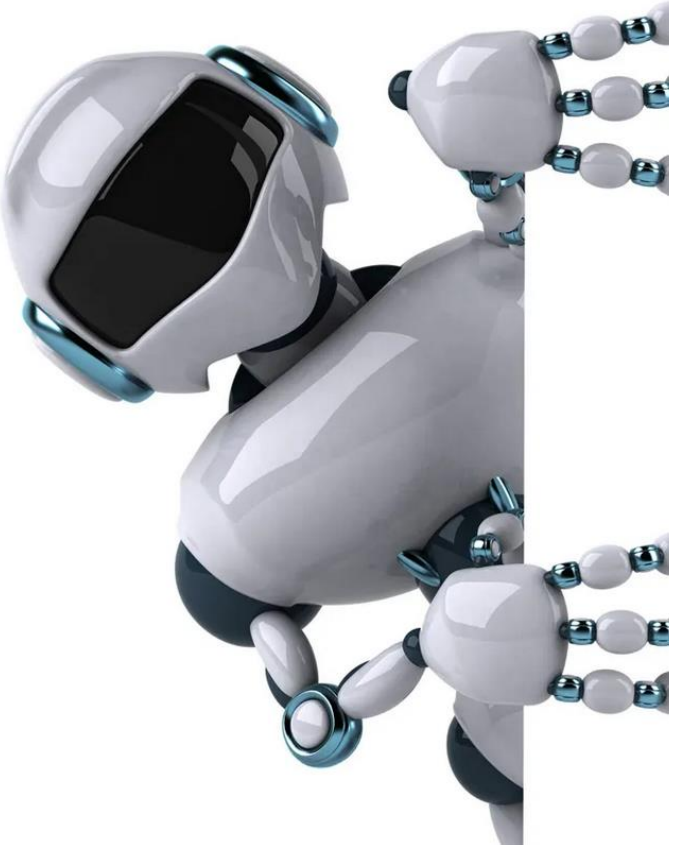
ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΡΟΜΠΟΤΙΚΗ

ΟΡΘΗ ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ

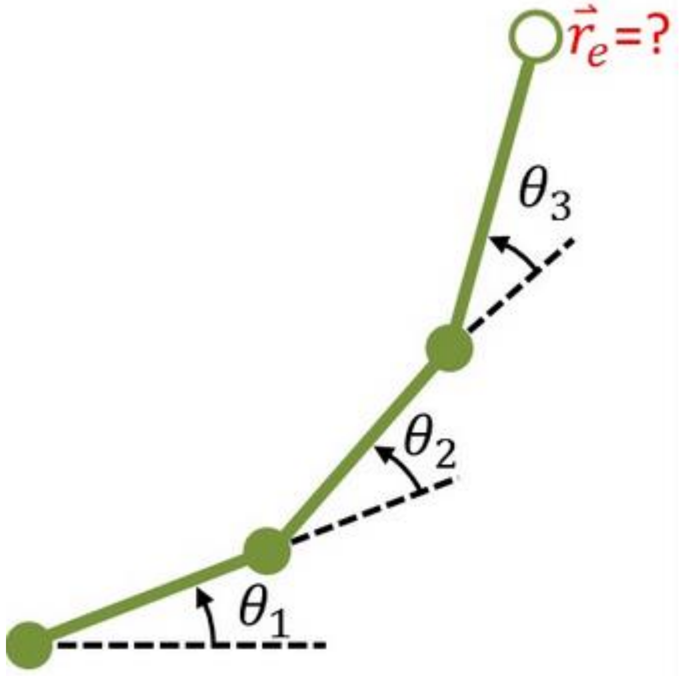
ΣΑΡΑΝΤΟΓΛΟΥ ΓΕΩΡΓΙΟΣ

gsarantoglou@uniwa.gr



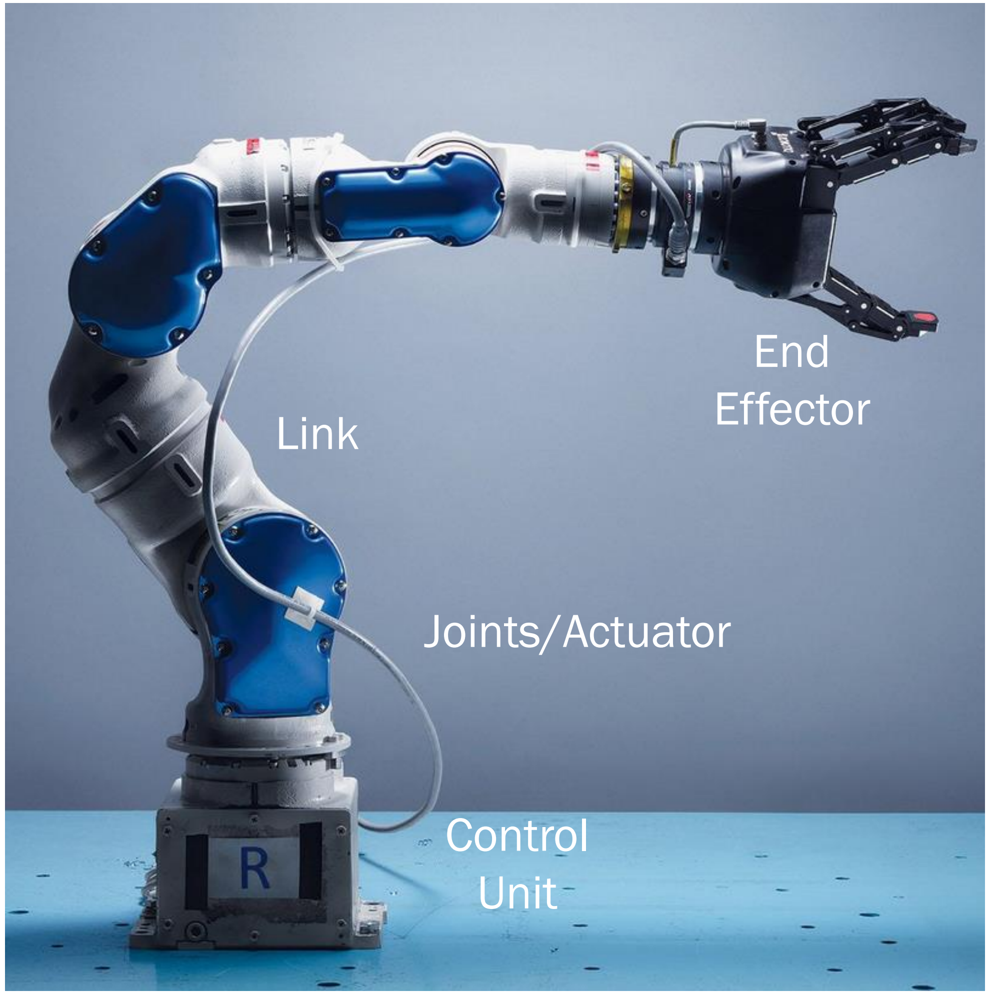
ΟΡΘΗ ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ

- Ένα πολύ βασικό πρόβλημα στη μελέτη της μηχανικής χειρισμού ονομάζεται πρόβλημα **ορθής κινηματικής** (forward kinematics). Πρόκειται για το στατικό πρόβλημα υπολογισμού της θέσης και του προσανατολισμού του τελικού επενεργητή. Συγκεκριμένα, δεδομένου ότι γνωρίζουμε τις γωνίες και τις μετατοπίσεις όλων των αρθρώσεων, το πρόβλημα ορθής κινηματικής είναι να υπολογιστεί η θέση και ο προσανατολισμός του τελικού επενεργητή ως προς ένα σταθερό σύστημα συντεταγμένων (βάσης).
- Πρόκειται για αντιστοίχιση από τον χώρο αναπαράστασης των αρθρώσεων στο καρτεσιανό χώρο αναπαράστασης.
- Απαιτείται για να μάθουμε που βρίσκεται μια δεδομένη στιγμή ο τελικός επενεργητής στο χώρο.



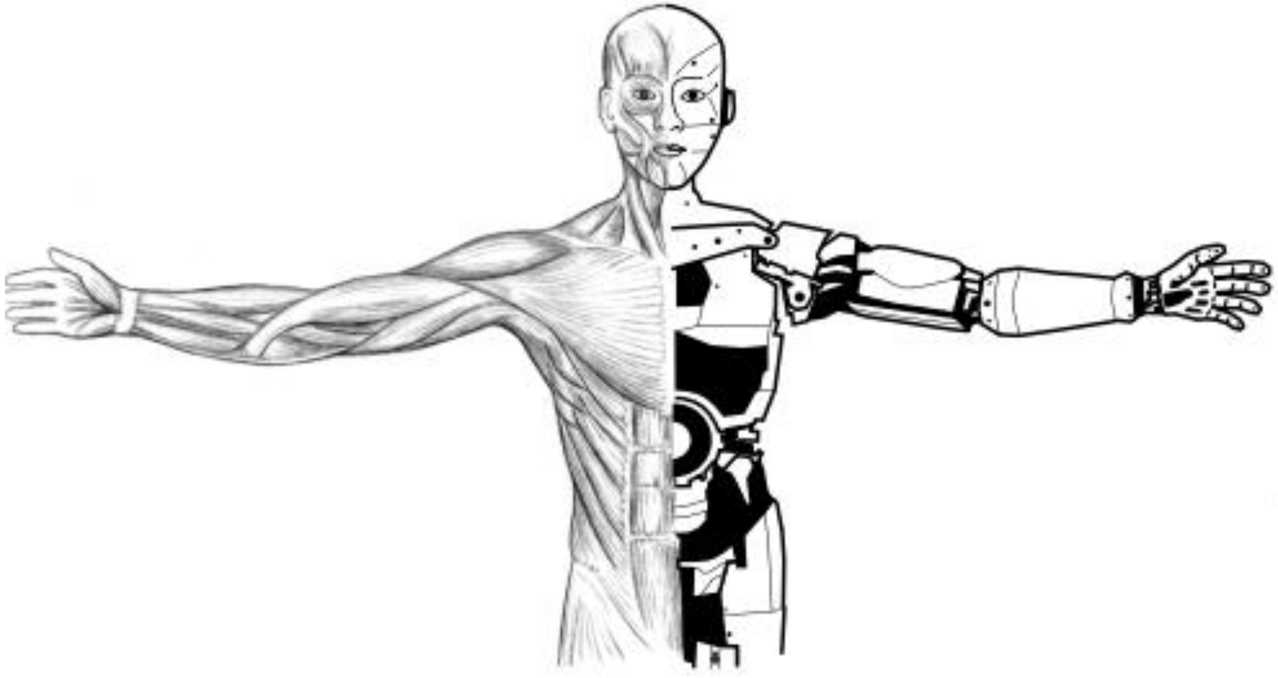
ΜΕΡΗ ΡΟΜΠΟΤΙΚΟΥ ΒΡΑΧΙΟΝΑ

- **Σύνδεσμοι (Links):** Διασυνδεδεμένα στερεά σώματα που απαρτίζουν έναν ρομποτικό βραχίονα.
- **Αρθρώσεις (Joints):** τα σημεία σύνδεσης μεταξύ συνδέσμων, που επιτρέπουν την κίνηση του κάθε συνδέσμου ως προς τον άλλο.
- **Ενεργοποιητές (Actuators):** εξαρτήματα που ελέγχουν τις αρθρώσεις
- **Τελικός Επενεργητής (End Effector):** εξάρτημα που βρίσκεται στο άκρο του ρομποτικού βραχίονα και είναι υπεύθυνο για την εκτέλεση εργασιών.
- **Αισθητήρες (Sensors):** συσκευές που διαβάζουν σήματα στον χώρο και δίνουν πληροφορία στον ρομποτικό βραχίονα για το πως να κινηθεί.
- **Μονάδα ελέγχου (Control Unit):** προγραμματιζόμενο εξάρτημα που δίνει εντολές στους ενεργοποιητές και επεξεργάζεται τα δεδομένα των αισθητήρων.



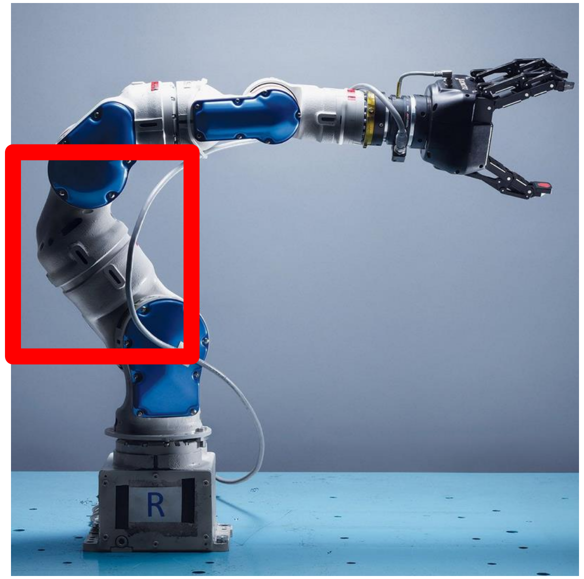
ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΑ ΡΟΜΠΟΤΙΚΟΥ ΒΡΑΧΙΟΝΑ ΜΕ ΤΟ ΑΝΘΡΩΠΙΝΟ ΣΩΜΑ

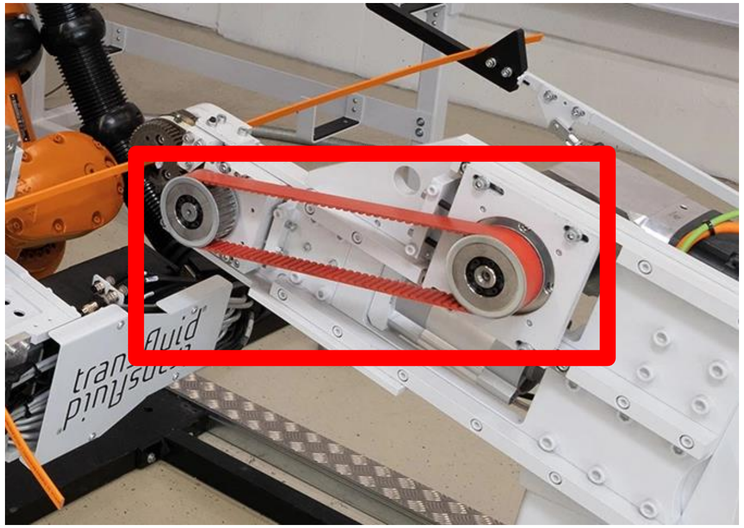
ΡΟΜΠΟΤΙΚΟΣ ΒΡΑΧΙΟΝΑΣ	ΑΝΘΡΩΠΙΝΟ ΣΩΜΑ
ΣΥΝΔΕΣΜΟΙ	ΟΣΤΑ
ΑΡΘΡΩΣΕΙΣ	ΑΡΘΡΩΣΕΙΣ
ΕΠΕΝΕΡΓΗΤΕΣ	ΜΥΕΣ
ΤΕΛΙΚΟΣ ΕΠΕΝΕΡΓΗΤΗΣ	ΠΑΛΑΜΗ
ΑΙΣΘΗΤΗΡΕΣ	ΜΑΤΙΑ
ΜΟΝΑΔΑ ΕΛΕΓΧΟΥ	ΕΓΚΕΦΑΛΟΣ



