Ενότητα 3

Ορισμός Πιθανότητας

Ο κλασικός ορισμός της πιθανότητας αφορά πεπερασμένους δειγματικούς χώρους και διατυπώθηκε αρχικά από τον De Moivre (1711) ως εξής:

Η πιθανότητα της πραγματοποίησης ενός ενδεχομένου είναι το πηλίκο με αριθμητή τον αριθμό των περιπτώσεων ευνοϊκών για την πραγματοποίηση του ενδεχομένου τούτου και παρονομαστή το συνολικό αριθμό των περιπτώσεων με την προϋπόθεση ότι όλες οι περιπτώσεις είναι εξίσου πιθανές (ισοπίθανες).

Ας θεωρήσουμε έναν πεπερασμένο δειγματικό χώρο Ω του οποίου τα στοιχεία (δειγματικά σημεία), είναι εξίσου πιθανά (ισοπίθανα) και ένα οποιοδήποτε ενδεχόμενο A (ως προς το δειγματικό χώρο Ω). Η *πιθανότητα* του A, συμβολιζόμενη με $P(A)$, δίνεται από τη σχέση

$$P(A) = \frac{N(A)}{N}, \tag{1}$$

όπου $N(A)$ είναι ο αριθμός των στοιχείων του ενδεχομένου A και $N \equiv N(\Omega)$ είναι ο αριθμός των στοιχείων του δειγματικού χώρου Ω. Η συνάρτηση $P(A)$ η οποία σε κάθε ενδεχόμενο $A \in \mathcal{A}$ αντιστοιχεί τον αριθμό (1) είναι

(α) *μη αρνητική*: $P(A) \geq 0$, για κάθε ενδεχόμενο $A \subseteq \Omega$,

(β) *νορμαλισμένη*: $P(\Omega) = 1$,

(γ) *προσθετική*: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, για οποιαδήποτε ξένα (αμοιβαίως αποκλειόμενα) ενδεχόμενα $A \subseteq \Omega$ και $B \subseteq \Omega$.

Ο Richard Von Mises (1883-1953) διατύπωσε τον ακόλουθο ορισμό της πιθανότητας.
Ας υποθέσουμε ότι ένα στοχαστικό πείραμα ή φαινόμενο, με δειγματικό χώρο Ω, μπορεί να εκτελεσθεί κάτω από τις ίδιες συνθήκες απεριόριστο αριθμό φορών και ας θεωρήσουμε ένα οποιοδήποτε ενδεχόμενο A.
Έστω ότι σε υ εκτελέσεις του στοχαστικού αυτού πειράματος ή φαινομένου το ενδεχόμενο A έχει πραγματοποιηθεί $n_\upsilon(A)$ φορές.
Αν υπάρχει το όριο της σχετικής συχνότητας $n_\upsilon(A)/\upsilon$ όταν το υ τείνει στο άπειρο τούτο ορίζει, σύμφωνα με τον Von Mises, την πιθανότητα του ενδεχομένου A,

$$P(A) = \lim_{\upsilon \to \infty} \frac{n_\upsilon(A)}{\upsilon}.$$

Η πιθανότητα αυτή αναφέρεται ως **εμπειρική ή στατιστική πιθανότητα**.

Αξιωματική Θεμελίωση Πιθανότηατς

Έστω Ω δειγματικός χώρος στοχαστικού (τυχαίου) πειράματος (ή φαινομένου).
Μία συνάρτηση, η οποία σε κάθε ενδεχόμενο $A \subseteq \Omega$ αντιστοιχεί (εκχωρεί) έναν πραγματικό αριθμό $P(A)$, καλείται πιθανότητα αν ικανοποιεί τα αξιώματα (ιδιότητες):
(α) *μη αρνητικότητας:* $P(A) \geq 0$, *για κάθε ενδεχόμενο* $A \subseteq \Omega$,
(β) *νορμαλισμού:* $P(\Omega) = 1$, *και*

(γ′) *προσθετικότητας:*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B),$$

για οποιαδήποτε ξένα ενδεχόμενα $A \subseteq \Omega$ και $B \subseteq \Omega$, από το οποίο συνάγεται επαγωγικά η σχέση

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_\upsilon) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_\upsilon),$$

για οποιαδήποτε κατά ζεύγη ξένα ενδεχόμενα $A_i \subseteq \Omega$, $i = 1, 2, \ldots, \upsilon$.

Σημειώνουμε ότι ο αξιωματικός ορισμός της πιθανότητας δεν καθορίζει κάποια έκφραση (τύπο) υπολογισμού της (συνάρτησης) πιθανότητας $P(A)$ για κάθε ενδεχόμενο $A \subseteq \Omega$. Απλώς περιορίζεται στον καθορισμό των συνθηκών που πρέπει να ικανοποιεί η συνάρτηση $P(A)$, $A \subseteq \Omega$, για να είναι πιθανότητα.

Παράδειγμα 1

Ας θεωρήσουμε το στοχαστικό πείραμα της ρίψης ενός κύβου. Καταγράφοντας την ένδειξη της επάνω έδρας του κύβου, ο δειγματικός χώρος του στοχαστικού αυτού πειράματος είναι το σύνολο

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

με $N = N(\Omega) = 6$ δειγματικά σημεία.

Στην περίπτωση συνήθους κύβου, ο οποίος είναι συμμετρικός και *κατασκευασμένος από ομοιογενές υλικό, όλες οι έδρες έχουν την ίδια πιθανότητα εμφάνισης:*

$$p_j = P(\{j\}) = \frac{1}{6}, \quad j = 1, 2, \ldots, 6.$$

Η πιθανότητα οποιουδήποτε ενδεχομένου A δίνεται τότε από τον τύπο

$$P(A) = \frac{N(A)}{6},$$

της κλασικής πιθανότητας.
Έτσι, αν A είναι το ενδεχόμενο εμφάνισης αριθμού μεγαλυτέρου ή ίσου του 5, τότε $A = \{5, 6\}$ και $N(A) = 2$, οπότε

$$P(A) = \frac{1}{3}.$$

Θεώρημα

(α) Αν A' είναι το συμπλήρωμα ενός ενδεχομένου A ως προς το δειγματικό χώρο Ω, τότε

$$P(A') = 1 - P(A).$$

(β) Αν $A \subseteq \Omega$ και $B \subseteq \Omega$ είναι οποιαδήποτε ενδεχόμενα, τότε

$$P(A - B) = P(A) - P(AB)$$

$$P(A - B) = P(A) - P(B), \quad \text{για } \; B \subseteq A.$$

(γ) Αν $A \subseteq \Omega$ και $B \subseteq \Omega$ είναι οποιαδήποτε ενδεχόμενα, τότε

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

$$P(A'B') = 1 - P(A) - P(B) + P(AB).$$