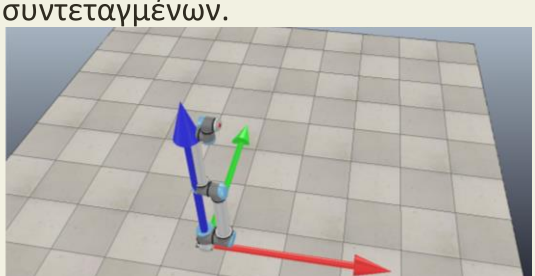
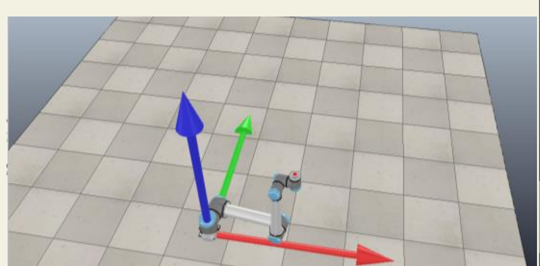
ΘΕΣΗ ΚΑΙ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ

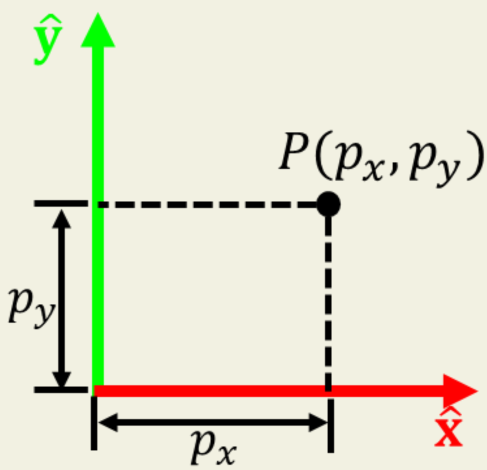
Εισαγωγή

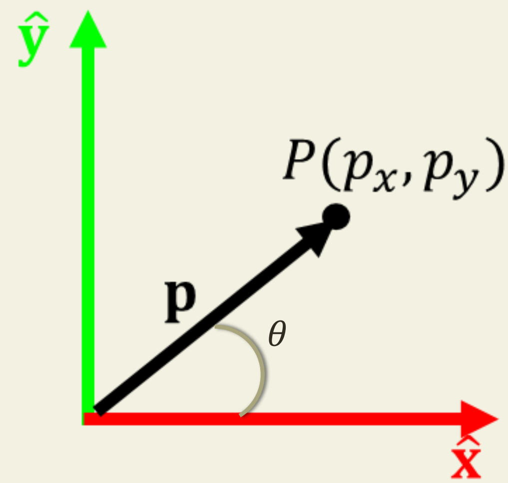
- Η ρομποτική ασχολείται με τη θέση και τον προσανατολισμό που λαμβάνει ένας βραχίονας για να επιτελέσει μία συγκεκριμένη λειτουργία.
- Θέση: συντεταγμένες ως προς σύστημα αναφοράς.
- Προσανατολισμός: περιστροφή ως προς άξονες συστήματος συντεταγμένων.



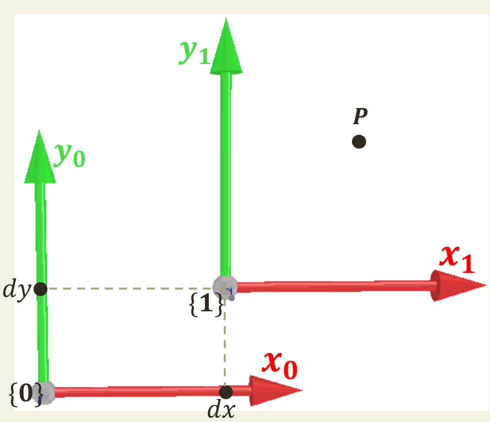


Συστήματα συντεταγμένων 2Δ





ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ 2-Δ (ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ)

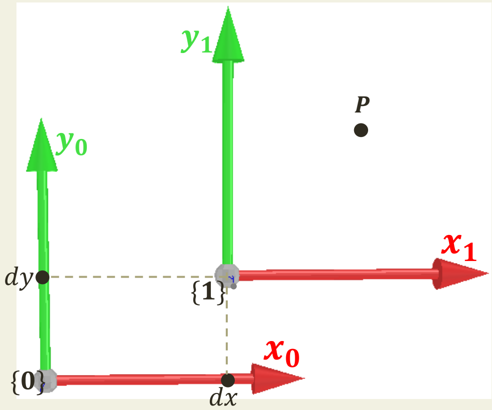


Έστω το σύστημα συντεταγμένων **{1}** το οποίο είναι μετατοπισμένο ως προς το σύστημα συντεταγμένων **{0}** κατά (dx, dy) κατά μήκος των αξόνων x_0 και y_0 αντίστοιχα.
Έστω σημείο P με συντεταγμένες $\left(x^{(1)}, y^{(1)}\right)$ ως προς το σύστημα **{1}**.
Οι συντεταγμένες $\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right)$ ως προς το σύστημα **{0}** θα είναι:

$$x^{(0)} = x^{(1)} + dx$$

$$y^{(0)} = y^{(1)} + dy$$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ 2-Δ (ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ)



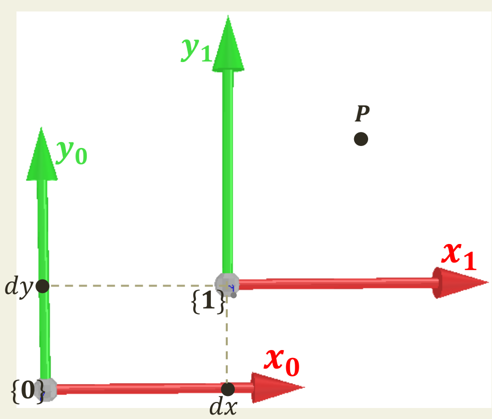
Ισοδύναμα:

$$\begin{bmatrix} x^{(0)} \\ y^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας στήλη $\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$ συμβολίζεται με $\mathbf{d}_1^0$ και είναι το **διάνυσμα μετατόπισης** στις 2 διαστάσεις.

