ cm}, 20\text{ cm})$

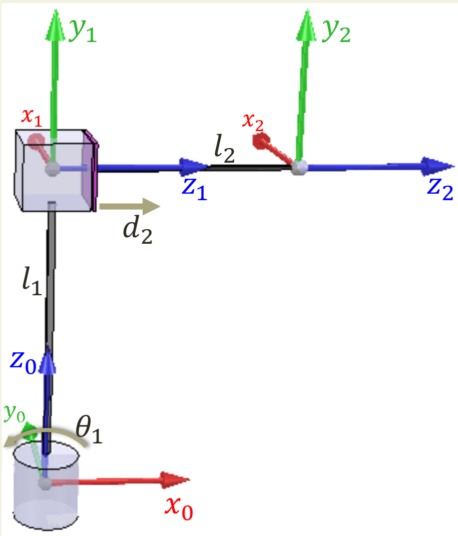
$\theta_1 =;\ d_2 =;$

$$\theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{15\text{ cm}}{0\text{ cm}}\right)$$

$$= \tan^{-1}(\infty) = 90°$$

$$d_2 = \sqrt{x^2 + y^2} - l_2 = \left(\sqrt{0^2 + 15^2} - 10\right)\text{cm}$$

$$= 5\text{ cm}$$



18

Άσκηση (Λύση)

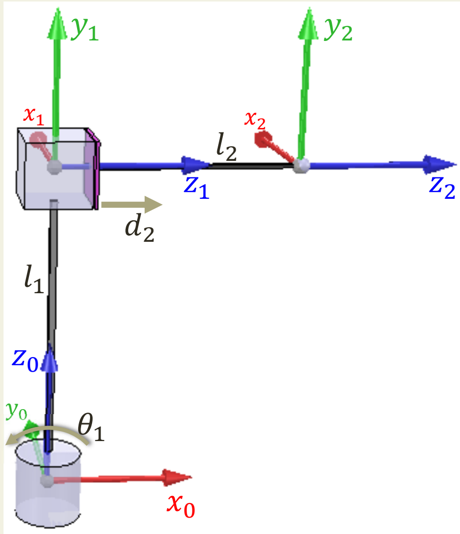
γ) Προσανατολισμός

$$\mathbf{H}_2^0 = \begin{bmatrix} -\sin\theta_1 & 0 & \cos\theta_1 & \cos\theta_1\,(l_2+d_2) \\ \cos\theta_1 & 0 & \sin\theta_1 & \sin\theta_1\,(l_2+d_2) \\ 0 & 1 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\mathbf{R}_2^0 = \begin{bmatrix} -\sin\theta_1 & 0 & \cos\theta_1 \\ \cos\theta_1 & 0 & \sin\theta_1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xRightarrow{\theta_1=90°}$$

$$\mathbf{R}_2^0 = \begin{bmatrix} -\sin 90° & 0 & \cos 90° \\ \cos 90° & 0 & \sin 90° \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} x_2 \uparrow\downarrow x_0 \\ y_2 \uparrow\uparrow z_0 \\ z_2 \uparrow\uparrow y_0 \end{matrix}$$



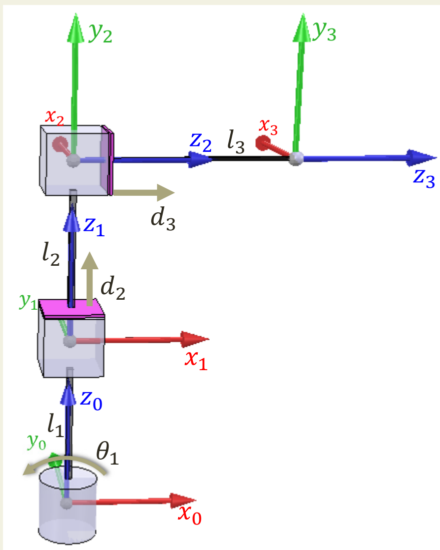
19

Άσκηση

α) Να βρεθούν οι ευθείες και οι αντίστροφες σχέσεις για τον βραχίονα κυλινδρικού τύπου.

β) Εάν $l_1 = 20$ cm, $l_2 = 20$ cm και $l_3 = 10$ cm, να υπολογιστούν οι μεταβλητές των αρθρώσεων, ώστε ο τελικός επενεργητής να μεταβεί στη θέση $(-15\text{ cm}, 0\text{ cm}, 50\text{ cm})$.

