



Πανεπιστήμιο Δυτικής Αττικής

Σχολή Μηχανικών – Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών



ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΕΡΕΥΝΑ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥ

1.2 ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ (ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX – SOLVER EXCEL)

Δρ. Ισαάκ Βρυζίδης

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. Επίλυση προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού με το Solver του Excel
2. Τεχνική SIMPLEX

Ενότητα 1



ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΕ ΤΟ SOLVER ΤΟΥ EXCEL

1. Επίλυση με το SOLVER του EXCEL

Οδηγίες για την δημιουργία μοντέλου Γραμμικού Προγραμματισμού στο EXCEL

Μια καλή πρακτική που μπορεί να ακολουθηθεί για τη **δημιουργία ενός μοντέλου Γραμμικού Προγραμματισμού** σε ένα φύλλο εργασίας του EXCEL περιλαμβάνει:

1. Καταχώριση των **μεταβλητών του προβλήματος** σε μία περιοχή του φύλλου εργασίας (Άγνωστοι).
2. Καταχώριση όλων **των δεδομένων του προβλήματος** σε μία άλλη διαφορετική περιοχή του φύλλου εργασίας.
3. Καταχώριση μαθηματικού τύπου (ή τύπων) που θα υπολογίζει (ουν) τις **ποσότητες που υπόκεινται σε περιορισμούς** με βάση τις τιμές των μεταβλητών.
4. Καταχώριση μαθηματικού τύπου (ή τύπων) που να καταλήγει (ουν) στον υπολογισμό του τελικού αποτελέσματος (τιμή της **αντικειμενικής συνάρτησης**), το οποίο θα υπολογίζεται άμεσα ή έμμεσα από τις τιμές των μεταβλητών.

Παρακάτω δίνονται οδηγίες για το πρόβλημα παραγωγής που αφορούσε τις πόρτες και τα παράθυρα.

1. Επίλυση με τον SOLVER του EXCEL

	A	B	C	D	E
1	ΑΓΝΩΣΤΟΙ				
2	Πόρτες	X			
3	Παράθυρα	Y			
4	ΔΕΔΟΜΕΝΑ				
5		Πόρτες	Παρά - θυρα	Διαθεσιμότητα Ωρών	
6	Ώρες Σιδηρουργείο	4	2	600	
7	Ώρες Βαφείο	2	2	480	
8	ΚΕΡΔΟΣ/ ΠΡΟΪΟΝ	80	60		
9	Υπολογισμός Περιορισμών				
10	ΣΥΝΘΗΚΗ 1		<=		
11	ΣΥΝΘΗΚΗ 2		<=		
12	ΣΥΝΘΗΚΗ 3		>=		
13	ΣΥΝΘΗΚΗ 4		>=		
14					
15	ΑΝΤ. ΣΥΝΑΡΤ.				

Στα κελιά C2 και C3 είναι τα κελιά υπολογισμού των μεταβλητών απόφασης του προβλήματος. Αναζητάμε τον βέλτιστο ζεύγος (X, Y) που να μεγιστοποιεί το κέρδος. Προσοχή! Αυτά τα κελιά δεν πρέπει να εξαρτώνται από άλλα κελιά

Δεδομένα Προβλήματος

Στα κελιά D10, D11, D12 και D13 υπολογίζονται τα δεξιά μέρη των εξισώσεων των περιορισμών. Συγκεκριμένα:
D10: = D6, D11: = D7,
D12: =0, D13: =0

Στα κελιά B10, B11, B12 και B13 υπολογίζουμε τα αριστερά μέλη των περιορισμών.

Συγκεκριμένα:

$$\begin{aligned} \mathbf{B10:} &= \mathbf{C2*B6+C3*C6}, & \mathbf{B11:} &= \mathbf{C2*B7+C3*C7} \\ \mathbf{B12:} &= \mathbf{C2}, & \mathbf{B13:} &= \mathbf{C3} \end{aligned}$$