5

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ 2-Δ (ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ)



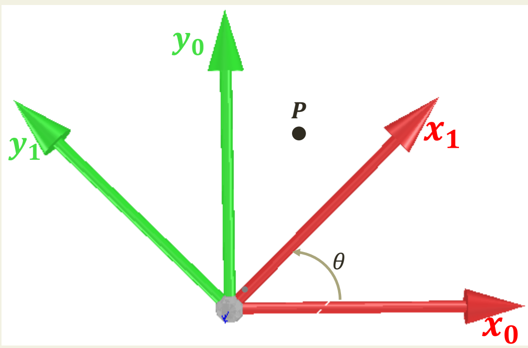
Ισοδύναμα

$$\begin{bmatrix} x^{(0)} \\ y^{(0)} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & dx \\ 0 & 1 & dy \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας $\begin{bmatrix} 1 & 0 & dx \\ 0 & 1 & dy \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ συμβολίζεται με $\mathbf{H}_1^0$ και είναι ο **πίνακας ομογενούς μετασχηματισμού** στις 2 διαστάσεις όταν υπάρχει μόνο μετατόπιση.

6

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ 2-Δ (ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ)



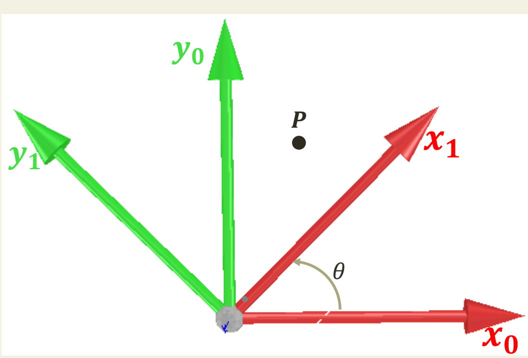
Έστω το σύστημα συντεταγμένων **{1}** το οποίο έχει περιστραφεί κατά γωνία θ ως προς το σύστημα συντεταγμένων **{0}**.
Έστω σημείο P με συντεταγμένες $\left(x^{(1)}, y^{(1)}\right)$ ως προς το σύστημα **{1}**.
Οι συντεταγμένες $\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right)$ ως προς το σύστημα **{0}** θα είναι:

$$x^{(0)} = \cos\theta \cdot x^{(1)} - \sin\theta \cdot y^{(1)}$$

$$y^{(0)} = sin\,\theta \cdot x^{(1)} + cos\,\theta \cdot y^{(1)}$$

7

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ 2-Δ (ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ)



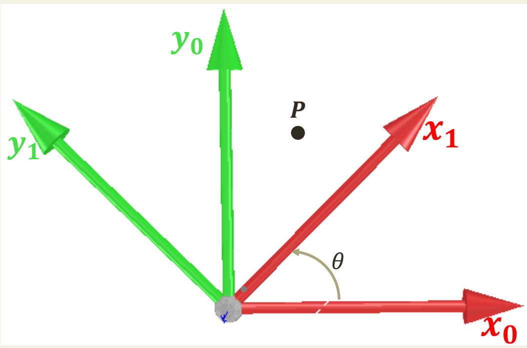
Ισοδύναμα:

$$\begin{bmatrix} x^{(0)} \\ y^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ συμβολίζεται με $\mathbf{R}_1^0$ και είναι ο **πίνακας περιστροφής** στις 2 διαστάσεις.

8

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ 2-Δ (ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ)



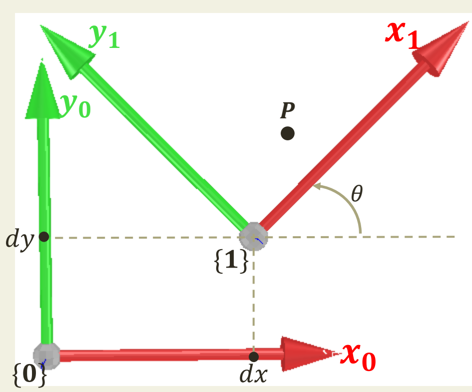
Ισοδύναμα:

$$\begin{bmatrix} x^{(0)} \\ y^{(0)} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ συμβολίζεται με $\mathbf{H}_1^0$ και είναι ο **πίνακας ομογενούς μετασχηματισμού** στις 2 διαστάσεις όταν υπάρχει μόνο περιστροφή.