γ) Να υπολογιστεί ο προσανατολισμός του τελικού επενεργητή στη θέση αυτή.



20

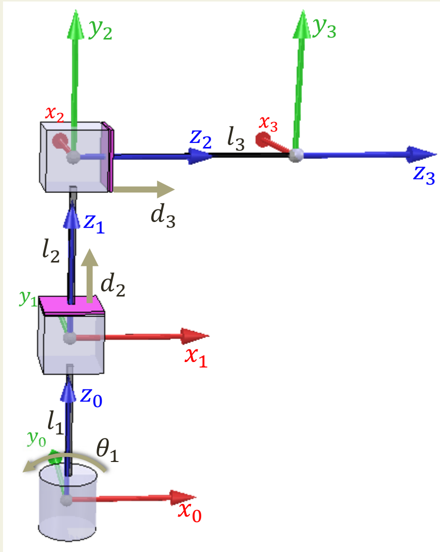
Άσκηση (Λύση)

α) Σχέσεις

$$\mathbf{H}_1^0 = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_2^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_2 + d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_3^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_3 + d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Άσκηση (Λύση)

α) Σχέσεις

$$\mathbf{H}_3^0 = \mathbf{H}_1^0\mathbf{H}_2^1\mathbf{H}_3^2 = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_2 + d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_3 + d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & l_3 + d_3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_2 + d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\sin\theta_1 & 0 & \cos\theta_1 & \cos\theta_1\,(l_3 + d_3) \\ \cos\theta_1 & 0 & \sin\theta_1 & \sin\theta_1\,(l_3 + d_3) \\ 0 & 1 & 0 & l_1 + l_2 + d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Άσκηση (Λύση)

α) Σχέσεις

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{H}_3^0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\theta_1 & 0 & \cos\theta_1 & \cos\theta_1\,(l_3+d_3) \\ \cos\theta_1 & 0 & \sin\theta_1 & \sin\theta_1\,(l_3+d_3) \\ 0 & 1 & 0 & l_1+l_2+d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_1\,(l_3+d_3) \\ \sin\theta_1\,(l_3+d_3) \\ l_1+l_2+d_2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} x = \cos\theta_1\,(l_3+d_3) \\ y = \sin\theta_1\,(l_3+d_3) \\ z = l_1+l_2+d_2 \end{array}}$$

Ευθείες σχέσεις

Άσκηση (Λύση)

α) Σχέσεις

$$x = \cos\theta_1\,(l_3+d_3)$$

$$y = \sin\theta_1\,(l_3+d_3)$$

$$z = l_1+l_2+d_2$$

$$\frac{y}{x} = \frac{\sin\theta_1}{\cos\theta_1} \Rightarrow \frac{y}{x} = \tan\theta_1 \Rightarrow \boxed{\theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)}$$

$$\sqrt{x^2+y^2} = d_3 + l_3 \Rightarrow \boxed{d_3 = \sqrt{x^2+y^2} - l_3}$$

$$\boxed{d_2 = z - (l_1 + l_2)}$$

Άσκηση

β) $l_1 = 20\text{ cm},\ l_2 = 20\text{ cm}$ και $l_3 = 10\text{ cm}$,
$(x, y, z) = (-15\text{ cm}, 0\text{ cm}, 50\text{ cm})$
$\theta_1 =;\ d_2 =;\ d_3 =;$

$$\theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{0\text{ cm}}{-180\text{ cm}}\right) = \tan^{-1}(0) = 180°$$

$$d_3 = \sqrt{x^2 + y^2} - l_3 = \left(\sqrt{15^2 + 0^2} - 10\right)\text{cm} = 5\text{ cm}$$

$$d_2 = z - (l_1 + l_2) = 50\text{ cm} - (20 + 20)\text{cm} = 10\text{ cm}$$

Άσκηση (Λύση)

γ) Προσανατολισμός

$$\mathbf{H_3^0} = \begin{bmatrix} -\sin\theta_1 & 0 & \cos\theta_1 & \cos\theta_1\,(l_3 + d_3) \\ \cos\theta_1 & 0 & \sin\theta_1 & \sin\theta_1\,(l_3 + d_3) \\ 0 & 1 & 0 & l_1 + l_2 + d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\mathbf{R_3^0} = \begin{bmatrix} -\sin\theta_1 & 0 & \cos\theta_1 \\ \cos\theta_1 & 0 & \sin\theta_1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xRightarrow{\theta_1 = 180°}$$