ΣΥΝΔΕΣΜΟΙ (ΤΑ ΟΣΤΑ ΤΟΥ ΡΟΜΠΟΤ)

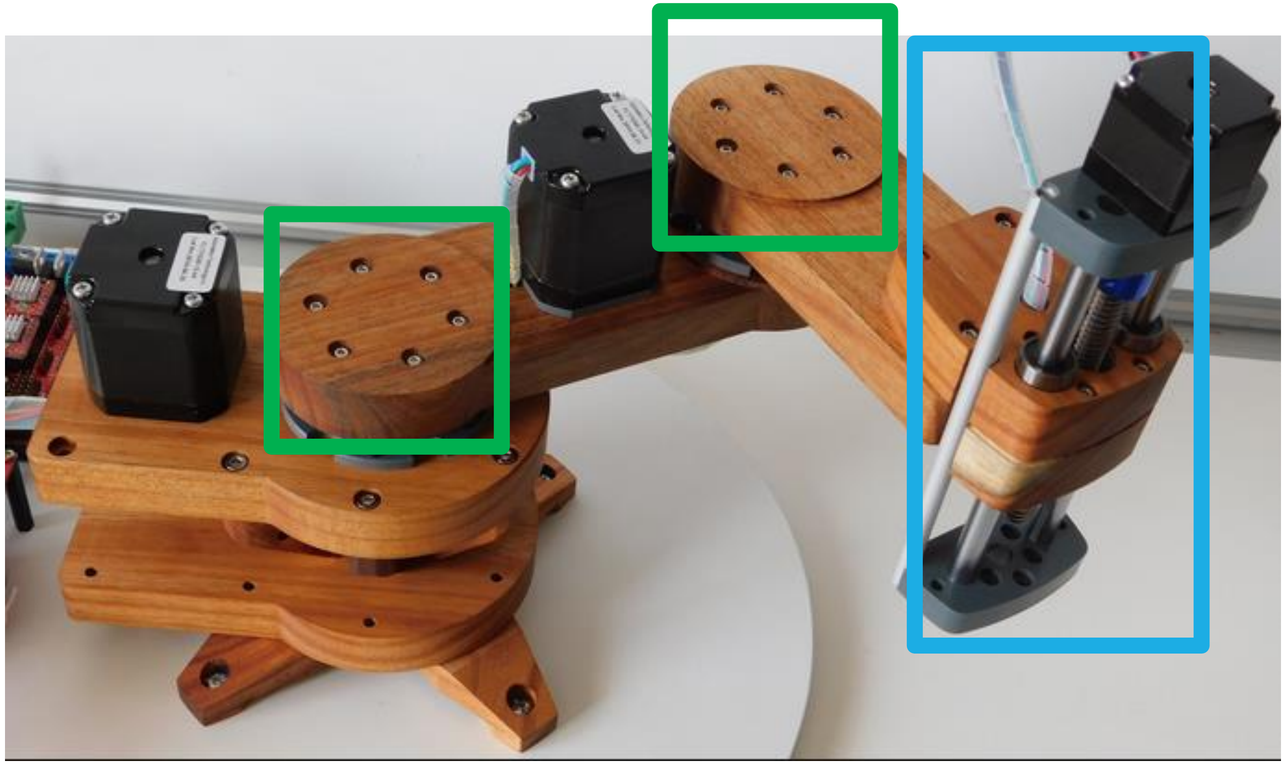
- Ως σύνδεσμο ορίζουμε ένα μέρος του ρομποτικού βραχίονα που μπορεί να είναι ένα σθεναρό σώμα ή ένας συνδυασμός σθεναρών σωμάτων με άκαμπτες συνδέσεις που παρέχουν σχετική κίνηση με βάση τα άλλα μέρη του ρομπότ.
- Ένας σύνδεσμος ονομάζεται επίσης κινηματικός σύνδεσμος ή και στοιχείο.
- Ένα σθεναρό σώμα είναι εκείνο που δεν αλλάζει την μορφή του όταν μεταφέρει μια δύναμη (σαν τα ανθρώπινα οστά)

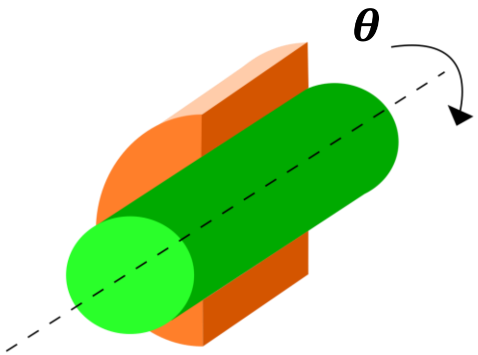




ΑΡΘΡΩΣΕΙΣ (ΟΙ ΑΡΘΡΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΡΟΜΠΟΤ)

- Άρθρωση είναι μια σύνδεση μεταξύ δύο ή περισσότερων συνδέσμων, η οποία επιτρέπει κάποια κίνηση ή δυνητική κίνηση μεταξύ των συνδεδεμένων συνδέσμων. Οι αρθρώσεις ονομάζονται επίσης κινηματικά ζεύγη
- **Περιστροφικές Αρθρώσεις:** Εκτελούν περιστροφική κίνηση (πράσινο χρώμα).
- **Πρισματικές Αρθρώσεις:** Εκτελούν μετατόπιση κατά μήκος ενός άξονα (μπλε χρώμα).





ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΧΩΡΟΥ ΑΡΘΡΩΣΕΩΝ ΣΤΟΝ ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΟ ΧΩΡΟ

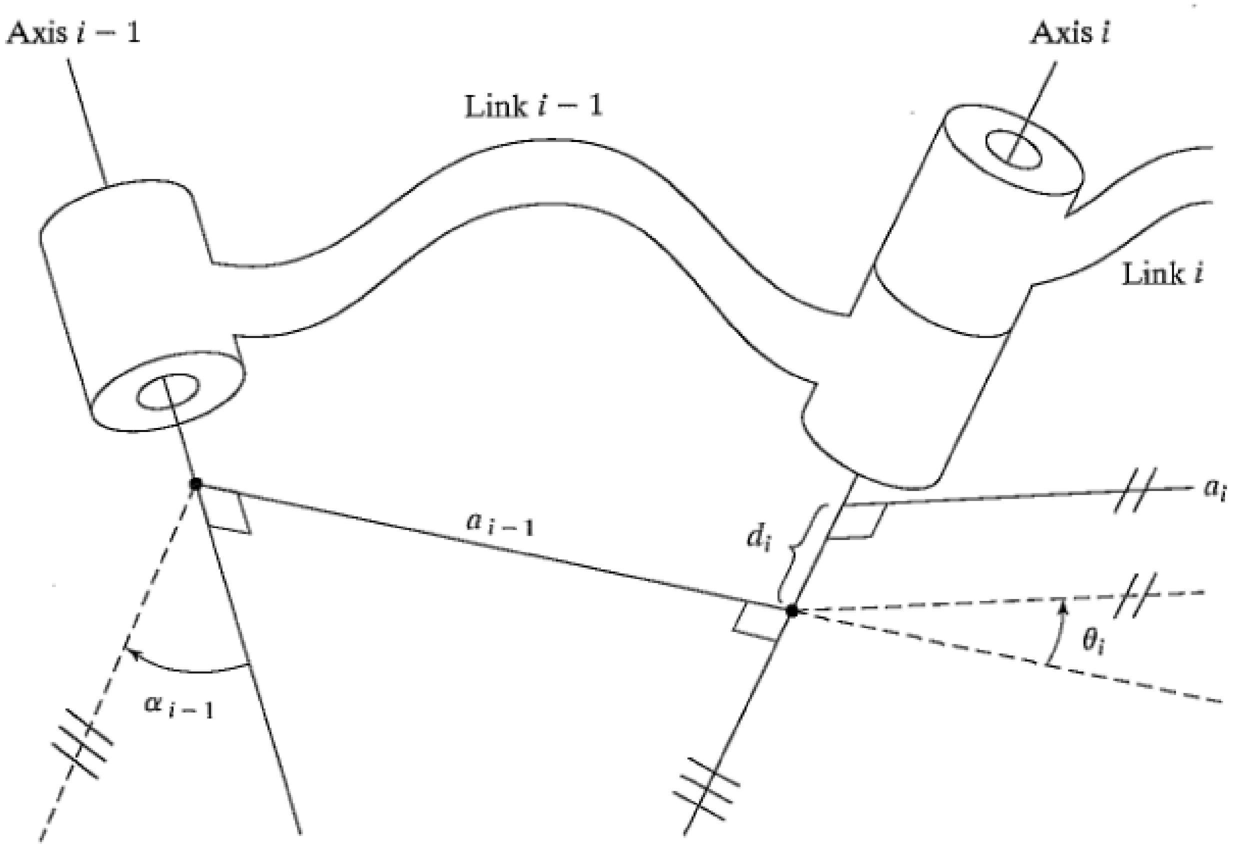
- Έστω ένας ρομποτικός βραχίονας με πρισματικές και περιστροφικές αρθρώσεις που $u_1, u_2, \dots, u_N$, όπου $u_i = \theta_i$ για περιστροφή και $u_i = d_i$ για μετατόπιση.
- Ορίζεται ένα διάνυσμα $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_N)^T \in \mathcal{R}^N$
- Το διάνυσμα αυτό θα καθορίσει έναν ομογενή μετασχηματισμό:

$$ {}_{\mathrm{N}}^{0}\mathrm{T}(u_1, u_2, \dots, u_N) = {}_{1}^{0}\mathrm{T}(u_1)\,{}_{2}^{1}\mathrm{T}(u_2), \dots\, {}_{\mathrm{i}}^{i-1}\mathrm{T}(u_i) \dots {}_{\mathrm{N}}^{N-1}\mathrm{T}(u_N) $$

- Ο ομογενής μετασχηματισμός θα περιγράφει την θέση του τελικού επενεργητή ως προς την βάση του ρομποτικού βραχίονα.

ΟΡΙΣΜΟΣ ΟΜΟΓΕΝΗ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ ${}^{i-1}_{i}\mathrm{T}(u_i)$

- Θέλουμε μία στρατηγική για τον ορισμό του ${}^{i-1}_{i}T(u_i)$.
- Ορίζουμε τον σύνδεσμο $i-1$ ως εκείνον που συνδέει τις αρθρώσεις $i-1, i$.



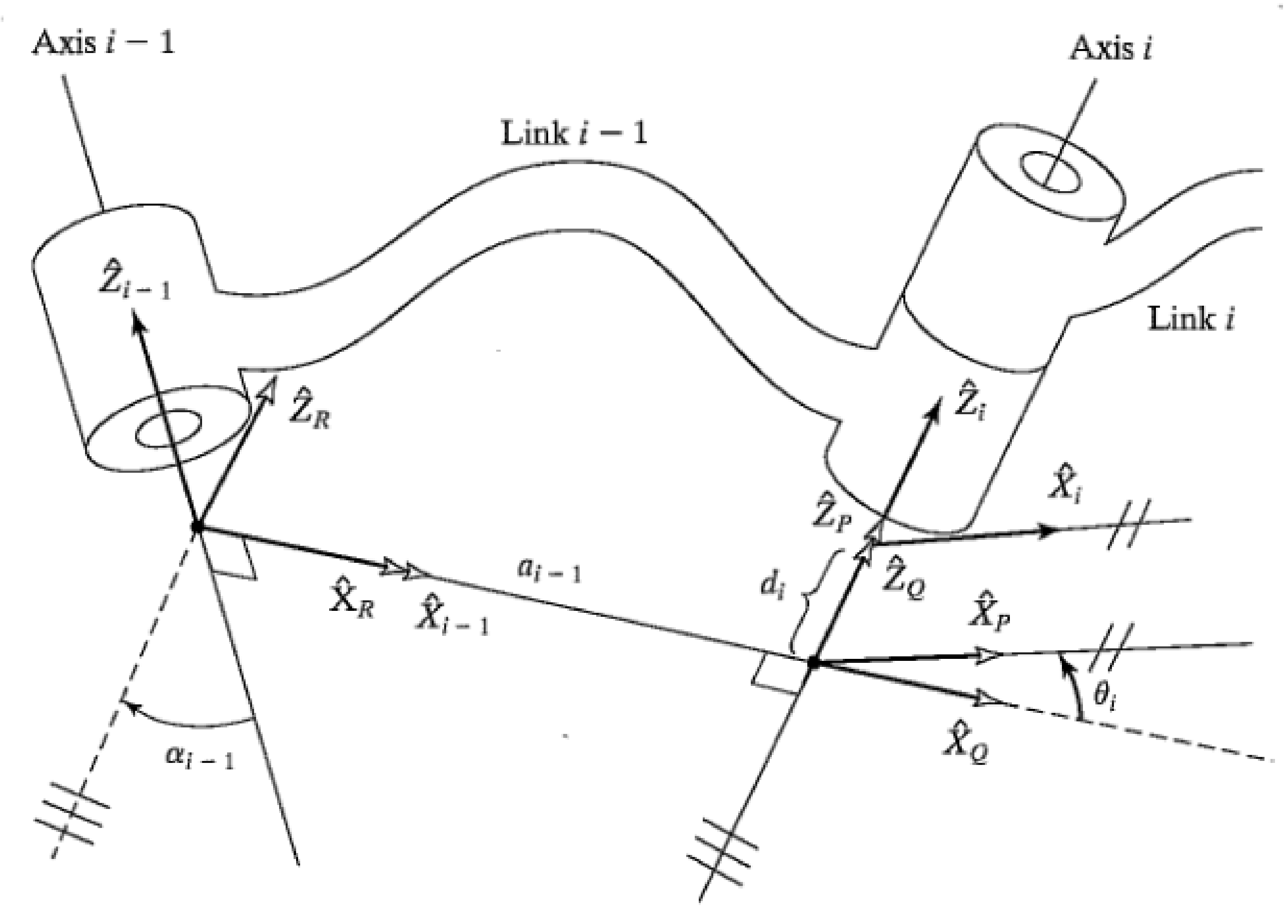
ΟΡΙΣΜΟΣ ΟΜΟΓΕΝΗ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ ${}^{i-1}_{i}\mathrm{T}(\boldsymbol{u_i})$

- Δημιουργούμε δύο φανταστικούς άξονες που περνούν από τις αρθρώσεις $i-1, i$.
- Ορίζουμε την κοινή κάθετο μεταξύ των δύο αξόνων.
- Η απόσταση ανάμεσα στους άξονες, μετρημένη ως προς την κοινή κάθετο καλείται a_{i-1}.
- Η γωνία ανάμεσα στους άξονες ονομάζεται α_i.
- Η γωνία ανάμεσα στην κάθετο a_{i-1} και στην κάθετο a_i του επόμενου συνδέσμου ονομάζεται θ_i. Αλλάζει με την ενεργοποίηση της άρθρωσης i αν αυτή είναι περιστροφική.
- Η απόσταση μεταξύ των καθέτων a_{i-1} και a_i πάνω στον άξονα i ονομάζεται d_i. Αλλάζει με την ενεργοποίηση της άρθρωσης i, εφόσον αυτή είναι πρισματική.