9

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ 2-Δ (ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ ΚΑΙ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ)



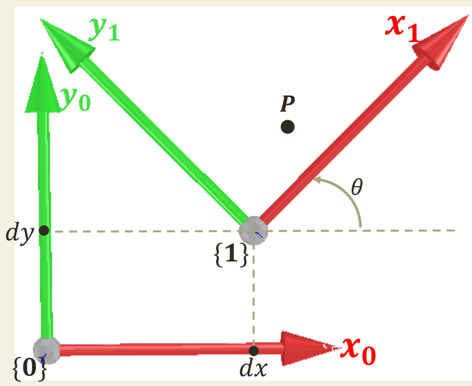
Έστω το σύστημα συντεταγμένων **{1}** το οποίο έχει περιστραφεί κατά γωνία θ ως προς το σύστημα συντεταγμένων **{0}** και έχει μετατοπιστεί κατά (dx, dy).
Έστω σημείο P με συντεταγμένες $\left(x^{(1)}, y^{(1)}\right)$ ως προς το σύστημα **{1}**.
Οι συντεταγμένες $\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right)$ ως προς το σύστημα **{0}** θα είναι:

$$x^{(0)} = \cos\theta \cdot x^{(1)} - \sin\theta \cdot y^{(1)} + dx$$

$$y^{(0)} = sin\,\theta \cdot x^{(1)} + cos\,\theta \cdot y^{(1)} + dy$$

10

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ 2-Δ (ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ ΚΑΙ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ)



Ισοδύναμα:

$$\begin{bmatrix} x^{(0)} \\ y^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$$

ή:

$$\begin{bmatrix} x^{(0)} \\ y^{(0)} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & dx \\ \sin\theta & \cos\theta & dy \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \\ 1 \end{bmatrix}$$

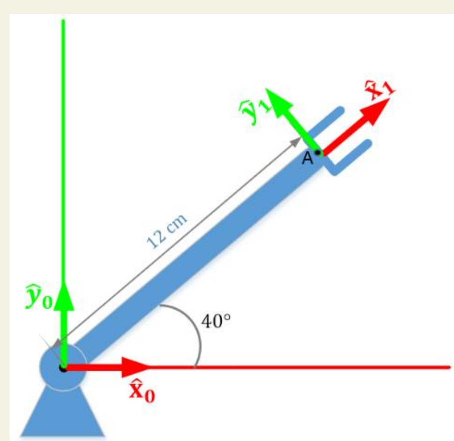
όπου ο πίνακας $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & dx \\ \sin\theta & \cos\theta & dy \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ συμβολίζεται με $\mathbf{H}_1^0$ και είναι ο γενικός **πίνακας ομογενούς μετασχηματισμού** στις 2 διαστάσεις.

11

Παράδειγμα 2-4

Έστω ένας πολύ απλός ρομποτικός βραχίονας που περιλαμβάνει μία βάση με μία περιστροφική άρθρωση και έναν σύνδεσμο μήκους $l = 12$ cm, στο άκρο του οποίου συνδέεται ο τελικός επενεργητής. Η κάτοψη του ρομπότ δίνεται στην εικόνα. Το ρομπότ μπορεί να κινείται μόνο στο επίπεδο x-y.

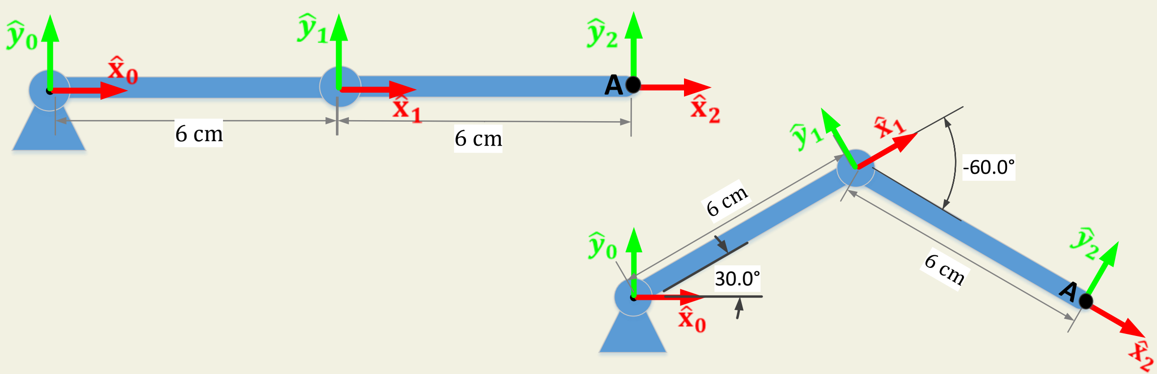
Ποια θα είναι η θέση του σημείου A του τελικού επενεργητή εάν η γωνία της περιστροφικής άρθρωση γίνει $\theta = 40°$;



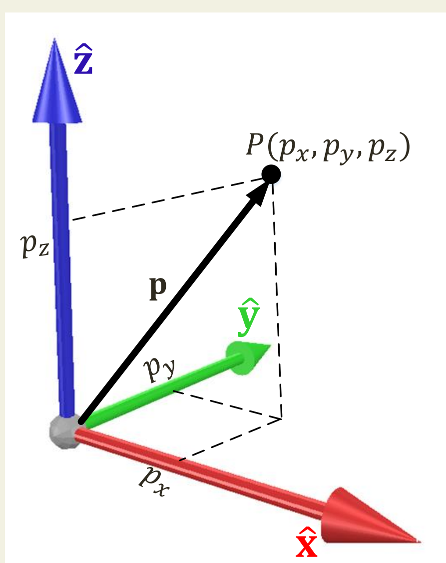
12

Παράδειγμα 2-5

Έστω ο ρομποτικός βραχίονας τύπου SCARA με δύο περιστροφικές αρθρώσεις, η κάτοψη του οποίου δίνεται στην εικόνα. Ο βραχίονας κινείται μόνο στο επίπεδο x-y. Αρχικά, οι δύο αρθρώσεις έχουν μηδενική γωνία περιστροφής, όπως δείχνει η εικόνα. Ποια θα είναι η θέση του σημείου A του τελικού επενεργητή εάν η γωνία της πρώτης περιστροφικής άρθρωση γίνει $30°$ και της δεύτερης άρθρωσης γίνει $-60°$;