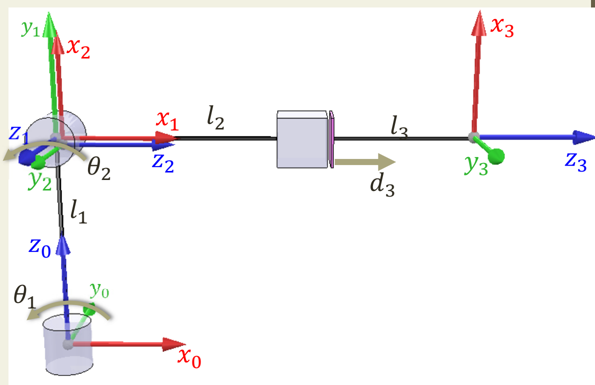
$$\mathbf{R_3^0} = \begin{bmatrix} -\sin 180° & 0 & \cos 180° \\ \cos 180° & 0 & \sin 180° \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_3 \uparrow\downarrow y_0 \\ y_3 \uparrow\uparrow z_0 \\ z_3 \uparrow\downarrow x_0 \end{matrix}$$

Άσκηση

α) Να βρεθούν οι ευθείες και οι αντίστροφες σχέσεις για τον βραχίονα σφαιρικού τύπου.

β) Εάν $\boldsymbol{l_1 = 50\ \mathrm{cm}}$, $\boldsymbol{l_2 = 30\ \mathrm{cm}}$ και $\boldsymbol{l_3 = 5\ \mathrm{cm}}$, να υπολογιστούν οι μεταβλητές των αρθρώσεων, ώστε ο τελικός επενεργητής να μεταβεί στη θέση $\boldsymbol{(0\ \mathrm{cm}, 45\ \mathrm{cm}, 95\ \mathrm{cm})}$.

γ) Να υπολογιστεί ο προσανατολισμός του τελικού επενεργητή στη θέση αυτή.



27

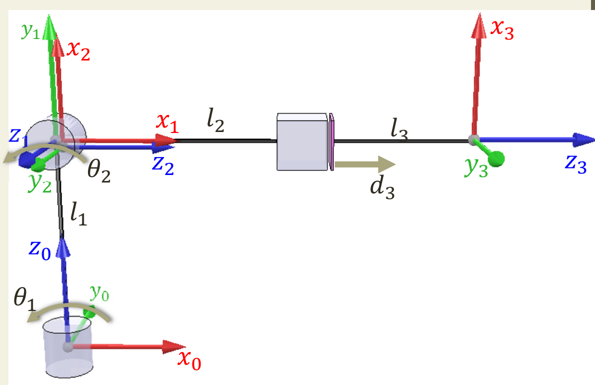
Άσκηση

α) Σχέσεις

$$\mathbf{H_1^0} = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & 0 & \sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & 0 & -\cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H_2^1} = \begin{bmatrix} -\sin\theta_2 & 0 & \cos\theta_2 & 0 \\ \cos\theta_2 & 0 & \sin\theta_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H_3^2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_2 + l_3 + d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



28

Άσκηση (Λύση)

α) Σχέσεις

$$\mathbf{H}_3^0 = \mathbf{H}_1^0\mathbf{H}_2^1\mathbf{H}_3^2 = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & 0 & \sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & 0 & -\cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin\theta_2 & 0 & \cos\theta_2 & 0 \\ \cos\theta_2 & 0 & \sin\theta_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_2+l_3+d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & 0 & \sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & 0 & -\cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin\theta_2 & 0 & \cos\theta_2 & \cos\theta_2\,(l_2+l_3+d_3) \\ \cos\theta_2 & 0 & \sin\theta_2 & \sin\theta_2\,(l_2+l_3+d_3) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\cos\theta_1\sin\theta_2 & \sin\theta_1 & \cos\theta_1\cos\theta_2 & \cos\theta_1\cos\theta_2\,(l_2+l_3+d_3) \\ -\sin\theta_1\sin\theta_2 & -\cos\theta_1 & \sin\theta_1\cos\theta_2 & \sin\theta_1\cos\theta_2\,(l_2+l_3+d_3) \\ \cos\theta_2 & 0 & \sin\theta_2 & l_1+\sin\theta_2\,(l_2+l_3+d_3) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

29

Άσκηση (Λύση)