Denavit-Hartenberg σημειογραφία

- Άρα για κάθε άρθρωση i ορίζουμε 4 αριθμούς $(\alpha_i, \alpha_i, \theta_i, d_i)$.
- Αν η άρθρωση είναι πρισματική, πρέπει να οριστούν οι 3 σταθερές παράμετροι $(a_1, \alpha_1, \theta_i)$.
- Αν η άρθρωση είναι περιστροφική, πρέπει να οριστούν οι 3 σταθερές παράμετροι (a_1, α_1, d_i)
- Για ένα ρομπότ με 6 αρθρώσεις πρέπει να ορίσουμε $6 \times 3 = 18$ παραμέτρους.
- Αυτή η σημειογραφία με 3 παραμέτρους ανά άρθρωση ονομάζεται Denavit-Hartenberg.

Denavit-Hartenberg σημειογραφία



Denavit-Hartenberg σημειογραφία

- Ορίζουμε πλαίσια {i-1},{R},{Q},{P},{i}.
- Το σημείο O των πλαισίων βρίσκεται:
- Στην τομή του άξονα $i-1$ και του a_{i-1} για τα {i-1,R}.
- Στην τομή του a_{i-1} και του άξονα i για τα {Q,P}.
- Στην τομή του άξονα i και του a_i για το {i}.
- Οι άξονες των πλαισίων βρίσκονται **με φορά δεξιού χεριού** :
- {i-1}: $\hat{Z}_{i-1}$ στον άξονα $i-1$, το $\hat{X}_{i-1}$ στο a_{i-1}.
- {R}: $\hat{Z}_R$ στη φορά του άξονα i, $\hat{X}_R$ στο a_{i-1}.
- {Q}: $\hat{Z}_Q$ στη φορά του άξονα i, $\hat{X}_Q$ στη φορά του a_{i-1}.
- {P}: $\hat{Z}_P$ στη φορά του άξονα i, $\hat{X}_P$ στη φορά του α_i.
- {i} : $\hat{Z}_i$ στη φορά του άξονα i, $\hat{X}_i$ στη φορά του α_i.

Denavit-Hartenberg σημειογραφία

- Το {R} διαφέρει από το {i-1} κατά μία γωνία α_{i-1} ως προς τον άξονα $\hat{X}_{i-1}$.
- Το {Q} διαφέρει από το {R} κατά μία μετατόπιση a_{i-1} ως προς τον άξονα $\hat{\mathrm{X}}_{\mathrm{R}}$.
- Το {P} διαφέρει από το {Q} κατά μία γωνία θ_i ως προς τον άξονα $\hat{Z}_p$.
- Το {i} διαφέρει από το {P} κατά μία μετατόπιση d_i ως προς τον άξονα $\hat{Z}_P$.

$$^{i-1}P = {}^{i-1}_{i}T\,{}^{i}P = R_X(\alpha_i)D_X(a_i)R_Z(\theta_i)D_Z(d_i)\,{}^{i}P$$

$$^{i-1}_{i}T = R_X(\alpha_i)D_X(a_i)R_Z(\theta_i)D_Z(d_i)$$

$$^{i-1}_{i}T = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ s\theta_i c\alpha_{i-1} & c\theta_i c\alpha_{i-1} & -sa_{i-1} & -sa_{i-1}d_i \\ s\theta_i s\alpha_{i-1} & c\theta_i s\alpha_{i-1} & ca_{i-1} & ca_{i-1}d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Denavit-Hartenberg σημειογραφία

- Για να ορίσουμε την Denavit-Hartenberg σημειογραφία, εκτελούμε τα παρακάτω βήματα.

1. Βρίσκουμε και σχεδιάζουμε τους άξονες {i} κάθε άρθρωσης $i = 1,2,3, \dots, n-1$. Για περιστροφική άρθρωση είναι ο άξονας ως προς τον οποίο γυρίζει, ενώ για πρισματική άρθρωση είναι ο άξονας ως προς τον οποίο μετακινείται.

2. Εξετάζουμε τις αρθρώσεις μια προς μία. Για μία άρθρωση i βρίσκουμε την κάθετη ευθεία a_{i-1} ανάμεσα στον άξονα της και στον άξονα της άρθρωσης $i-1$ και την κάθετη ευθεία α_i που συνδέει τον άξονα της με τον άξονα της $i+1$. Στο σημείο τομής της a_{i-1} με τον άξονα i ορίζουμε το κέντρο 0 του συστήματος συντεταγμένων $\{i\}$. Αν οι άξονες $i, i-1$ τέμνονται τότε στο σημείο τομή ορίζεται το κέντρο Ο. Αν είναι παράλληλοι τότε το σημείο Ο μπορεί να οριστεί οπουδήποτε.

3. Ορίζουμε το διάνυσμα $\hat{Z}_i$ πάνω στον άξονα i ως προς το σημείο Ο. Έχουμε 2 επιλογές για το $\hat{Z}_i$, μια προς τα πάνω και μία προς τα κάτω στον άξονα.

Denavit-Hartenberg σημειογραφία

4. Ορίζουμε το $\hat{X}_i$ κατά μήκος της a_i, η κάθετη ανάμεσα στα $\{i\}, \{i-1\}$. Αν $a_i = 0$ τότε μπορεί να οριστεί οπουδήποτε, αλλά επιλέγουμε συνήθως το $\hat{X}_i$ έτσι ώστε η γωνία $\theta_i = angle(\hat{X}_i, \hat{X}_{i+1})$ να είναι 0.

5. Μετράμε το a_{i-1} ως το μήκος της a_{i-1}.

6. Μετράμε την γωνία α_{i-1} ως τη γωνία που πρέπει να γυρίσει το $\hat{Z}_{i-1}$ ως προς το $\hat{X}_{i-1}$ για να συναντήσει το $\hat{Z}_i$.

7. Μετράμε την γωνία θ_i ως τη γωνία που πρέπει να γυρίσει το $\hat{X}_{i-1}$ ως προς το $\hat{Z}_i$ για να συναντήσει το $\hat{X}_i$.

8. Μετράμε την απόσταση d_i ως την απόσταση μεταξύ των κέντρων των αξόνων των $\{i-1\}, \{i\}$ ως προς την κατεύθυνση των $\hat{Z}_{i-1}, \hat{Z}_i$. Αν οι άξονες τέμνονται τότε $d_i = 0$.

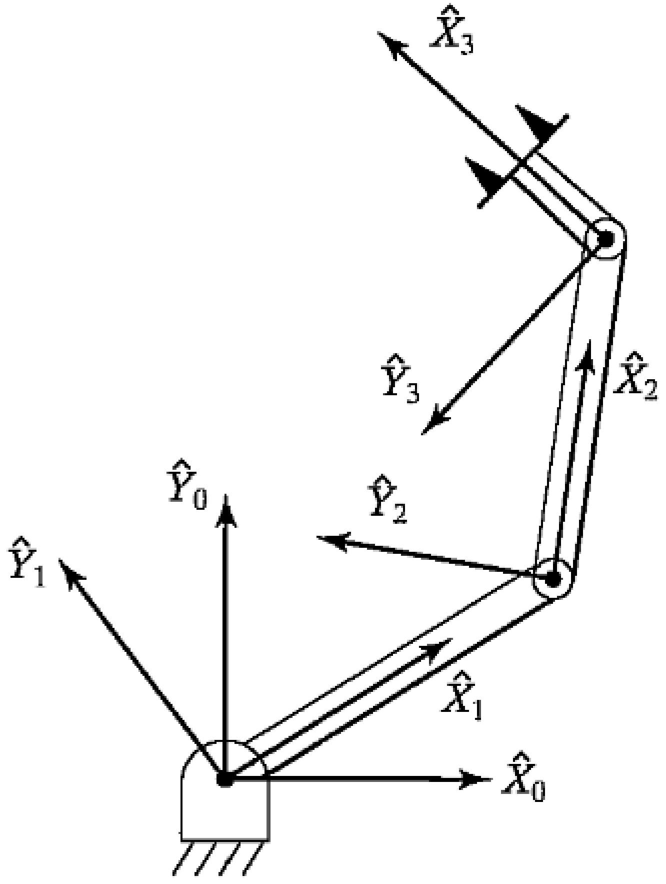
Βάση και τελευταία άρθρωση

Μένει να ορίσουμε την βάση {0} και την τελευταία άρθρωση {n}.

- Για την βάση 0 συνήθως επιλέγουμε σύστημα συντεταγμένων που θα δώσει $a_0 = 0$, $\alpha_0 = 0°$ και $\theta_1 = 0$ για περιστροφική άρθρωση ή $d_1 = 0$ για πρισματική άρθρωση. Συνήθως είναι ολόιδιο το σύστημα αυτό συντεταγμένων με το {1}.
- Σχετικά με την τελευταία άρθρωση ορίζουμε το $\hat{X}_N$ ώστε να έχει γωνία $\theta_N = 0°$ με το X_{N-1}. Το κέντρο ορίζεται ώστε να δώσει $d_N = 0$.

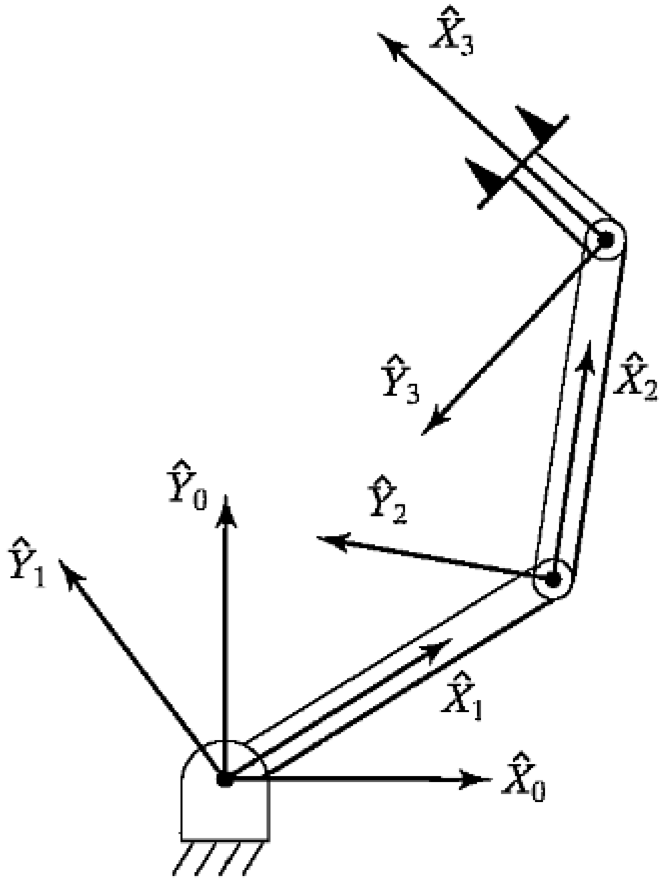
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

- Όλες οι αρθρώσεις είναι περιστροφικές.
- Έχουμε άξονες κάθετα στη σελίδα μας.
- Το {0} ταυτίζεται με το {1}. Οι άξονες τους είναι παράλληλη και εφόσον έχουν κοινή αρχή 0, έχουμε $a_0 = 0$.
- Τα $\hat{Z}_0, \hat{Z}_1$ ορίζονται ώστε να βγαίνουν από τη σελίδα.
- Το $\hat{X}_1$ ορίζεται πάνω στην a_1 που συνδέει τους άξονες των $\{1\}, \{2\}$.
- Η γωνία θ_1 είναι η γωνία που κάνει το $\hat{X}_0$ για να φτάσει το $\hat{X}_1$ με περιστροφή ως προς το $\hat{Z}_1$. Παρατηρούμε εδώ ότι $\theta_1 \neq 0$. Όμως αν ο βραχίονας πέσει προς τα κάτω με $\theta_1 = 0$ (ανενεργός), τότε τα $\hat{X}_1, \hat{X}_0$ συναντιόνται.
- Επειδή το κέντρο είναι το ίδιο , έχουμε $d_1 = 0$
- Η γωνία ανάμεσα στα $\hat{Z}_0$ και $\hat{Z}_1$ ως προς το $\hat{X}_0$ είναι $\alpha_0 = 0°$.
- Άρα βρήκαμε $(a_0, \alpha_0, d_1, \theta_1) = (0, 0°, 0, \theta_1)$



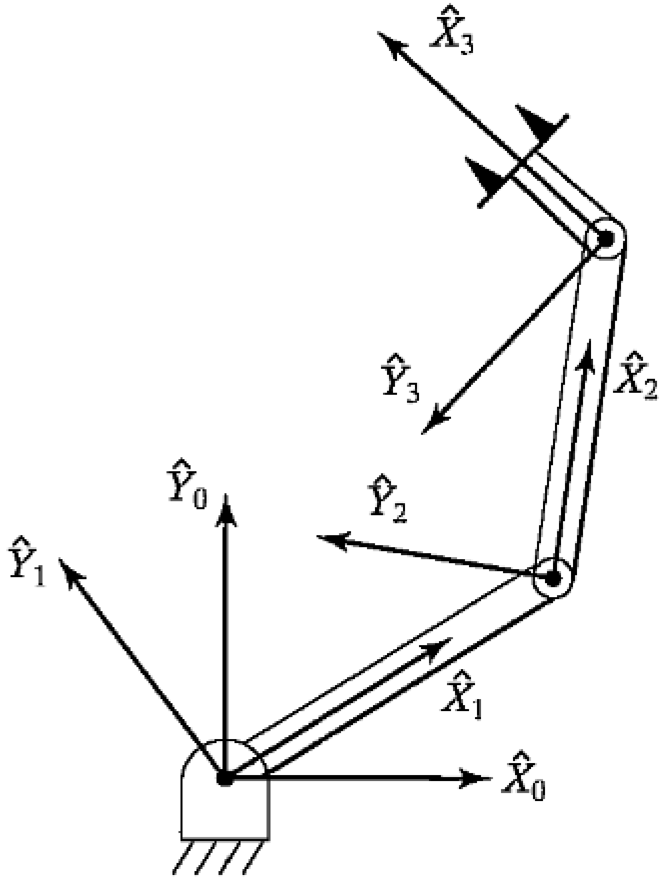
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

- Η κάθετη ανάμεσα στα {1}, {2} είναι η a_1 η οποία τέμνει τον άξονα της {2} στο σημείο που φαίνεται με τελεία στο σχήμα.
- Η $a_1 = L_1$ είναι το μήκος του πρώτου συνδέσμου.
- Ορίζουμε το $\hat{Z}_2$ ώστε να βγαίνει από τη σελίδα και το $\hat{X}_2$ ως το διάνυσμα που ακολουθεί την a_2 που συνδέει τους άξονες $\{2\}, \{3\}$.
- Η γωνία που πρέπει να κάνει το $\hat{Z}_1$ για να βρει το $\hat{Z}_2$ ως προς το $\hat{X}_1$ είναι $\alpha_1 = 0°$, αφού είναι παράλληλες.
- Η απόσταση ανάμεσα στα κέντρα των αξόνων των {1},{2} είναι 0 ως προς την Z-κατεύθυνση αφού είναι στο ίδιο επίπεδο. Άρα $d_2 = 0$.
- Η γωνία που πρέπει να κάνει το $\hat{X}_1$ για να βρει το $\hat{X}_2$ ως προς το $\hat{Z}_2$ είναι $\theta_2 \neq 0°$. Δείτε πάλι ότι εδώ η άρθρωση 2 είναι ελαφρώς μετατοπισμένη ως προς την θέση απενεργοποίησης $\theta_2 = 0°$ στην οποία οι $\hat{X}_1$ και $\hat{X}_2$ είναι παράλληλες.
- Άρα έχουμε ορίσει τις τιμές $(\alpha_1, \alpha_1, d_2, \theta_2) = (L_1, 0°, 0, \theta_2)$