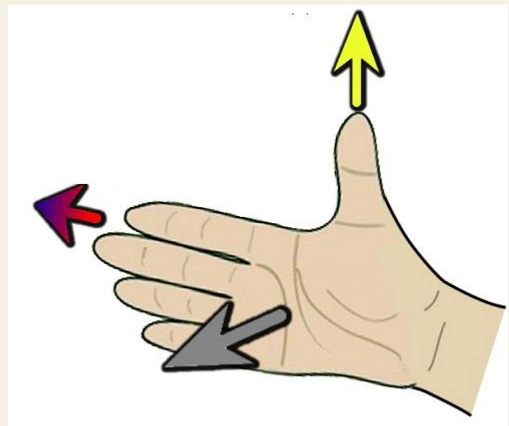


Συστήματα συντεταγμένων 3Δ

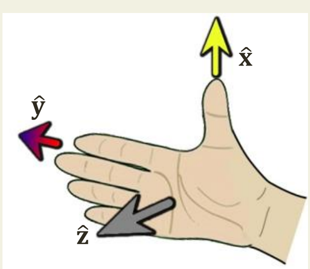


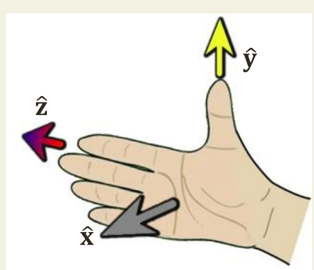
Σύστημα Συντεταγμένων στις 3Δ

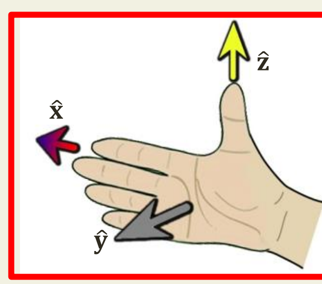
- Κανόνας δεξιού χεριού:
  - Χρησιμοποιούμε το δεξί χέρι:
    - Ο αντίχειρας και τα υπόλοιπα δάχτυλα σε ορθή γωνία.
    - Ο αντίχειρας δείχνει τον $1^{ο}$ άξονα.
    - Τα υπόλοιπα δάχτυλα δείχνουν τον $2^{ο}$ άξονα.
    - Η παλάμη δείχνει την κατεύθυνση του $3^{ου}$ άξονα.



Συστήματα συντεταγμένων 3Δ (Κανόνας δεξιού χεριού)

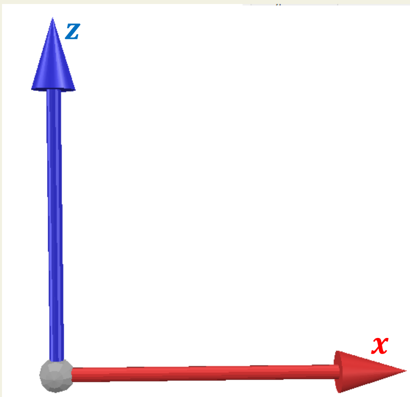




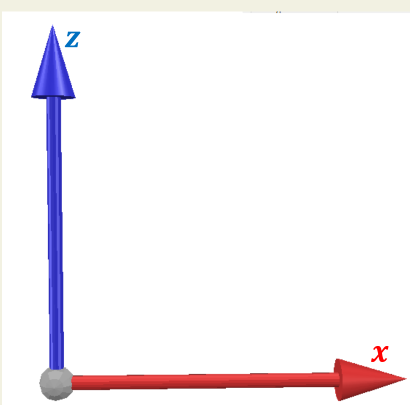


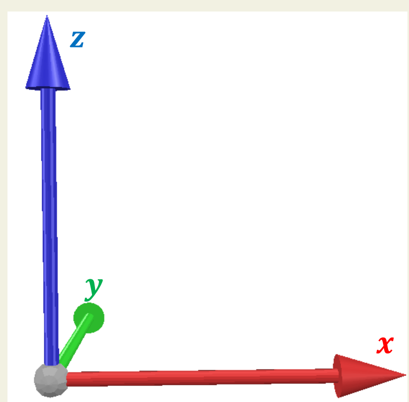
Άξονες που δίνονται	Αντίχειρας	Δάχτυλα	Παλάμη
x ,y	x	y	z
y, z	y	z	x
z, x	z	x	y

