Ενότητα 8

Βασικές Διακριτές Κατανομές

1. Κατανομή Bernoulli

Ορισμός

Έστω X ο αριθμός των επιτυχιών σε μια δοκιμή Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p (και αποτυχίας $q = 1 - p$). Η κατανομή της δίτιμης τυχαίας μεταβλητής X καλείται κατανομή Bernoulli με παράμετρο p.

Θεώρημα

Η συνάρτηση πιθανότητας της κατανομής Bernoulli με παράμετρο p δίνεται από την

$$f(x) = P(X = x) = p^x q^{1-x}, \;\; x = 0, 1.$$

και η συνάρτηση κατανομής από την

$$F(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0 \\ q, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & 1 \leq x < \infty. \end{cases}$$

Η μέση τιμή και διασπορά δίνονται από τις

$$\mu = E(X) = p, \;\; \sigma^2 = V(X) = pq.$$

2. Διωνυμική Κατανομή

Ορισμός

Έστω X ο αριθμός των επιτυχιών σε μια ακολουθία υ ανεξαρτήτων δοκιμών Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p (και αποτυχίας $q = 1 - p$) σταθερή (ίδια) σε όλες τις δοκιμές.
Η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής X καλείται διωνυμική με παραμέτρους υ και p.

Θεώρημα

Η συνάρτηση πιθανότητας της διωνυμικής κατανομής με παραμέτρους υ και p δίνεται από την

$$f(x) = P(X = x) = \binom{\upsilon}{x} p^x q^{\upsilon - x}, \quad x = 0, 1, \ldots, \upsilon.$$

Θεώρημα

Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή με συνάρτηση πιθανότητας την (4). Τότε η μέση τιμή και η διασπορά της αυτής δίνονται από τις

$$\mu = E(X) = \upsilon p, \quad \sigma^2 = V(X) = \upsilon pq.$$

Παράδειγμα

Έστω ότι η πιθανότητα επιτυχούς βολής κατά στόχου είναι $p = 0{,}3$. Να υπολογισθεί ο αριθμός υ των βολών που απαιτούνται έτσι ώστε η πιθανότητα να κτυπηθεί ο στόχος τουλάχιστο μια φορά να είναι μεγαλύτερη ή ίση του 0,9.

Λύση

Κάθε βολή κατά του στόχου αποτελεί μια δοκιμή Bernoulli με επιτυχία το ενδεχόμενο να κτυπηθεί ο στόχος. Ο αριθμός X των επιτυχών βολών κατά του στόχου σε υ βολές ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή:

$$P(X_\upsilon = x) = \binom{\upsilon}{x}(0{,}3)^x(0{,}7)^{\upsilon-x}, \quad x = 0, 1, \ldots, \upsilon,$$

$$P(X_\upsilon \geq 1) = 1 - P(X_\upsilon = 0) = 1 - (0{,}7)^\upsilon, \quad P(X_\upsilon \geq 1) \geq 0{,}9$$

$$1 - (0{,}7)^\upsilon \geq 0{,}9, \quad (0{,}7)^\upsilon \leq 0{,}1, \quad \upsilon \geq 7.$$

3. Γεωμετρική Κατανομή

Ορισμός

Έστω X ο αριθμός των δοκιμών μέχρι την πρώτη επιτυχία σε μια ακολουθία ανεξαρτήτων δοκιμών Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p, σταθερή σε όλες τις δοκιμές.
Η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής X καλείται γεωμετρική με παράμετρο p.