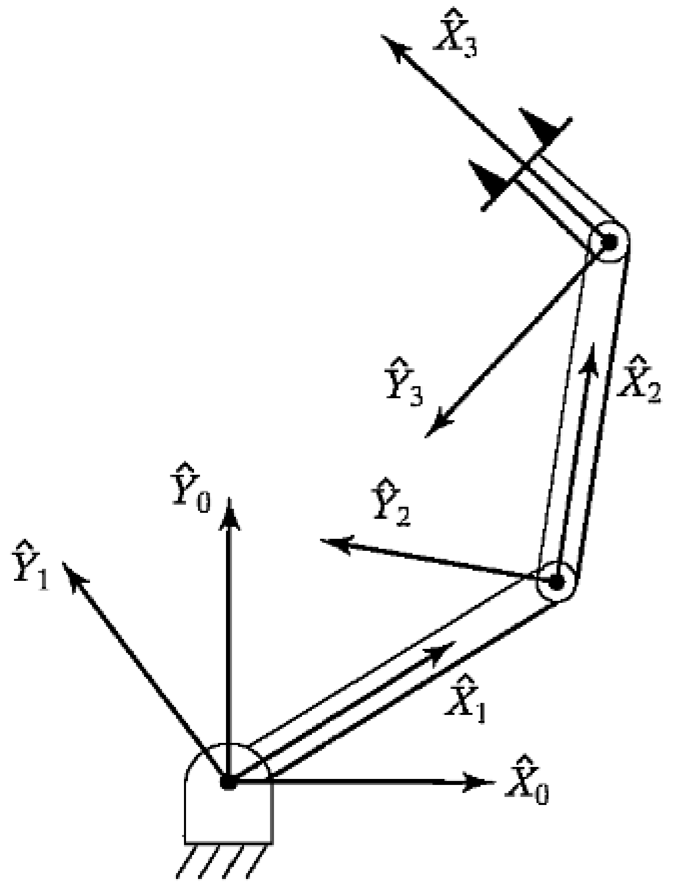
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

- Η {3} είναι η τελευταία άρθρωση.
- ΄Η κάθετη ανάμεσα στα {2}, {3} είναι η a_2 η οποία τέμνει τον άξονα της {3} στο σημείο που φαίνεται με τελεία στο σχήμα.
- Η $a_2 = L_2$ είναι το μήκος του δεύτερου συνδέσμου.
- Ορίζουμε το $\hat{Z}_3$ να βγαίνει από τη σελίδα.
- Μιας και {3} είναι η τελευταία άρθρωση ορίζουμε το $\hat{X}_3$ ώστε να έχει γωνία $0°$ με την $\hat{X}_2$ όταν είναι απενεργοποιημένη ($\theta_3 = 0°$).
- Η γωνία που πρέπει να κάνει το $\hat{Z}_2$ για να βρει το $\hat{Z}_3$ ως προς το $\hat{X}_2$ είναι $\alpha_2 = 0°$, αφού είναι παράλληλες.
- Η απόσταση ανάμεσα στα κέντρα των αξόνων των {2},{3} είναι 0 ως προς την Z-κατεύθυνση αφού είναι στο ίδιο επίπεδο. Άρα $d_3 = 0$.
- Η γωνία που πρέπει να κάνει το $\hat{X}_2$ για να βρει το $\hat{X}_3$ ως προς το $\hat{Z}_3$ στο σχήμα είναι $\theta_3 \neq 0°$. Δείτε πάλι ότι εδώ η άρθρωση 3 είναι ελαφρώς μετατοπισμένη ως προς την θέση απενεργοποίησης $\theta_3 = 0°$ στην οποία οι $\hat{X}_2$ και $\hat{X}_3$ είναι παράλληλες.
- Άρα έχουμε ορίσει τις τιμές $(a_2, \alpha_2, d_3, \theta_3) = (L_2, 0°, 0, \theta_3)$



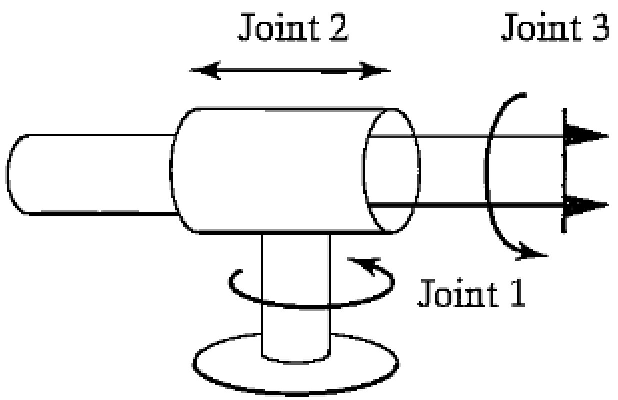
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

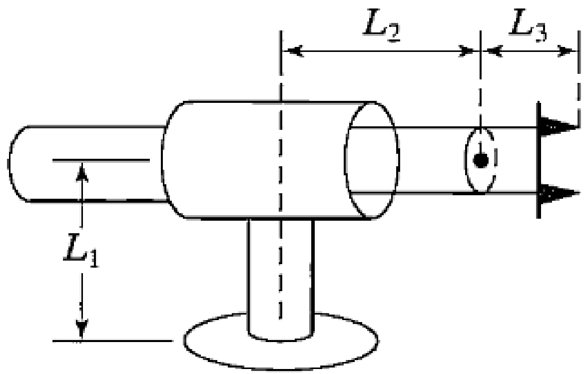
i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	0	L_1	0	θ_2
3	0	L_2	0	θ_3

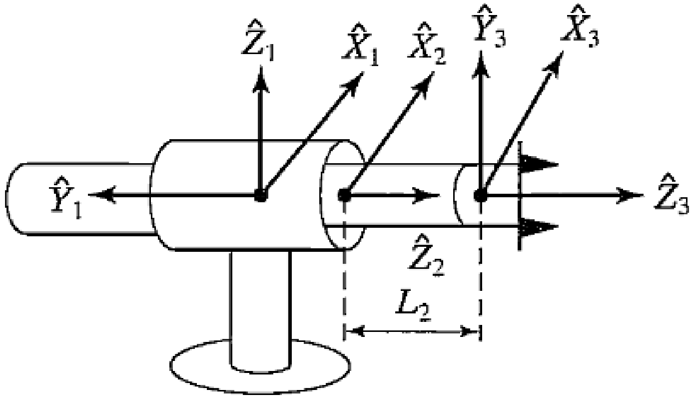


ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

- Οι αρθρώσεις 1,3 είναι περιστροφικές και η 2 είναι πρισματική.
- Ο άξονας της {1} τέμνει τον άξονα της {2} στο ύψος L_1. Άρα εκεί ορίζουμε το κέντρο της {1}. Επίσης $a_1 = 0$ αφού τέμνονται.
- Τα $\hat{Z}_1$ ορίζεται στον άξονα περιστροφής της άρθρωσης 1. Μιας και a_1 είναι 0 μπορούμε να θέσουμε σε μία εκ των 2 καθέτων (πάνω ή κάτω). Επιλέγουμε εκείνη που δείχνει το σχήμα.
- Το {0} ταυτίζεται με το {1}. Άρα $a_0 = 0, \alpha_0 = 0°, d_1 = 0, \theta_1 = 0°$, αφού το $\hat{X}_0$ επιλέγεται ώστε να είναι παράλληλο με το $\hat{X}_1$.Το θ_1 βέβαια μπορεί να αλλάξει αφού η άρθρωση γυρίζει.
- Έχουμε $(a_0, \alpha_0, d_1, \theta_1) = (0{,}0{,}0, \theta_1)$.

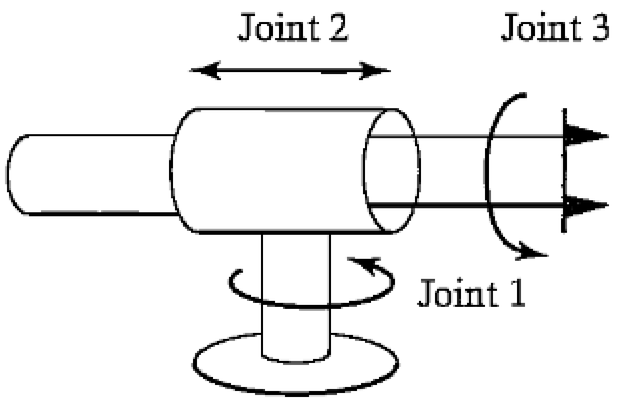


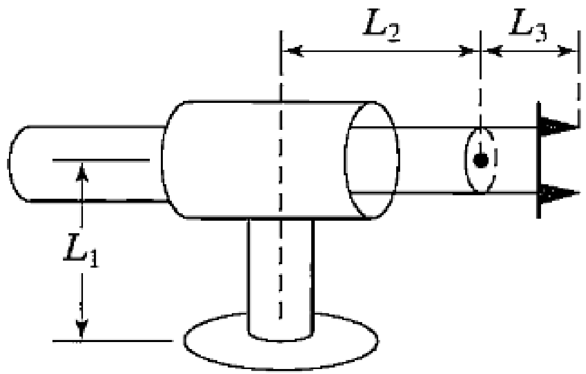


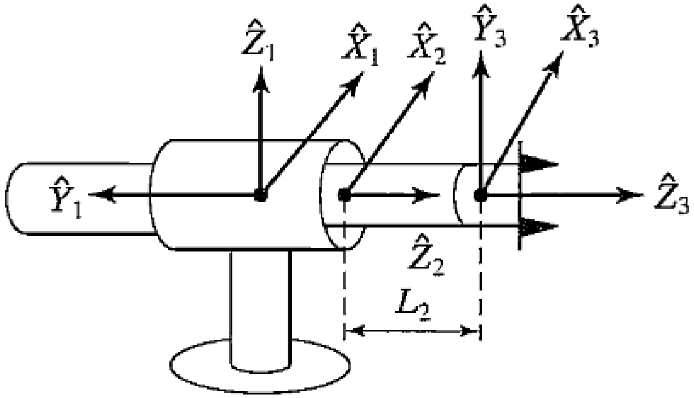


ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

- Ο άξονας της {2} και ο άξονας της {3} είναι παράλληλοι. Άρα επιλέγουμε αυθαίρετα σαν κέντρο την θέση του κέντρου της {1}. Επίσης $a_2 = 0$ αφού είναι παράλληλες.
- Τα $\hat{Z}_2$ ορίζεται στον άξονα μετατόπισης της άρθρωσης 2. Μιας και a_2 είναι 0 μπορούμε να θέσουμε σε μία εκ των 2 πλευρών του άξονα (δεξιά ή αριστερά). Επιλέγουμε εκείνη που δείχνει το σχήμα (δεξιά).
- Αφού οι άξονες {2},{3} είναι παράλληλοι, ορίζουμε αυθαίρετα την $\hat{X}_2$ προς την κατεύθυνση της $\hat{X}_1$. Άρα η μεταξύ τους γωνία είναι $\theta_2 = 0°$.
- Περιστρέφοντας το $\hat{Z}_1$ ως προς την $\hat{X}_1$, συναντά την $\hat{Z}_2$ όταν $\alpha_1 = 90°$.
- Η μετατόπιση των κέντρων ως προς τον άξονα $\hat{Z}_2$ είναι $d_2 = 0$,αλλά μπορεί να αλλάξει αν ενεργοποιηθεί η άρθρωση.
- Έχουμε $(a_1, \alpha_1, d_2, \theta_2) = (0{,}90°, d_2, 0°)$.

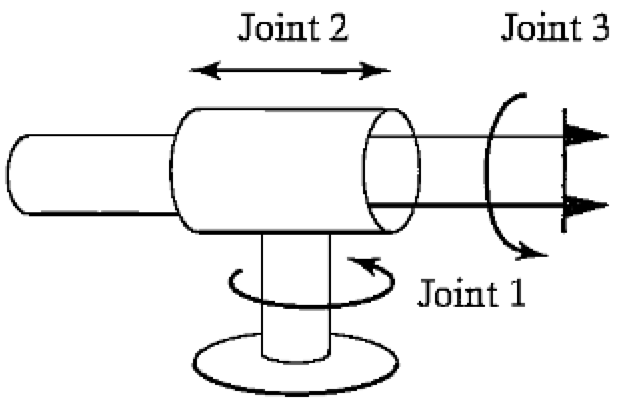


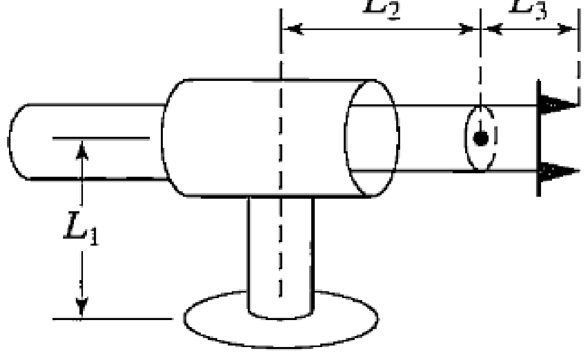


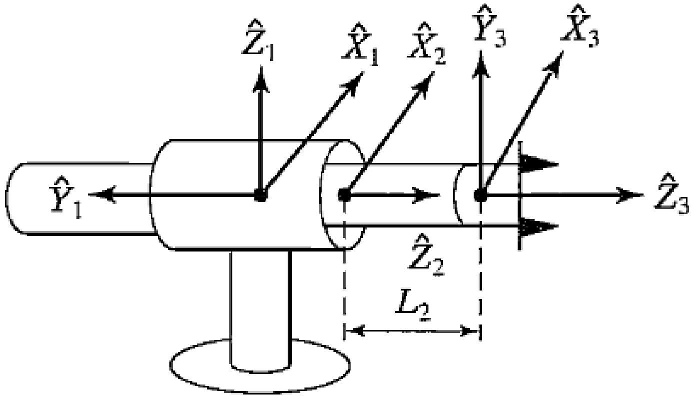


ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

- Φτάσαμε στην τελευταία άρθρωση {3} που είναι περιστροφική.
- Το $\hat{Z}_3$ ορίζεται στον άξονα περιστροφής της άρθρωσης 3. Μιας και a_2 είναι 0 μπορούμε να το θέσουμε σε μία εκ των 2 πλευρών του άξονα (δεξιά ή αριστερά). Επιλέγουμε εκείνη που δείχνει το σχήμα (δεξιά).
- Ορίζουμε αυθαίρετα την $\hat{X}_3$ προς την κατεύθυνση της $\hat{X}_2$. Άρα η μεταξύ τους γωνία είναι $\theta_3 = 0°$. Αυτή μπορεί να αλλάξει με ενεργοποίηση της άρθρωσης 3.
- Περιστρέφοντας το $\hat{Z}_2$ ως προς την $\hat{X}_2$, συναντά την $\hat{Z}_3$ όταν $\alpha_2 = 0°$, αφού είναι παράλληλες και έχουν την ίδια κατεύθυνση.
- Η μετατόπιση των κέντρων ως προς τον άξονα $\hat{Z}_3$ είναι $d_3 = \mathrm{L}_2$.
- Έχουμε $(a_2, \alpha_2, d_3, \theta_3) = (0, 0°, L_2, \theta_3)$.