ΕΥΡΕΣΗ ΑΞΟΝΑ y

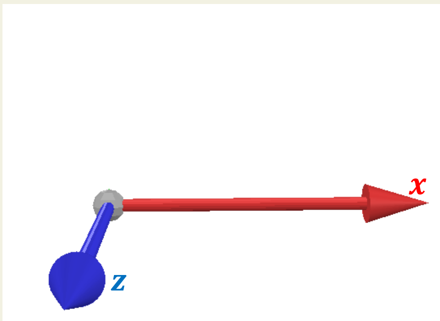


ΕΥΡΕΣΗ ΑΞΟΝΑ y

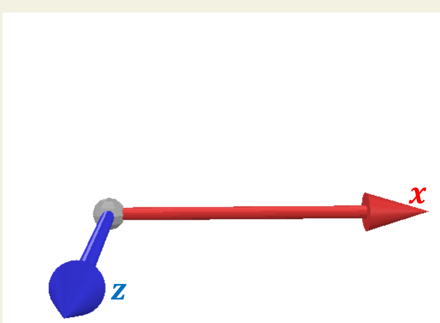


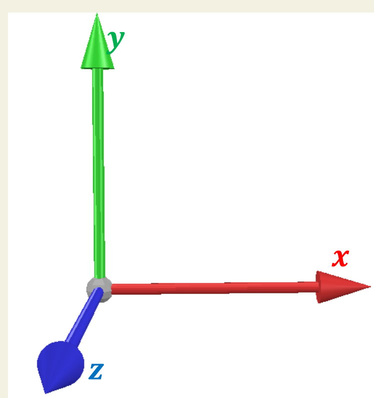


ΕΥΡΕΣΗ ΑΞΟΝΑ y

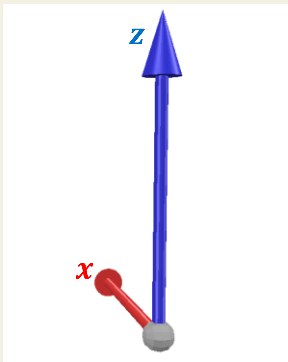


ΕΥΡΕΣΗ ΑΞΟΝΑ y

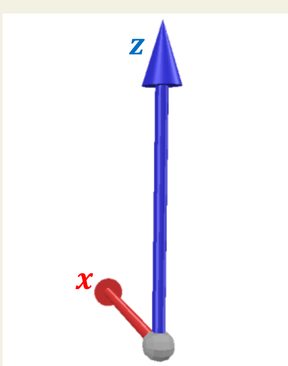


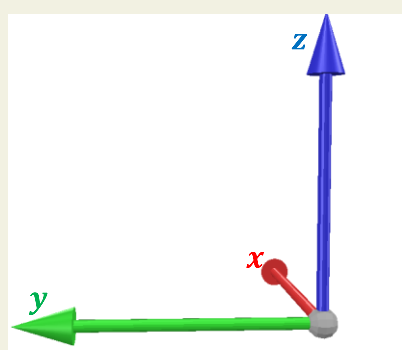


ΕΥΡΕΣΗ ΑΞΟΝΑ y

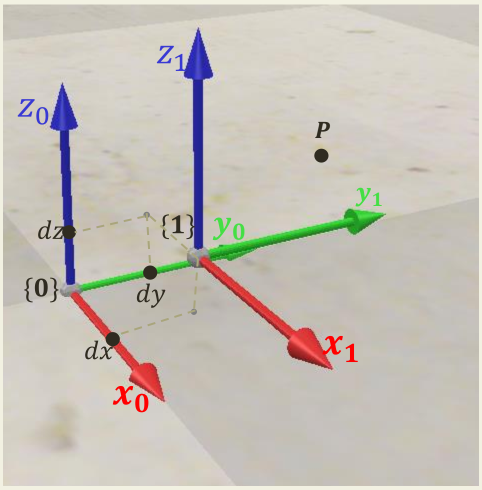


ΕΥΡΕΣΗ ΑΞΟΝΑ y





ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ 3-Δ (ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ)



Έστω το σύστημα συντεταγμένων **{1}** το οποίο είναι μετατοπισμένο ως προς το σύστημα συντεταγμένων **{0}** κατά (dx, dy, dz) κατά μήκος των αξόνων x_0, y_0 και z_0 αντίστοιχα.

Έστω σημείο P με συντεταγμένες $\left(x^{(1)}, y^{(1)}, z^{(1)}\right)$ ως προς το σύστημα **{1}**.

Οι συντεταγμένες $\left(x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)}\right)$ ως προς το σύστημα **{0}** θα είναι:

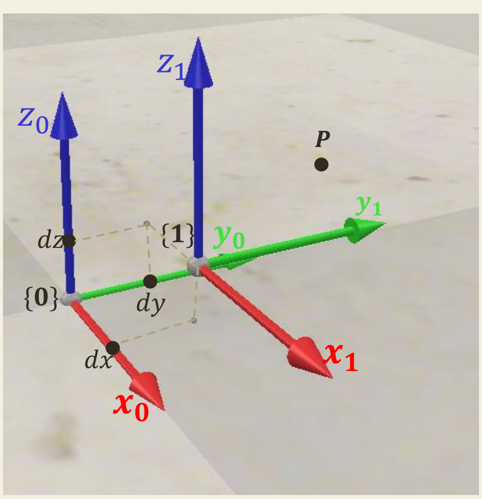
$$x^{(0)} = x^{(1)} + dx$$

$$y^{(0)} = y^{(1)} + dy$$

$$z^{(0)} = z^{(1)} + dz$$

23

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ 3-Δ (ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ)



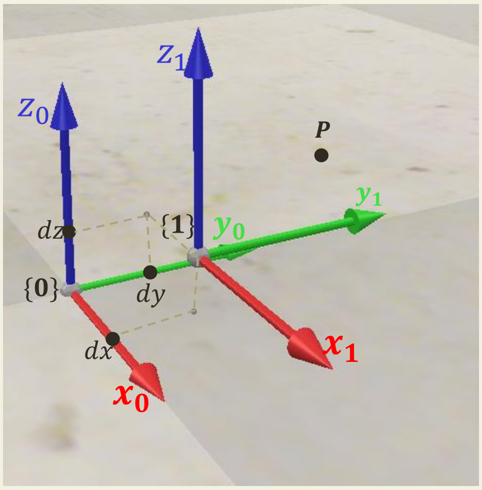
Ισοδύναμα:

$$\begin{bmatrix} x^{(0)} \\ y^{(0)} \\ z^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \\ z^{(1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας στήλη $\begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}$ συμβολίζεται με $\mathbf{d}_1^0$ και είναι το **διάνυσμα μετατόπισης** στις 3Δ.