Θεώρημα

Η συνάρτηση πιθανότητας της γεωμετρικής κατανομής με παράμετρο p δίνεται από την

$$f(x) = P(X = x) = pq^{x-1}, \quad x = 1, 2, \ldots$$

4. Κατανομή Poisson

Ορισμός

Έστω X μια διακριτή τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πιθανότητας

$$f(x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, \ldots,$$

όπου $0 < \lambda < \infty$. Η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής X καλείται κατανομή Poisson με παράμετρο λ. (1)

Θεώρημα

Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X έχει τη διωνυμική κατανομή με παραμέτρους υ και p.
Αν, για $\upsilon \to \infty$, το $p \to 0$ έτσι ώστε $\upsilon p = \lambda$ (ή γενικότερα $\lim_{\upsilon\to\infty} \upsilon p = \lambda$), όπου $\lambda > 0$ σταθερά, τότε

$$\lim_{\upsilon\to\infty} \binom{\upsilon}{x} p^x (1-p)^{\upsilon - x} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, \ldots .$$

Θεώρημα

Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή Χ έχει την κατανομή Poisson με συνάρτηση πιθανότητας την (1). Τότε η μέση τιμή και η διασπορά αυτής δίνονται από τις

$$\mu = E(X) = \lambda, \quad \sigma^2 = V(X) = \lambda.$$

Παράδειγμα

Έχει παρατηρηθεί ότι 3 άτομα το μήνα κατά μέσο όρο πεθαίνουν στην Αθήνα από μια σπάνια ασθένεια. Να υπολογισθούν οι πιθανότητες:
(α) να υπάρξουν το πολύ 2 θάνατοι από την ασθένεια αυτή σε ένα μήνα,
(β) να υπάρξουν το πολύ 4 θάνατοι από την ασθένεια αυτή σε χρονικό διάστημα 2 μηνών,

Λύση

Ο αριθμός X_t των θανάτων από την ασθένεια αυτή σε διάστημα t μηνών ακολουθεί την κατανομή Poisson με

$$P(X_t = x) = e^{-3t}\frac{(3t)^x}{x!}, \quad x = 0, 1, \ldots, .$$

Επομένως, για το (α) έχουμε

$$P(X_1 \leq 2) = \sum_{x=0}^{2} e^{-3}\frac{3^x}{x!} = 0{,}0498 + 0{,}1494 + 0{,}2240 = 0{,}4232$$

και (β)

$$\begin{aligned} P(X_2 \leq 4) &= \sum_{x=0}^{4} e^{-6}\frac{6^x}{x!} \\ &= 0{,}0025 + 0{,}0149 + 0{,}0446 + 0{,}0892 + 0{,}1339 = 0{,}2851. \end{aligned}$$

Παράδειγμα

Σε μια συγκεκριμένη αεροπορική πτήση που εξυπηρετείται από αεροπλάνο 80 θέσεων έχει παρατηρηθεί ότι 4 επιβάτες κατά μέσο όρο δεν εμφανίζονται κατά την αναχώρηση.

Ποιά είναι η πιθανότητα άτομο που βρίσκεται

(α) στη δεύτερη θέση και

(β) στην πέμπτη θέση του καταλόγου αναμονής να ταξιδεύσει;

Λύση

Ο αριθμός X των επιβατών που δεν εμφανίζονται κατά την αναχώρηση ακολουθεί την κατανομή Poisson με συνάρτηση πιθανότητας

$$P(X = x) = e^{-4}\frac{4^x}{x!}, \quad x = 0, 1, \ldots .$$

Επομένως, έχουμε για την περίπτωση (α)

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - 0{,}0183 - 0{,}0733 = 0{,}9084,$$

που σημαίνει ότι είναι σχεδόν βέβαιο ότι το άτομο θα ταξιδέψει.
Για την περίπτωση (β) παίρνουμε

$$\begin{aligned} P(X \geq 5) &= 1 - \sum_{x=0}^{4} P(X = x) = 1 - \sum_{x=0}^{4} e^{-4}\frac{4^x}{x!} \\ &= 1 - 0{,}0183 - 0{,}0733 - 0{,}1465 - 0{,}1954 - 0{,}1954 = 0{,}3711, \end{aligned}$$

που σημαίνει ότι υπάρχει αρκετά μεγάλη πιθανότητα το άτομο να ταξιδέψει.