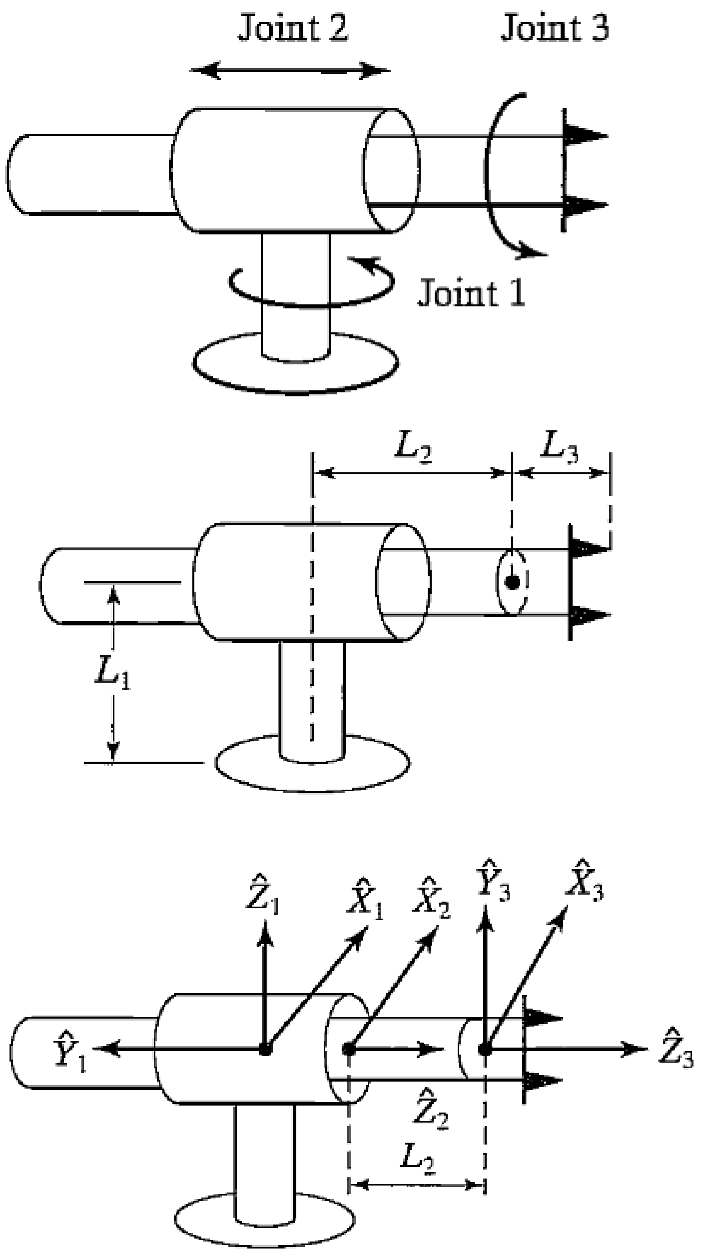




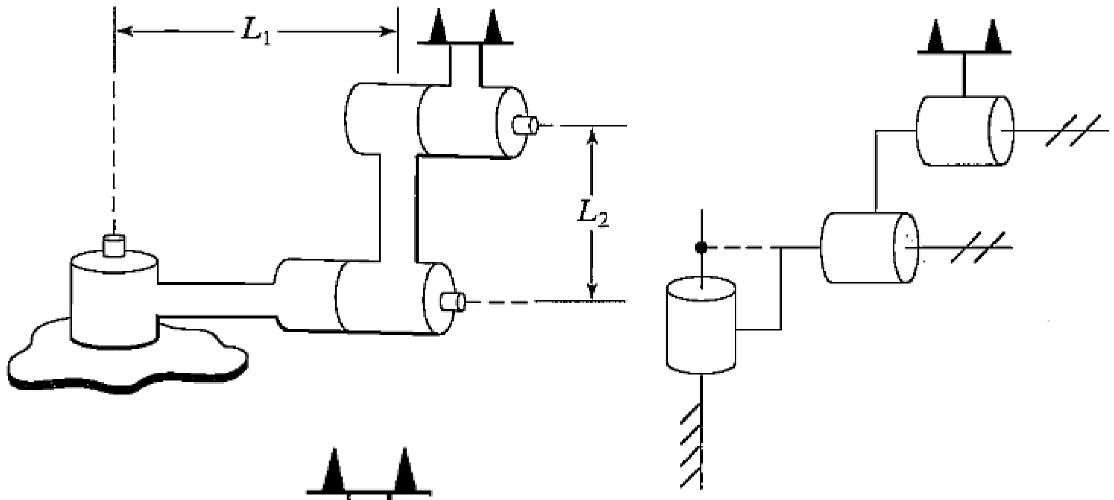


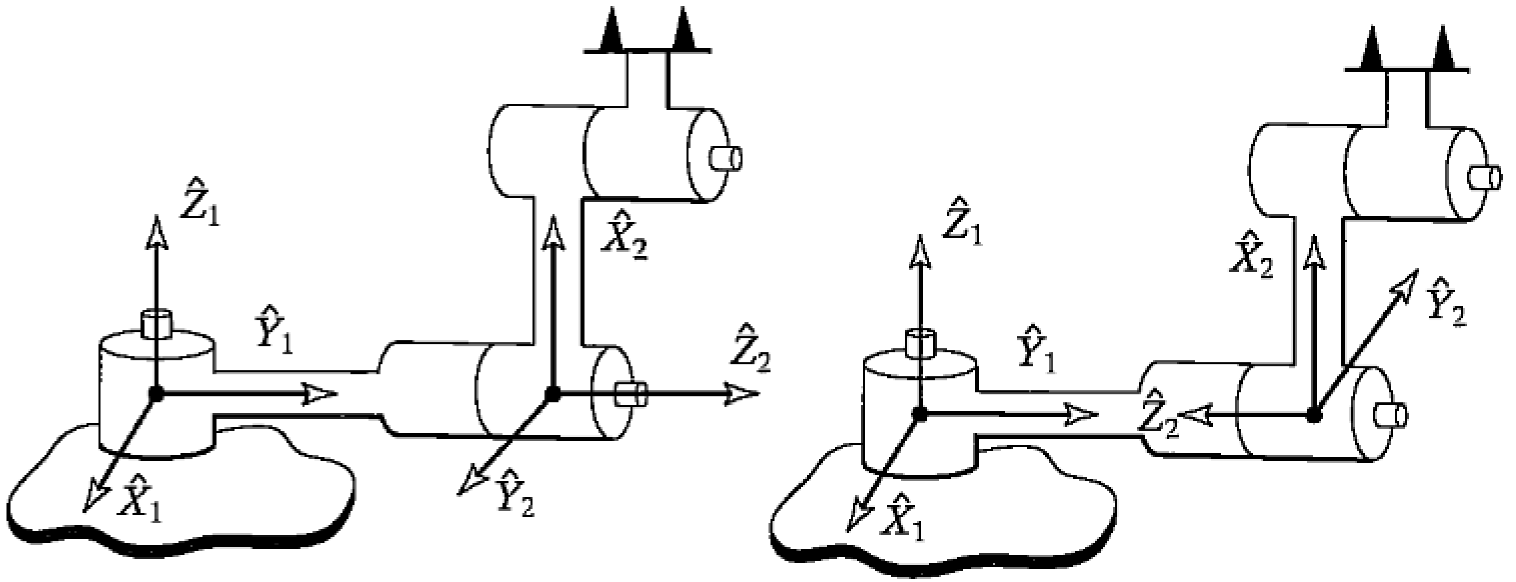
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	90°	0	d_2	0
3	0	0	L_2	θ_3



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3





$a_1 = 0$ $\quad a_2 = L_2$

$\alpha_1 = -90°$ $\quad \alpha_2 = 0$ $\quad \theta_2 = -90°$

$d_1 = 0$ $\quad d_2 = L_1$

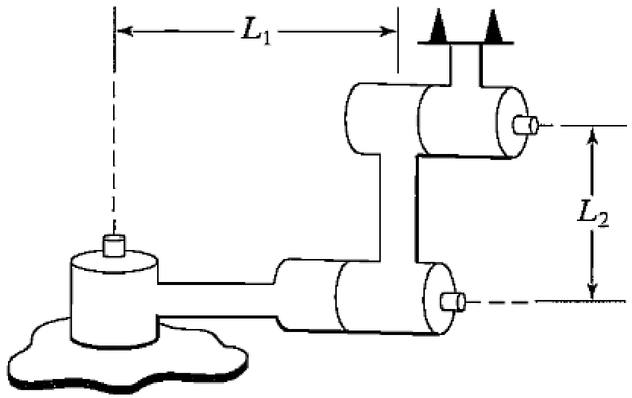
$a_1 = 0$ $\quad a_2 = L_2$

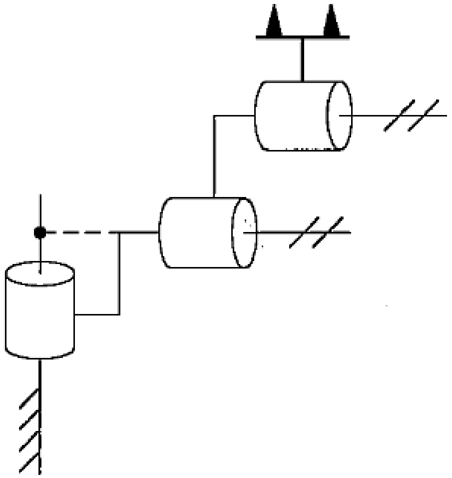
$\alpha_1 = 90°$ $\quad \alpha_2 = 0$ $\quad \theta_2 = 90°$

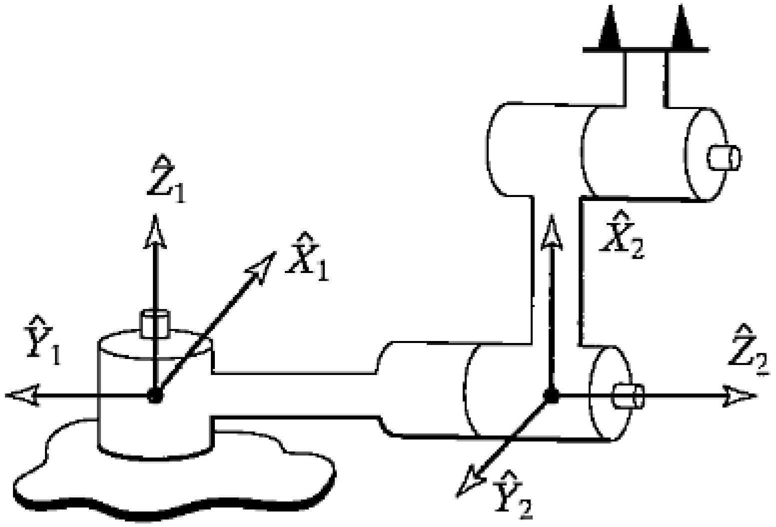
$d_1 = 0$ $\quad d_2 = -L_1$

- Δύο πιθανές λύσεις της ορθής κινηματικής.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3