24

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ 3-Δ (ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ)



Ισοδύναμα:

$$\begin{bmatrix} x^{(0)} \\ y^{(0)} \\ z^{(0)} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & dx \\ 0 & 1 & 0 & dy \\ 0 & 0 & 1 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \\ z^{(1)} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & dx \\ 0 & 1 & 0 & dy \\ 0 & 0 & 1 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ συμβολίζεται με $\mathbf{H}_1^0$ και είναι ο πίνακας ομογενούς μετασχηματισμού στις 3 διαστάσεις όταν υπάρχει μόνο μετατόπιση.

25

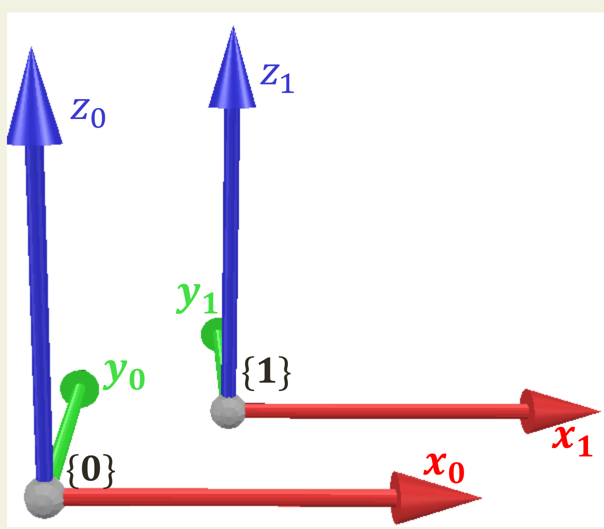
ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ 3-Δ (ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ)

Παράδειγμα

Έστω τα δύο καρτεσιανά συστήματα συντεταγμένων της εικόνας. Έστω ότι το σύστημα $\{1\}$ έχει μετατοπιστεί ως προς το σύστημα $\{0\}$ ως εξής:

- Προς τα δεξιά 10 cm
- Προς τα πάνω 5 cm

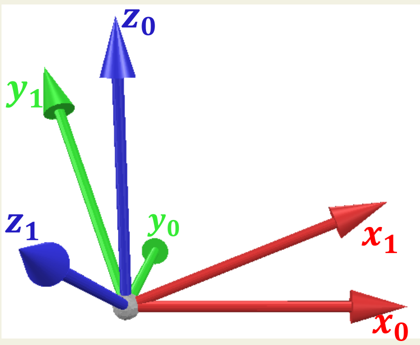
Να βρεθεί το διάνυσμα μετατόπισης $\mathbf{d}_1^0$



ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΡΟΜΠΟΤΙΚΗ - ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΒΙΟΪΑΤΡΙΚΗΣ

26

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ 3-Δ (ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ)



Έστω το σύστημα συντεταγμένων **{1}** το οποίο είναι περιεστρεμμένο ως προς το σύστημα συντεταγμένων **{0}**.
Έστω σημείο P με συντεταγμένες $\left(x^{(1)}, y^{(1)}, z^{(1)}\right)$ ως προς το σύστημα **{1}**.
Οι συντεταγμένες $\left(x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)}\right)$ ως προς το σύστημα **{0}** θα είναι:

$$x^{(0)} = \cos\theta_{x0x1}\, x^{(1)} + \cos\theta_{x0y1}\, y^{(1)} + \cos\theta_{x0z1}\, z^{(1)}$$

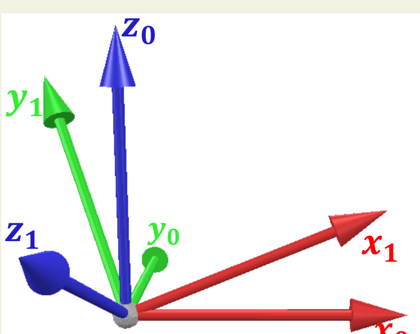
$$y^{(0)} = \cos\theta_{y0x1}\, x^{(1)} + \cos\theta_{y0y1}\, y^{(1)} + \cos\theta_{y0z1}\, z^{(1)}$$

$$z^{(0)} = \cos\theta_{z0x1}\, x^{(1)} + \cos\theta_{z0y1}\, y^{(1)} + \cos\theta_{z0z1}\, z^{(1)}$$

όπου θpq συμβολίζει τη γωνία μεταξύ των αξόνων p και q.

27

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ 3-Δ (ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ)



Ισοδύναμα:

$$\begin{bmatrix} x^{(0)} \\ y^{(0)} \\ z^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_{x0x1} & \cos\theta_{x0y1} & \cos\theta_{x0z1} \\ \cos\theta_{y0x1} & \cos\theta_{y0y1} & \cos\theta_{y0z1} \\ \cos\theta_{z0x1} & \cos\theta_{z0y1} & \cos\theta_{z0z1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \\ z^{(1)} \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας $\begin{bmatrix} \cos\theta_{x0x1} & \cos\theta_{x0y1} & \cos\theta_{x0z1} \\ \cos\theta_{y0x1} & \cos\theta_{y0y1} & \cos\theta_{y0z1} \\ \cos\theta_{z0x1} & \cos\theta_{z0y1} & \cos\theta_{z0z1} \end{bmatrix}$ συμβολίζεται με $\mathbf{R}_1^0$ και είναι ο **πίνακας περιστροφής** στις 3 διαστάσεις.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΡΟΜΠΟΤΙΚΗ - ΣΥΝΟΨΗ

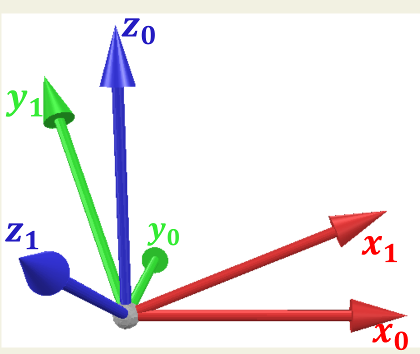
28

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ 3-Δ (ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ)