α) Σχέσεις

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{H}_3^0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos\theta_1\sin\theta_2 & \sin\theta_1 & \cos\theta_1\cos\theta_2 & \cos\theta_1\cos\theta_2\,(l_2+l_3+d_3) \\ -\sin\theta_1\sin\theta_2 & -\cos\theta_1 & \sin\theta_1\cos\theta_2 & \sin\theta_1\cos\theta_2\,(l_2+l_3+d_3) \\ \cos\theta_2 & 0 & \sin\theta_2 & l_1+\sin\theta_2\,(l_2+l_3+d_3) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_1\cos\theta_2\,(l_2+l_3+d_3) \\ \sin\theta_1\cos\theta_2\,(l_2+l_3+d_3) \\ l_1+\sin\theta_2\,(l_2+l_3+d_3) \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} x &= \cos\theta_1\cos\theta_2\,(l_2+l_3+d_3) \\ y &= \sin\theta_1\cos\theta_2\,(l_2+l_3+d_3) \\ z &= l_1+\sin\theta_2\,(l_2+l_3+d_3) \end{aligned}}$$

Ευθείες σχέσεις

30

Άσκηση (Λύση)

α) Σχέσεις

$$x = \cos\theta_1 \cos\theta_2 \,(l_2 + l_3 + d_3)$$
$$y = \sin\theta_1 \cos\theta_2 \,(l_2 + l_3 + d_3)$$
$$z = l_1 + \sin\theta_2 \,(l_2 + l_3 + d_3)$$
$$\frac{y}{x} = \frac{\sin\theta_1}{\cos\theta_1} \Rightarrow \frac{y}{x} = \tan\theta_1 \Rightarrow \boxed{\theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)}$$

$$z - l_1 = \sin\theta_2 \,(l_2 + l_3 + d_3)$$
$$\sqrt{x^2 + y^2} = \cos\theta_2 \,(l_2 + l_3 + d_3)$$
$$\Rightarrow \frac{(z - l_1)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\sin\theta_2}{\cos\theta_2} \Rightarrow \frac{z - l_1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \tan\theta_2 \Rightarrow$$

$$\boxed{\theta_2 = \tan^{-1}\left(\frac{z - l_1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)} \qquad \boxed{d_3 = \frac{z - l_1}{\sin\theta_2} - (l_2 + l_3)}$$

31

Άσκηση (Λύση)

β) $l_1 = 50$ cm, $l_2 = 30$ cm, $l_3 = 5$ cm, $(x, y, z) = (0\text{ cm}, 45\text{ cm}, 95\text{ cm})$

$\theta_1 =;\ \theta_2 =;\ d_3 =;$

$$\theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{45}{0}\right) = \tan^{-1}(\infty) = 90°$$

$$\theta_2 = \tan^{-1}\left(\frac{z - l_1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{95 - 50}{\sqrt{0^2 + 45^2}}\right) = \tan^{-1}(1) = 45°$$

$$d_3 = \frac{z - l_1}{\sin\theta_2} - (l_2 + l_3) = \frac{95-50}{\sin 45°}\text{cm} - (30 + 5)\text{ cm} = 28{,}6\text{ cm}$$

32

Άσκηση (Λύση)

γ) Προσανατολισμός

$$\mathbf{H_3^0} = \begin{bmatrix} -\cos\theta_1 \sin\theta_2 & \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \cos\theta_2 & \cos\theta_1 \cos\theta_2\,(l_2 + l_3 + d_3) \\ -\sin\theta_1 \sin\theta_2 & -\cos\theta_1 & \sin\theta_1 \cos\theta_2 & \sin\theta_1 \cos\theta_2\,(l_2 + l_3 + d_3) \\ \cos\theta_2 & 0 & \sin\theta_2 & l_1 + \sin\theta_2\,(l_2 + l_3 + d_3) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\mathbf{R_3^0} = \begin{bmatrix} -\cos\theta_1 \sin\theta_2 & \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \cos\theta_2 \\ -\sin\theta_1 \sin\theta_2 & -\cos\theta_1 & \sin\theta_1 \cos\theta_2 \\ \cos\theta_2 & 0 & \sin\theta_2 \end{bmatrix} \xRightarrow{\theta_1=90°,\theta_2=45°}$$

$$\mathbf{R_3^0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -0.707 & 0 & 0.707 \\ 0{,}707 & 0 & 0{,}707 \end{bmatrix}$$

33