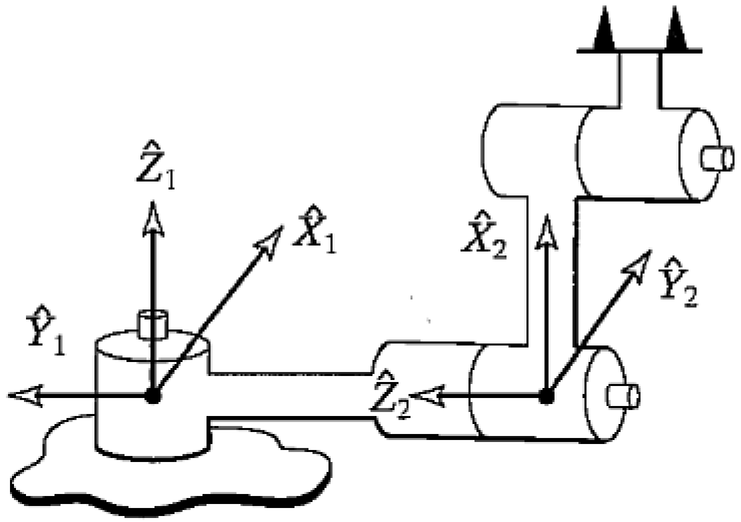




$a_1 = 0 \qquad a_2 = L_2$

$\alpha_1 = 90° \qquad \alpha_2 = 0 \qquad \theta_2 = 90°$

$d_1 = 0 \qquad d_2 = L_1$



$a_1 = 0 \qquad a_2 = L_2$

$\alpha_1 = -90° \qquad \alpha_2 = 0 \qquad \theta_2 = -90°$

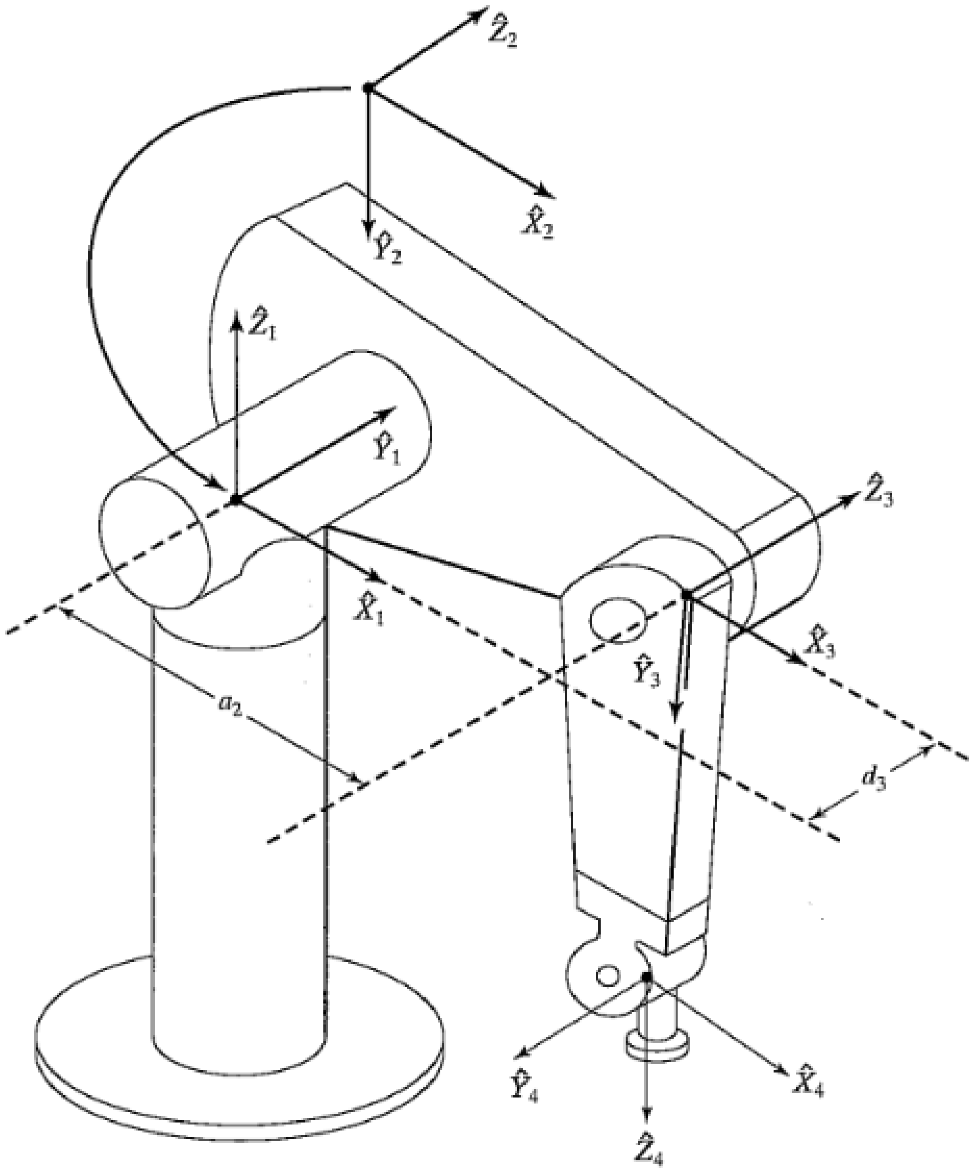
$d_1 = 0 \qquad d_2 = -L_1$

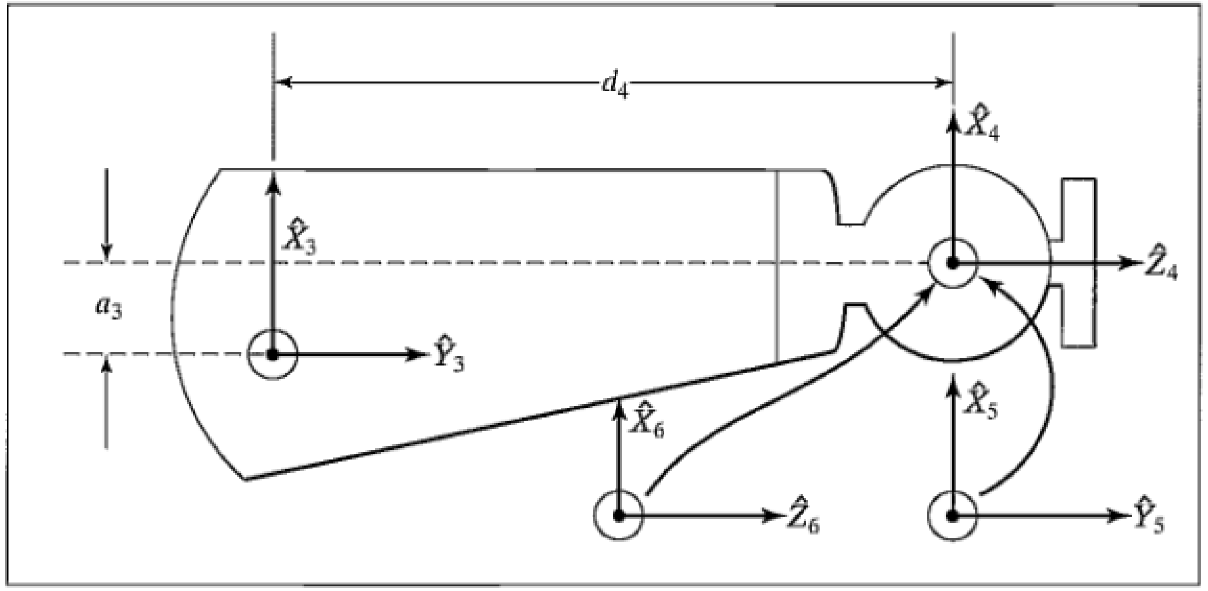
- Άλλες δύο πιθανές λύσεις της ορθής κινηματικής.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 – PUMA 560

- (1985) Το PUMA 560 εκτελεί την πρώτη ρομποτικά-βοηθούμενη βιοψία εγκεφάλου. Είσοδος της ρομποτικής στην ιατρική.

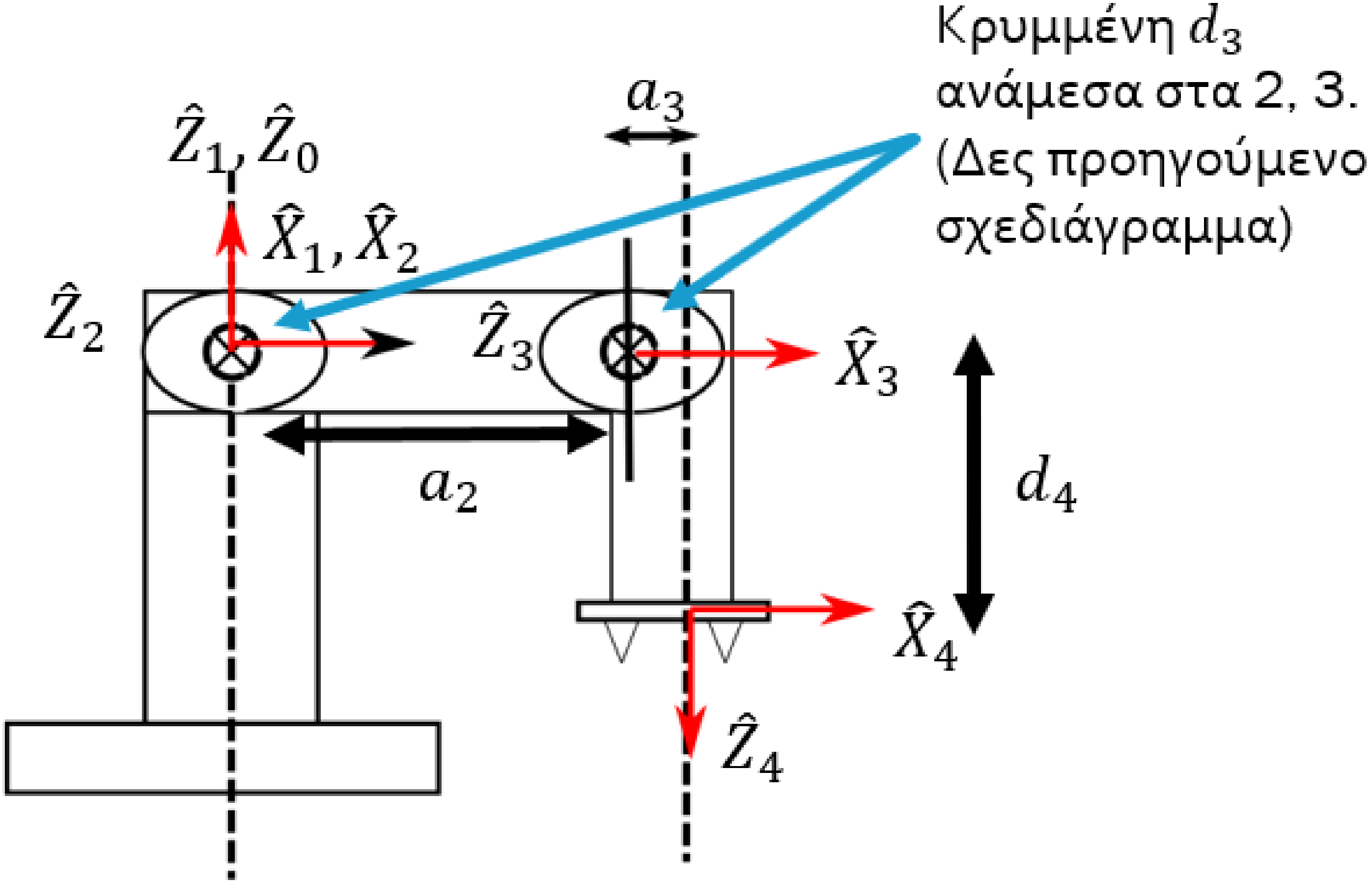
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 – PUMA 560





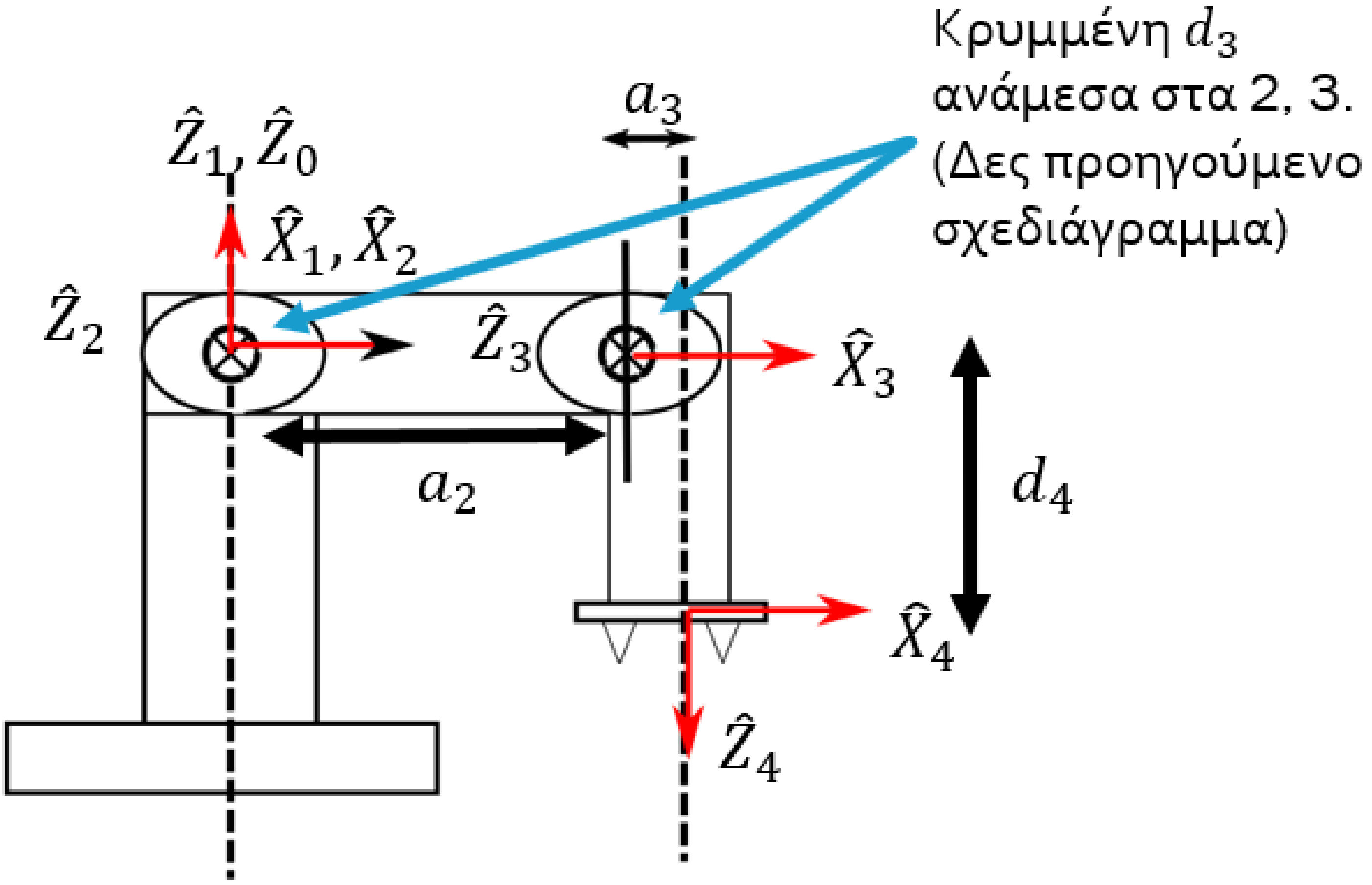
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 – PUMA 560

- Έχουμε 6 αρθρώσεις. 3 για το κυρίως σώμα και 3 στον τελικό επενεργητή.
- Για αρχή κοιτάμε το κυρίως σώμα.
- Φτιάχνουμε την προβολή 3D σχήματος για να κάνουμε την ανάλυση πιο εύκολη, αλλά δεν ξεχνάμε την d_3 που κρύβεται.



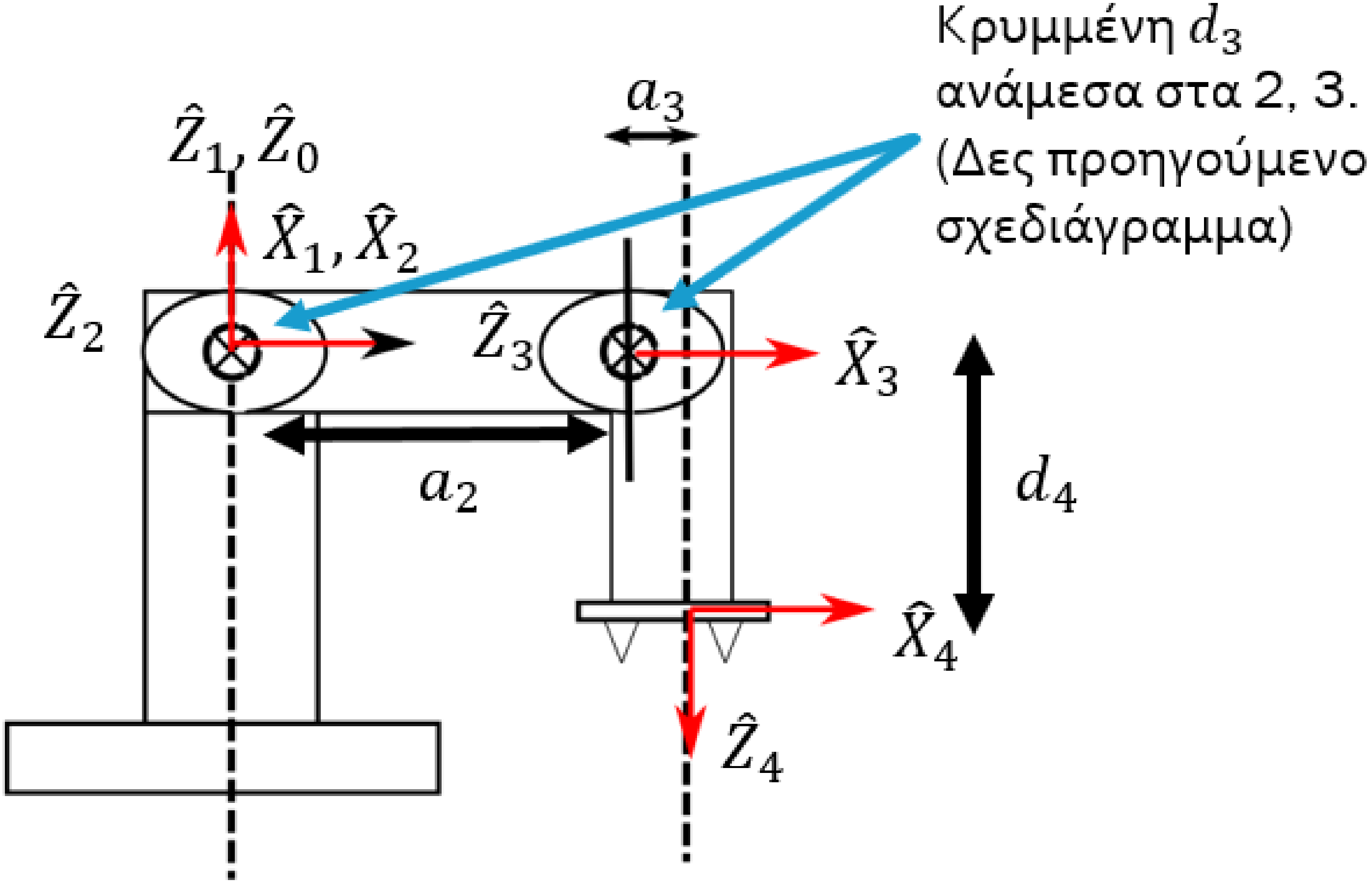
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 – PUMA 560