- Ο πίνακας περιστροφής περιέχει τα **συνημίτονα** των γωνιών που σχηματίζει κάθε άξονας του συστήματος $\{1\}$ με κάθε άξονα του συστήματος $\{0\}$ (9 συνδυασμοί).
- Οι στήλες του πίνακα αντιστοιχούν στους άξονες του συστήματος $\{1\}$ με τη σειρά x_1, y_1, z_1 και οι γραμμές αντιστοιχούν στους άξονες του συστήματος $\{0\}$ στη σειρά x_0, y_0, z_0.

$$\mathbf{R}_1^0 = \begin{array}{c} \\ x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & y_1 & z_1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \cos\theta_{x0x1} & \cos\theta_{x0y1} & \cos\theta_{x0z1} \\ \cos\theta_{y0x1} & \cos\theta_{y0y1} & \cos\theta_{y0z1} \\ \cos\theta_{z0x1} & \cos\theta_{z0y1} & \cos\theta_{z0z1} \end{bmatrix} \end{array}$$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ 3-Δ (ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ)



- Ισοδύναμα:

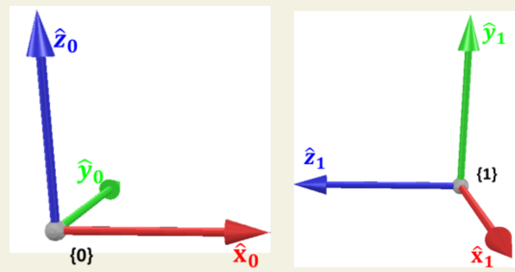
$$\begin{bmatrix} x^{(0)} \\ y^{(0)} \\ z^{(0)} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_{x0x1} & \cos\theta_{x0y1} & \cos\theta_{x0z1} & 0 \\ \cos\theta_{y0x1} & \cos\theta_{y0y1} & \cos\theta_{y0z1} & 0 \\ \cos\theta_{z0x1} & \cos\theta_{z0y1} & \cos\theta_{z0z1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \\ z^{(1)} \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Ο πίνακας $\begin{bmatrix} \cos\theta_{x0x1} & \cos\theta_{x0y1} & \cos\theta_{x0z1} & 0 \\ \cos\theta_{y0x1} & \cos\theta_{y0y1} & \cos\theta_{y0z1} & 0 \\ \cos\theta_{z0x1} & \cos\theta_{z0y1} & \cos\theta_{z0z1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ συμβολίζεται με $\mathbf{H}_1^0$ και είναι ο **πίνακας ομογενούς μετασχηματισμού** στις 3 διαστάσεις όταν υπάρχει μόνο περιστροφή.

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ 3-Δ (ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ)

Παράδειγμα

Έστω τα δύο συστήματα συντεταγμένων της εικόνας. Να βρεθεί ο πίνακας που περιγράφει την περιστροφή του συστήματος {1} ως προς το {0}.



Λύση

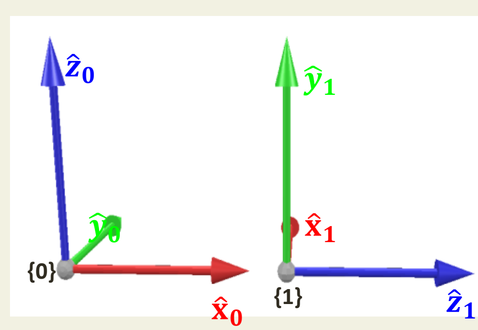
$$\mathbf{R}_1^0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

31

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ 3-Δ (ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ)

Παράδειγμα

Έστω τα δύο συστήματα συντεταγμένων της εικόνας. Να βρεθεί ο πίνακας που περιγράφει την περιστροφή του συστήματος {1} ως προς το {0}.



Λύση

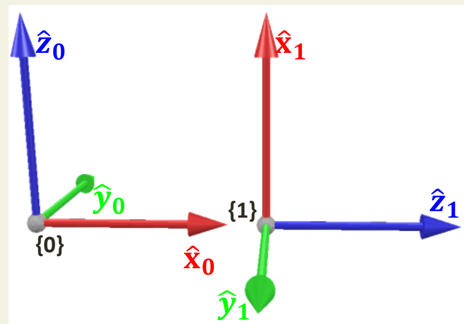
$$\mathbf{R}_1^0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

32

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ 3-Δ (ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ)

Παράδειγμα

Έστω τα δύο συστήματα συντεταγμένων της εικόνας. Να βρεθεί ο πίνακας που περιγράφει την περιστροφή του συστήματος {1} ως προς το {0}.



Λύση

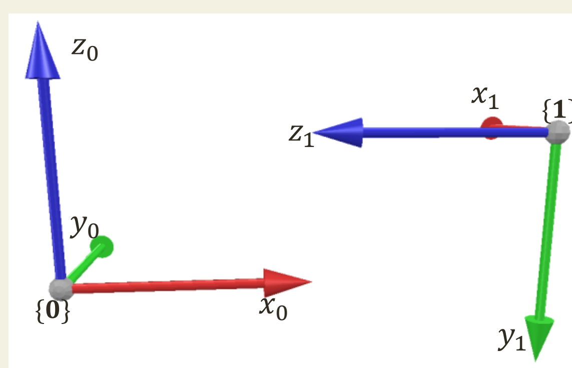
$$\mathbf{R}_{\mathbf{1}}^{\mathbf{0}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ 3-Δ (ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ)

Παράδειγμα

Έστω τα δύο καρτεσιανά συστήματα συντεταγμένων της εικόνας. Να βρεθεί ο πίνακας περιστροφής:

