Ενότητα 5

Τυχαία Μεταβλητή

Ορισμός

Έστω Ω ο δειγματικός χώρος ενός στοχαστικού (τυχαίου) πειράματος. Μια πραγματική συνάρτηση X που ορίζεται στο δειγματικό χώρο Ω καλείται τυχαία μεταβλητή (τ.μ.). Η συνάρτηση αυτή αντιστοιχεί σε κάθε δειγματικό σημείο $\omega \in \Omega$ έναν πραγματικό αριθμό $x = X(\omega)$.

Το σύνολο των τιμών της τυχαίας μεταβλητής $R_X \subseteq R$ αποτελεί το **νέο δειγματικό χώρο** του στοχαστικού (τυχαίου) πειράματος (ή φαινομένου).

Συνάρτηση Κατανομής

Ορισμός

Η συνάρτηση

$$F(x) = P(X \leq x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}), \quad -\infty < x < \infty,$$

καλείται συνάρτηση κατανομής ή αθροιστική συνάρτηση κατανομής της τ.μ. X.

Η συνάρτηση κατανομής, ως πιθανότητα, λαμβάνει τιμές στο διάστημα $[0, 1]$,

$$0 \leq F(x) \leq 1, \quad -\infty < x < \infty.$$

Επίσης είναι αύξουσα συνάρτηση,

$$F(x_1) \leq F(x_2), \quad -\infty < x_1 < x_2 < \infty,$$

επειδή

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x_1\} \subseteq \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x_2\}$$

και ισχύει

$$F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad F(\infty) = \lim_{x \to \infty} F(x) = 1,$$

επειδή

$$\lim_{x \to -\infty} \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = \emptyset, \quad \lim_{x \to \infty} \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = \Omega.$$

Θεώρημα

Έστω $F(x)$, $x \in R$, η συνάρτηση κατανομής μιας τυχαίας μεταβλητής X.
Τότε

$$P(\alpha < X \leq \beta) = F(\beta) - F(\alpha),$$

για κάθε πραγματικούς αριθμούς α και β με $\alpha < \beta$.

Διακριτή Τυχαία Μεταβλητή

Ορισμός

Μία τυχαία μεταβλητή X καλείται διακριτή ή απαριθμητή αν παίρνει με πιθανότητα 1 αριθμήσιμο (πεπερασμένο ή άπειρο) σύνολο τιμών $R_X = \{x_0, x_1, \ldots, x_\upsilon, \ldots\}$.
Η συνάρτηση

$$f(x_\kappa) = P(X = x_\kappa) = P(\{\omega \in \Omega : \; X(\omega) = x_\kappa\}), \quad \kappa = 0, 1, \ldots, \upsilon, \ldots, \qquad (1)$$

η οποία σε κάθε σημείο x_κ *εκχωρεί την πιθανότητά του, καλείται συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ή απλώς συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. X.*

Η συνάρτηση πιθανότητας, όπως προκύτει άμεσα από τον ορισμό της, είναι μη αρνητική,

$$f(x_\kappa) \geq 0, \quad \kappa = 0, 1, \ldots, \upsilon, \ldots, \quad f(x) = 0, \quad x \notin R_X, \tag{2}$$

και αθροίζει στη μονάδα,

$$\sum_{\kappa=0}^{\infty} f(x_\kappa) = 1. \tag{3}$$

Στην περίπτωση που το σύνολο των τιμών της τ.μ. X είναι πεπερασμένο, $R_X = \{x_0, x_1, \ldots, x_\upsilon\}$, η σειρά (3) γίνεται ένα πεπερασμένο άθροισμα,

$$\sum_{\kappa=0}^{\upsilon} f(x_\kappa) = 1.$$

Μέση Τιμή Διακριτής Τυχαίας Μεταβλητής

Η μέση τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής αποτελεί γενίκευση του αριθμητικού μέσου μιας ακολουθίας τιμών.

Ορισμός

Έστω X μία διακριτή τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πιθανότητας $f(x_\kappa) = P(X = x_\kappa)$, $\kappa = 0, 1, \ldots$. Τότε η μεση τιμή αυτής, συμβολιζόμενη με $E(X)$ ή μ_X ή απλώς μ, αν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης, ορίζεται από τη σχέση

$$\mu = E(X) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} x_\kappa f(x_\kappa).$$

Παράδειγμα 1

Ας θεωρήσουμε στοχαστικό πείραμα της ρίψης ενός συνήθους κύβου και έστω X ο αριθμός που εμφανίζεται στην επάνω έδρα του.
Να υπολογισθεί η μέση τιμή $E(X)$.

Λύση

Η συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. X, δίνεται από την

$$f(x) = P(X = x) = \frac{1}{6}, \quad x = 1, 2, \ldots, 6.$$

Επομένως, σύμφωνα με τον ορισμό της μέσης τιμής,

$$E(X) = \frac{1}{6}\sum_{x=1}^{6} x = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}.$$

Ορισμός

Μέση τιμή της $Y = g(X)$:

$$E(Y) \equiv E[g(X)] = \sum_{\kappa=0}^{\infty} g(x_\kappa) f_X(x_\kappa),$$

αν η X είναι διακριτή.

Ορισμός

Έστω X μία τυχαία μεταβλητή της οποίας υπάρχει η μέση τιμή $\mu = E(X)$. Τότε η διασπορά ή διακύμανση της X, συμβολιζόμενη με $V(X)$ ή σ_X^2 ή απλώς σ^2, αν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης, ορίζεται από τη σχέση

$$\sigma^2 = V(X) = E[(X - \mu)^2].$$

Η θετική τετραγωνική ρίζα της διασποράς $V(X)$,

$$\sigma = \sigma_X = \sqrt{V(X)},$$

καλείται τυπική απόκλιση της τυχαίας μεταβλητής X.

Θεώρημα

Έστω X μία τυχαία μεταβλητή της οποίας υπάρχουν η μέση τιμή και η
διασπορά και a, β σταθερές. Τότε

$$E(aX+\beta)=aE(X)+\beta,$$

$$E[g(X)+h(X)]=E[g(X)]+E[h(X)]$$

και

$$V(aX+\beta)=a^2V(X),$$

Θεώρημα

Έστω X μία τυχαία μεταβλητή της οποίας υπάρχουν η μέση τιμή και η διασπορά και α, β σταθερές. Τότε

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

Απόδειξη

$$V(X) = E[(X-\mu)^2] = E(X^2 - 2\mu X + \mu^2) = E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2$$
$$= E(X^2) - [E(X)]^2.$$