- {0}, {1} είναι ίδια και είναι στο σημείο τομής με τον άξονα της άρθρωσης {2}.
- Το $\hat{X}_1$ σχεδιάζεται πάνω στην κάθετο α_2 που συνδέει {2},{3}. Εκεί είναι και το $\hat{X}_0$.
- $\alpha_0 = 0, \alpha_0 = 0°, d_1 = 0, \theta_1 = 0°.$
- $(a_0, \alpha_0, d_1, \theta_1) = (0{,}0°, 0, \theta_1)$



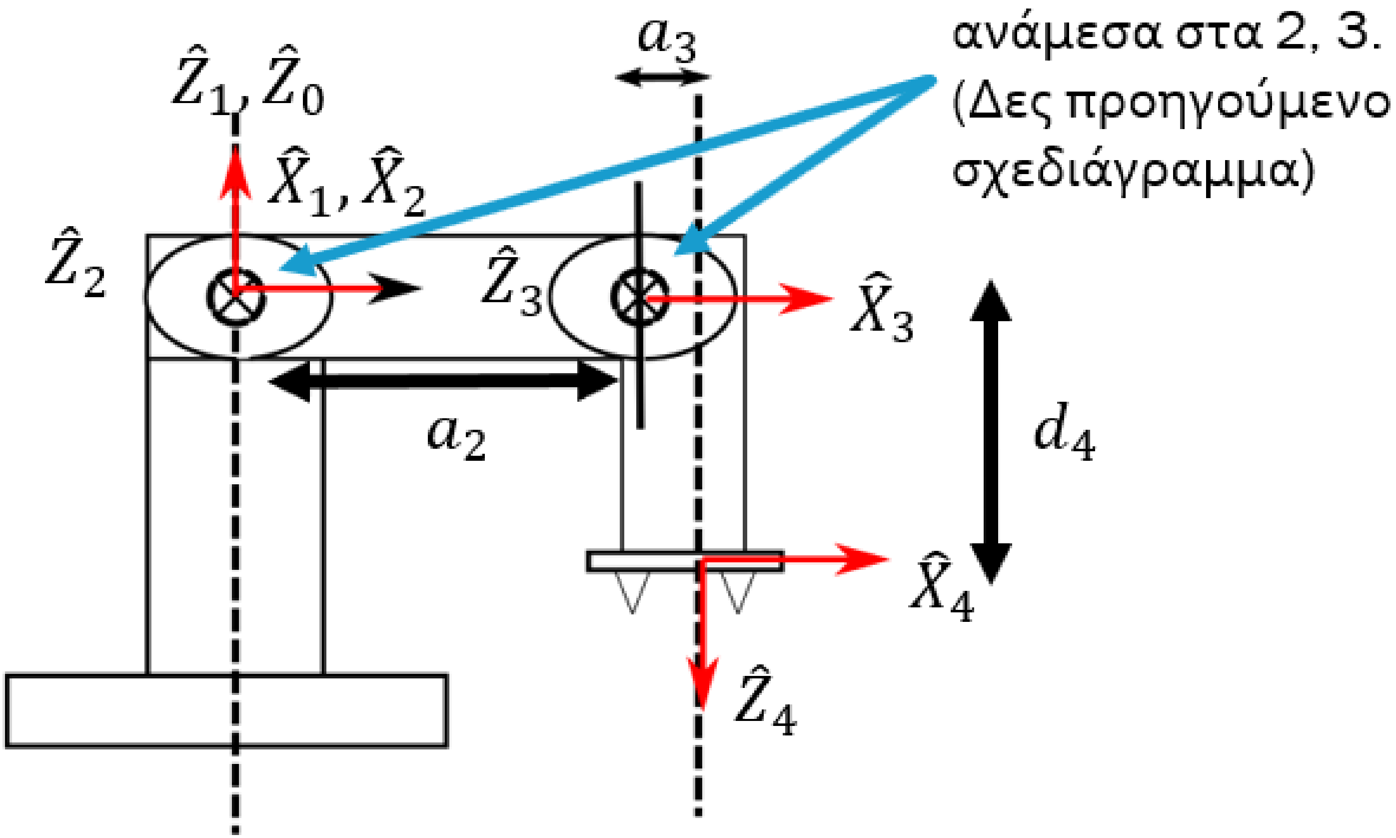
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 – PUMA 560

- {1}, {2} είναι κάθετα με σημείο τομής ίδιο με το σημείο 0 της {1}. Άρα $a_1 = 0$ και $d_2 = 0$.
- Το $\hat{Z}_2$ σχεδιάζεται προς τα μέσα στη σελίδα (x είναι η ουρά του βέλους από το μάτι του/της αναγνώστη/αναγνώστριας προς μέσα στη σελίδα).
- Το $\hat{X}_2$ επιλέγεται ίδιο με το $\hat{X}_1$, άρα $\theta_2 = 0°$.
- Η γωνία ώστε το $\hat{Z}_1$ να συναντήσει το $\hat{Z}_2$ με περιστροφή ως προς το $\hat{X}_1$ είναι $\alpha_1 = 270° = -90°$.
- $(a_1, \alpha_1, d_2, \theta_2) = (0, -90°, 0, \theta_2)$



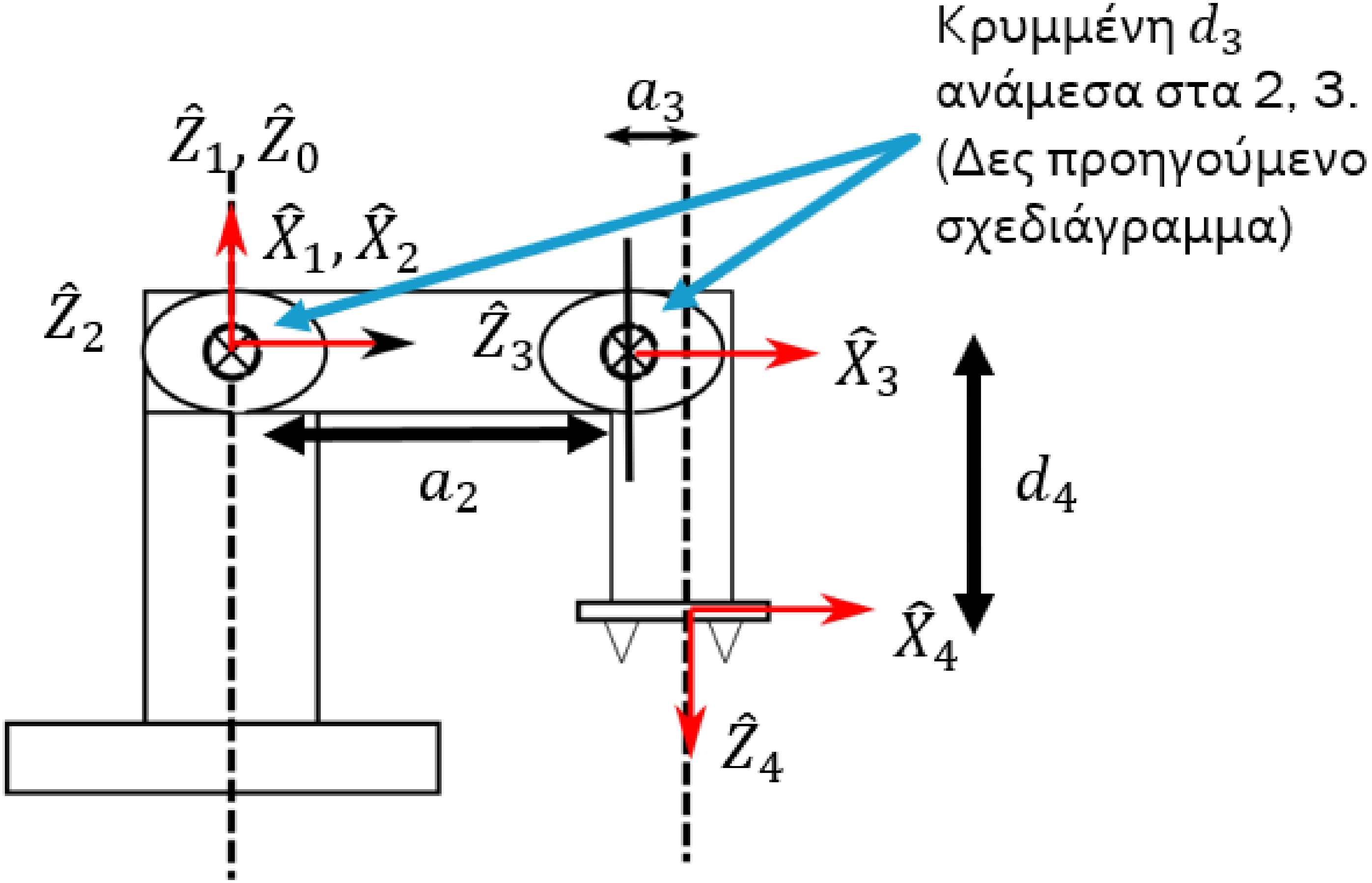
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 – PUMA 560

- {2}, {3} έχουν κάθετη a_2.
- Το $\hat{Z}_3$ σχεδιάζεται προς τα μέσα στη σελίδα. Έχει ίδια κατεύθυνση με το $\hat{Z}_2$, άρα $\alpha_2 = 0°$.
- {3},{4} έχουν κάθετη a_3 , άρα το $\hat{X}_3$ επιλέγεται προς αυτή την κατεύθυνση και ώστε η γωνία του με το $\hat{X}_2$ να είναι $\theta_3 = 0°$.
- Το κέντρο του {3} είναι d_3 πιο μέσα προς τη σελίδα από το {2} (δεν φαίνεται στο 2D διάγραμμα), ως προς το $\hat{Z}_3$. Άρα $d_3 \neq 0$.
- $(a_2, \alpha_2, d_3, \theta_3) = (a_2, 0°, d_3, \theta_1)$



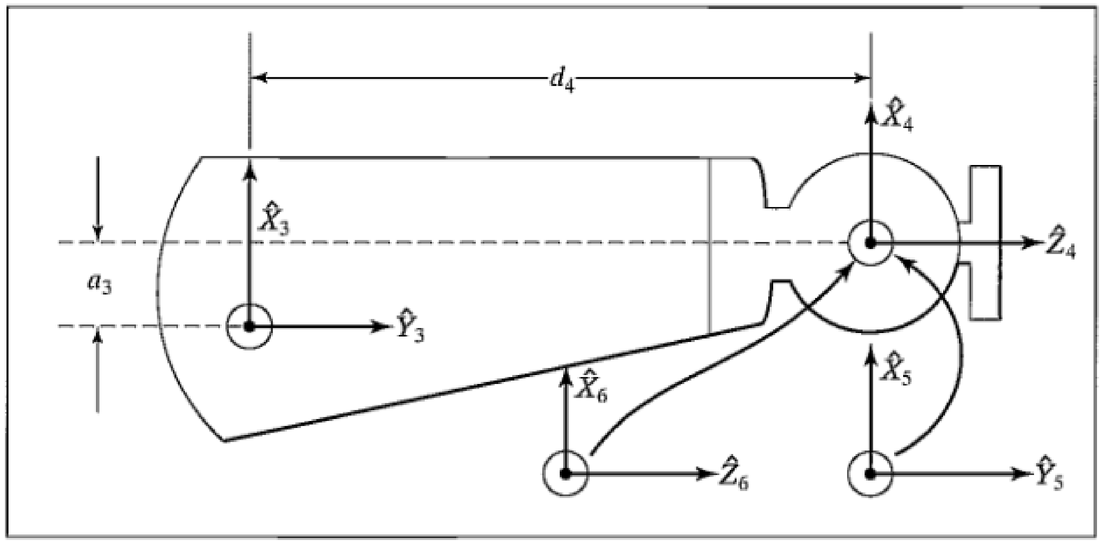
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 – PUMA 560

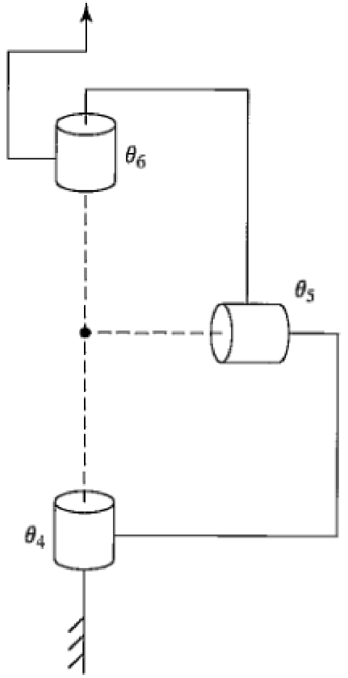
- {3}, {4} έχουν κάθετη $a_3 \neq 0$.
- Το $\hat{Z}_4$ προς τα κάτω. Ως προς αυτό περιστρέφεται ο τελικός επενεργητής.
- Για να πάμε από το $\hat{Z}_3$ στο $\hat{Z}_4$ με περιστροφή ως προς το $\hat{X}_3$ θέλουμε δεξιόστροφη περιστροφή κατά $\alpha_3 = 270° = -90°$.
- Το $\hat{X}_4$ σχεδιάζεται ώστε $\theta_4 = 0°$.
- Το κέντρο του {4} είναι d_4 χαμηλά από το {3}, ως προς το $\hat{Z}_4$. Άρα $d_4 \neq 0$.
- $(a_3, \alpha_3, d_4, \theta_4) = (a_3, -90°, d_4, \theta_4)$



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 – PUMA 560

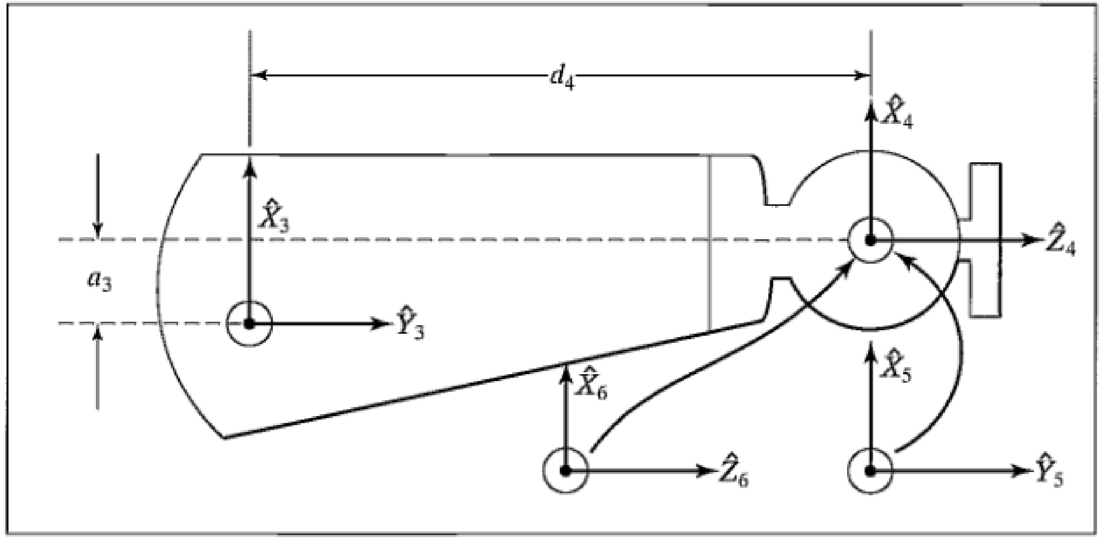
- Κοιτάμε τώρα τις αρθρώσεις του τελικού επενεργητή.
- Οι άξονες των {5},{6} τέμνονται με τον {4}, που είναι σύνηθες στον τελικό επενεργητή των ρομπότ. Άρα $a_4 = a_5 = 0$ και $d_5 = d_6 = 0$.
- Ο $\hat{Z}_5$ είναι προς τα μέσα στη σελίδα, άρα έπρεπε να είχε x αντί για τελεία ,αλλά αυτή είναι η σύμβαση του βιβλίου από το οποίο πάρθηκε το σχήμα.
- Το $\hat{X}_5$ σχεδιάζεται ώστε $\theta_5 = 0°$.
- Η γωνία που πρέπει να στραφεί το $\hat{Z}_4$ δεξιόστροφα ως προς το $\hat{X}_4$ για να συναντήσει το $\hat{Z}_5$ είναι $\alpha_4 = 90°$.
- $(a_4, \alpha_4, d_5, \theta_5) = (0,90°, 0, \theta_5)$