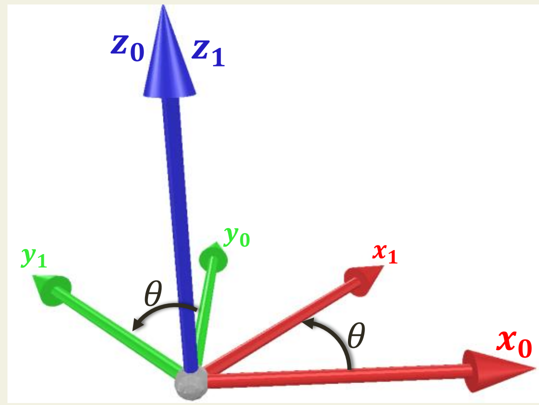
1. Του συστήματος {1} ως προς το σύστημα {0} ($\mathbf{R}_1^0$)
2. Του συστήματος {0} ως προς το σύστημα {1} ($\mathbf{R}_0^1$)



Πίνακας Περιστροφής

- Ειδική περίπτωση: περιστροφή γύρω από τον άξονα z κατά γωνία θ.
- Το σύστημα $\{0\}$ και το σύστημα $\{1\}$ έχουν παράλληλους άξονες z ($z_0||z_1$), αλλά οι άξονες x και y σχηματίζουν γωνία θ.

$$\mathbf{R_1^0} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΡΟΜΠΟΤΙΚΗ - ΣΥΝΟΨΗ

35

Πίνακας Περιστροφής

- Ειδική περίπτωση: οι άξονες του συστήματος $\{1\}$ είναι παράλληλοι με τους άξονες του συστήματος $\{0\}$:
  - $x_1||x_0$
  - $y_1||y_0$
  - $z_1||z_0$

$$\mathbf{R_1^0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Αν δύο συστήματα συντεταγμένων έχουν παράλληλους ή αντιπαράλληλους άξονες, ο πίνακας περιστροφής έχει σε κάθε γραμμή και στήλη δύο **0** και ένα $\pm\mathbf{1}$.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΡΟΜΠΟΤΙΚΗ - ΣΥΝΟΨΗ

36

Πίνακας Περιστροφής

- Έλεγχος εγκυρότητας πίνακα περιστροφής:
  1. Το άθροισμα των τετραγώνων κάθε στήλης (ή κάθε γραμμής) θα πρέπει να ισούται με μονάδα.
  - Αν $\mathbf{R_1^0} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$ πρέπει να ισχύει για τις στήλες:

$$r_{11}^2 + r_{21}^2 + r_{31}^2 = 1$$
$$r_{12}^2 + r_{22}^2 + r_{32}^2 = 1$$
$$r_{13}^2 + r_{23}^2 + r_{33}^2 = 1$$

  - Αντίστοιχα για τις γραμμές:

$$r_{11}^2 + r_{12}^2 + r_{13}^2 = 1$$
$$r_{21}^2 + r_{22}^2 + r_{23}^2 = 1$$
$$r_{31}^2 + r_{32}^2 + r_{33}^2 = 1$$

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΡΟΜΠΟΤΙΚΗ - ΣΥΝΟΨΗ

37

Πίνακας Περιστροφής

- Έλεγχος εγκυρότητας πίνακα περιστροφής:
  2. Οι στήλες (οι γραμμές) θα πρέπει να ακολουθούν τον κανόνα του δεξιού χεριού: το εξωτερικό γινόμενο δύο στηλών (ή δύο γραμμών) θα πρέπει να δίνει την τρίτη στήλη (γραμμή).
  - Αν $\mathbf{R_1^0} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$ πρέπει να ισχύει:

$$r_{13} = r_{21}r_{32} - r_{31}r_{22}$$
$$r_{23} = r_{31}r_{12} - r_{11}r_{32}$$
$$r_{33} = r_{11}r_{22} - r_{31}r_{22}$$

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΡΟΜΠΟΤΙΚΗ - ΣΥΝΟΨΗ

38

Πίνακας Περιστροφής

Παράδειγμα
Είναι οι παρακάτω πίνακες έγκυροι πίνακες περιστροφής;

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}} & -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} & \mathbf{0} \\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} & \frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{0,5} & \mathbf{0} & \mathbf{0,5} \\ \mathbf{0,5} & \mathbf{0} & \mathbf{0,5} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΡΟΜΠΟΤΙΚΗ - ΣΥΝΟΨΗ

39

Μετατόπιση και Περιστροφή στις 3Δ

- Χρήση πίνακα ομογενούς μετασχηματισμού του συστήματος συντεταγμένων **{1} ως προς το σύστημα συντεταγμένων {0}** :

Περιστροφή

Μετατόπιση

$$\mathbf{H_1^0} = \begin{bmatrix} \cos\theta_{x_0x_1} & \cos\theta_{x_0y_1} & \cos\theta_{x_0z_1} & dx \\ \cos\theta_{y_0x_1} & \cos\theta_{y_0y_1} & \cos\theta_{y_0z_1} & dy \\ \cos\theta_{z_0x_1} & \cos\theta_{z_0y_1} & \cos\theta_{z_0z_1} & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Σχέση συντεταγμένων:

$$\begin{bmatrix} x^{(0)} \\ y^{(0)} \\ z^{(0)} \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{H_1^0} \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \\ z^{(1)} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Συντεταγμένες στο σύστημα **{0}**

Συντεταγμένες στο σύστημα **{1}**

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΡΟΜΠΟΤΙΚΗ - ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΣΤΙΣ 3Δ

40