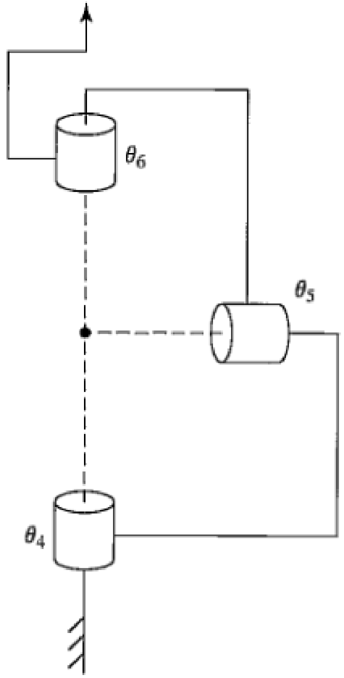




ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 – PUMA 560

- Ο $\hat{Z}_6$ είναι προς την κατεύθυνση του $\hat{Z}_4$ ως προς τον άξονα του
- Το $\hat{X}_6$ σχεδιάζεται ώστε να έχει ίδια φορά με το $\widehat{\mathrm{X}}_5$ ώστε $\theta_6 = 0°$.
- Η γωνία που πρέπει να στραφεί το $\hat{Z}_5$ δεξιόστροφα ως προς το $\hat{X}_5$ για να συναντήσει το $\hat{Z}_6$ είναι $\alpha_5 = 270° = -90°$.
- $(a_5, \alpha_5, d_6, \theta_6) = (0, -90°, 0, \theta_6)$





ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 – PUMA 560

i	$\alpha_i - 1$	$a_i - 1$	d_i	θi
1	0	0	0	θ_1
2	$-90°$	0	0	θ_2
3	0	a_2	d_3	θ_3
4	$-90°$	a_3	d_4	θ_4
5	$90°$	0	0	θ_5
6	$-90°$	0	0	θ_6

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 – PUMA 560

- Είχαμε βρει προηγουμένως τον τύπο:

$$
{}^{i-1}_{i}T = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ s\theta_i c\alpha_{i-1} & c\theta_i c\alpha_{i-1} & -s a_{i-1} & -s a_{i-1} d_i \\ s\theta_i s\alpha_{i-1} & c\theta_i s\alpha_{i-1} & c a_{i-1} & c a_{i-1} d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

- Κοιτάμε επομένως κάθε γραμμή του προηγούμενου πίνακα και με αντικατάσταση βρίσκουμε τον κάθε μετασχηματισμό.
- Μετά βρίσκουμε το ${}^{0}_{6}T = {}^{0}_{1}T\,{}^{1}_{2}T\,{}^{2}_{3}T\,{}^{3}_{4}T\,{}^{4}_{5}T\,{}^{5}_{6}T$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 – PUMA 560

$$
{}^0_1T = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad
{}^2_3T = \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & a_2 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},
$$

$$
{}^1_2T = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_2 & -c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad
{}^3_4T = \begin{bmatrix} c\theta_4 & -s\theta_4 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ -s\theta_4 & -c\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},
$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 – PUMA 560

$$
{}^{4}_{5}T = \begin{bmatrix} c\theta_5 & -s\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s\theta_5 & c\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},
$$

$$
{}^{5}_{6}T = \begin{bmatrix} c\theta_6 & -s\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_6 & -c\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 – PUMA 560

- Ξεκινάμε πολλαπλασιάζοντας τα ${}^4_5T\,{}^5_6T = {}^4_6T$.
- Για λόγους εξοικονόμησης χώρου έχουμε $\cos\theta_5 = c\theta_5 = c_5$ και ομοίως για τα υπόλοιπα.

$$
{}^4_6T = {}^4_5T\,{}^5_6T = \begin{bmatrix} c_5c_6 & -c_5s_6 & -s_5 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ s_5c_6 & -s_5s_6 & c_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 – PUMA 560

- Συνεχίζουμε με ${}^3_4T\,{}^4_6T = {}^3_6T$.

$$
{}^3_6T = {}^3_4T\,{}^4_6T = \begin{bmatrix} c_4c_5c_6 - s_4s_6 & -c_4c_5s_6 - s_4c_6 & -c_4s_5 & a_3 \\ s_5c_6 & -s_5s_6 & c_5 & d_4 \\ -s_4c_5c_6 - c_4s_6 & s_4c_5s_6 - c_4c_6 & s_4s_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 – PUMA 560

- Συνεχίζουμε με ${}^2_3T\,{}^3_6T = {}^2_6T$.

$$
{}^1_3T = {}^1_2T\,{}^2_3T = \begin{bmatrix} c_{23} & -s_{23} & 0 & a_2c_2 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ -s_{23} & -c_{23} & 0 & -a_2s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
c_{23} = c_2c_3 - s_2s_3,
$$

$$
s_{23} = c_2s_3 + s_2c_3.
$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 – PUMA 560

- Συνεχίζουμε με ${}^1_2T\,{}^2_6T = {}^1_6T$.

$$
{}^1_6T = {}^1_3T\,{}^3_6T = \begin{bmatrix} {}^1r_{11} & {}^1r_{12} & {}^1r_{13} & {}^1p_x \\ {}^1r_{21} & {}^1r_{22} & {}^1r_{23} & {}^1p_y \\ {}^1r_{31} & {}^1r_{32} & {}^1r_{33} & {}^1p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^1r_{11} &= c_{23}[c_4c_5c_6 - s_4s_6] - s_{23}s_5s_6, \\
{}^1r_{21} &= -s_4c_5c_6 - c_4s_6, \\
{}^1r_{31} &= -s_{23}[c_4c_5c_6 - s_4s_6] - c_{23}s_5c_6, \\
{}^1r_{12} &= -c_{23}[c_4c_5s_6 + s_4c_6] + s_{23}s_5s_6, \\
{}^1r_{22} &= s_4c_5s_6 - c_4c_6, \\
{}^1r_{32} &= s_{23}[c_4c_5s_6 + s_4c_6] + c_{23}s_5s_6, \\
{}^1r_{13} &= -c_{23}c_4s_5 - s_{23}c_5, \\
{}^1r_{23} &= s_4s_5, \\
{}^1r_{33} &= s_{23}c_4s_5 - c_{23}c_5, \\
{}^1p_x &= a_2c_2 + a_3c_{23} - d_4s_{23}, \\
{}^1p_y &= d_3, \\
{}^1p_x &= -a_3s_{23} - a_2s_2 - d_4c_{23}.
\end{aligned}
$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 – PUMA 560

- Τελειώνουμε με ${}^{0}_{1}T\,{}^{1}_{6}T = {}^{0}_{6}T$.

$$
{}^{0}_{6}T = {}^{0}_{1}T\;{}^{1}_{6}T = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
r_{11} &= c_1[c_{23}(c_4c_5c_6 - s_4s_5) - s_{23}s_5c_5] + s_1(s_4c_5c_6 + c_4s_6), \\
r_{21} &= s_1[c_{23}(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - s_{23}s_5c_6 - c_1(s_4c_5c_6 + c_4s_6), \\
r_{31} &= -s_{23}(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - c_{23}s_5c_6,
\end{aligned}
$$

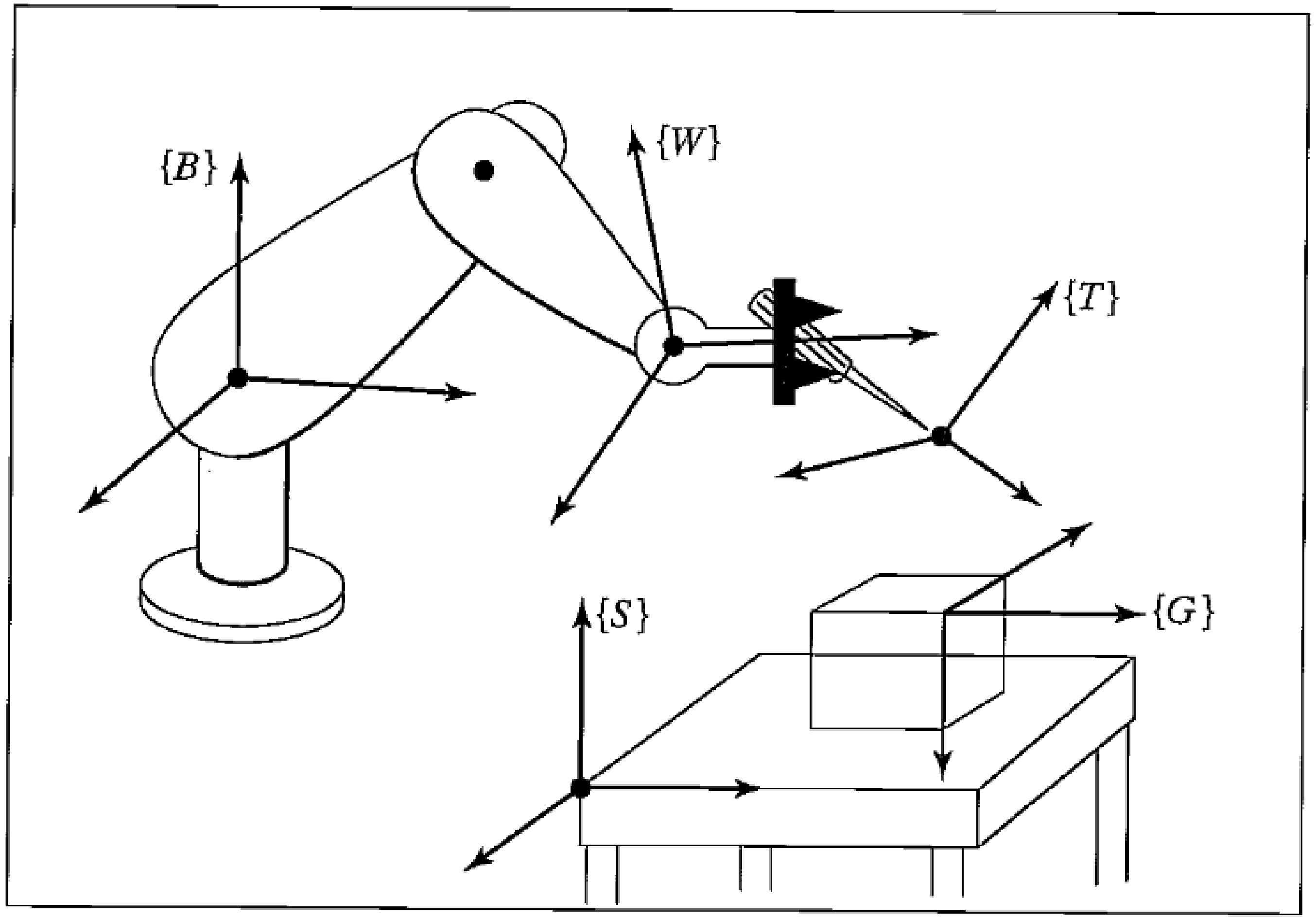
$$
\begin{aligned}
r_{12} &= c_1[c_{23}(-c_4c_5s_6 - s_4c_6) + s_{23}s_5s_6] + s_1(c_4c_6 - s_4c_5s_6), \\
r_{22} &= s_1[c_{23}(-c_4c_5s_6 - s_4c_6) + s_{23}s_5s_6] - c_1(c_4c_6 - s_4c_5s_6), \\
r_{32} &= -s_{23}(-c_4c_5s_6 - s_4c_6) + c_{23}s_5s_6,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
r_{13} &= -c_1(c_{23}c_4s_5 + s_{23}c_5) - s_1s_4s_5, \\
r_{23} &= -s_1(c_{23}c_4s_5 + s_{23}c_5) + c_1s_4s_5, \\
r_{33} &= s_{23}c_4s_5 - c_{23}c_5,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_x &= c_1[a_2c_2 + a_3c_{23} - d_4s_{23}] - d_3s_1, \\
p_y &= s_1[a_2c_2 + a_3c_{23} - d_4s_{23}] + d_3c_1, \\
p_z &= -a_3s_{23} - a_2s_2 - d_4c_{23}.
\end{aligned}
$$

Πλαίσια με καθιερωμένα ονόματα

- Βάση του ρομπότ {B}. Το πλαίσιο {0}.
- Τελικός επενεργητής {W}. Σε αυτή την ενότητα υπολογίσαμε το ${}^{B}_{W}T$. Το πλαίσιο ως προς την τελευταία άρθρωση.
- Το πλαίσιο του εργαλείου {T}.
- Το πλαίσιο του χώρου εργασίας {S}.
- Το πλαίσιο του στόχου {G}.



Που είναι το εργαλείο ;

- Θέλουμε να βρούμε το ${}^{S}_{T}T$ που είναι η περιγραφή του εργαλείου ως προς το πάγκο εργασίας.
- Ξέρουμε ότι:

$$ {}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{T}}\mathrm{T} = {}^{B}_{S}T\,{}^{S}_{T}T = {}^{B}_{W}T\,{}^{W}_{T}T $$

- Άρα:

$$ {}^{S}_{T}T = {}^{B}_{S}T^{-1}\,{}^{B}_{W}T\,{}^{W}_{T}T $$

- Η εξίσωση αυτή είναι η γενίκευση της ορθής κινηματικής. Ξέροντας το ${}^{B}_{W}T$, την σταθερή απόσταση της βάσης του ρομπότ από τον χώρο εργασίας ${}^{B}_{S}T$ και την γενικευμένη σχέση ανάμεσα στο εργαλείο και τον τελικό επενεργητή ${}^{W}_{T}T$, μπορούμε να βρούμε που είναι το εργαλείο ως προς τον χώρο εργασίας του.
- Μπορούμε να βάλουμε κάθε λογής εργαλείο με offset ή και περιστροφή ως προς το τελικό επενεργητή και να ξέρουμε πάντα τη θέση του ως προς τον χώρο εργασίας με τη βοήθεια της βάσης του ρομπότ.

Που είναι το εργαλείο ;