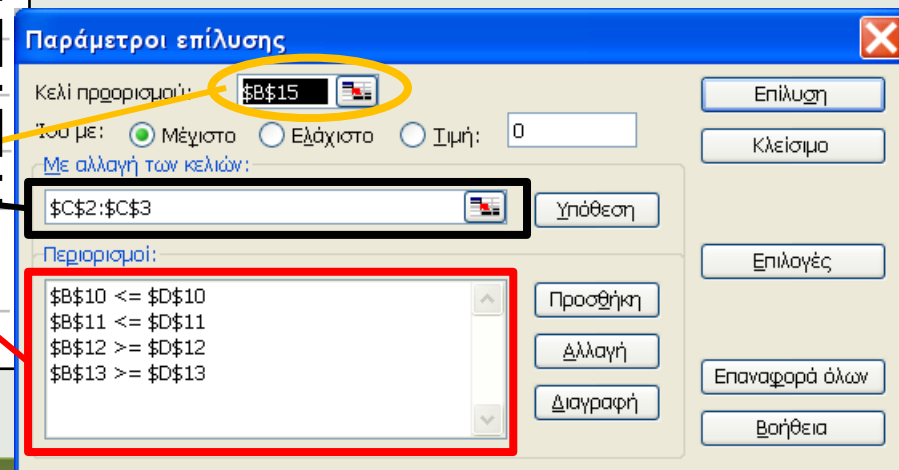
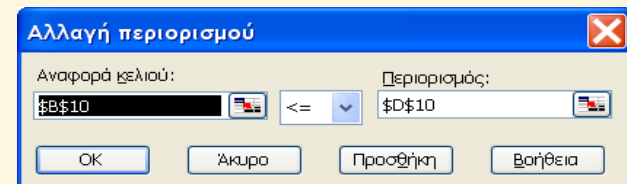
Η Αντικειμενική Συνάρτηση
=B8*C2+C8*C3

1. Επίλυση με τον SOLVER του EXCEL

	A	B	C	D	E
1	ΑΓΝΩΣΤΟΙ				
2	Πόρτες	X			
3	Παράθυρα	Y			
4	ΔΕΔΟΜΕΝΑ				
5		Πόρτες	Παράθυρα	Διαθεσιμότητα Ωρών	
6	Ώρες Σιδηρ.	4	2	600	
7	Ώρες Βαφείο	2	2	480	
8	ΚΕΡΔΟΣ/ ΠΡΟΪΟΝ	80	60		
9	Υπολογισμός Περιορισμών				
10	ΣΥΝΘ. 1	0	<=	600	
11	ΣΥΝΘ. 2	0	<=	480	
12	ΣΥΝΘ. 3	0	>=	0	
13	ΣΥΝΘ. 4	0	>=	0	
14					
15	ΑΝΤ. ΣΥΝΑΡΤ.	0			

Καλούμε τον solver (Δεδομένα → Επίλυση).

1. Καταχωρούμε: κελί προορισμού το κελί υπολογισμού της Αντ. Συνάρτησης
2. Επιλέγουμε κατηγορία Προβλήματος: Μέγιστο, Ελάχιστο
3. Με αλλαγή των Κελιών: Τα κελιά με τους Αγνώστους
4. Τις Συνθήκες (Περιορισμοί): Διαχείριση με την Προσθήκη, Αλλαγή, Διαγραφή και εμφάνιση ειδικού διαλόγου



1. Επίλυση με τον SOLVER του EXCEL

Έτσι χρησιμοποιώντας το Solver του Excel προκύπτει η παρακάτω λύση

	A	B	C	D	E
1	ΑΓΝΩΣΤΟΙ				
2	Πόρτες	X	60		
3	Παράθυρα	Y	180		
4	ΔΕΔΟΜΕΝΑ				
5		Πόρτες	Παράθυρα	Διαθεσιμότητα Ωρών	
6	Ώρες Σιδηρουργείο	4	2	600	
7	Ώρες Βαφείο	2	2	480	
8	ΚΕΡΔΟΣ / ΠΡΟΪΟΝ	80	60		
9	Υπολογισμός Περιορισμών				
10	ΣΥΝΘΗΚΗ 1	600	<=	600	
11	ΣΥΝΘΗΚΗ 2	480	<=	480	
12	ΣΥΝΘΗΚΗ 3	60	>=	0	
13	ΣΥΝΘΗΚΗ 4	180	>=	0	
14					
15	ΑΝΤ. ΣΥΝΑΡΤ. (MAX)	15.600			

Ενότητα 2



ΤΕΧΝΙΚΗ SIMPLEX

2. Τεχνική SIMPLEX

Πρόβλημα Παραγωγής

Μια Βιομηχανία που κατασκευάζει μεταλλικές Πόρτες και Παράθυρα χρησιμοποιεί τα δυο τμήματα της (σιδηρουργείο και βαφείο). Η Διαδικασία παραγωγής είναι παρόμοια και για τα δύο προϊόντα της. Για την κατασκευή μιας πόρτας απαιτούνται 4 ώρες στο Σιδηρουργείο και 2 ώρες στο βαφείο. Για κάθε παράθυρο απαιτούνται 2 ώρες στο Σιδηρουργείο και 2 ώρες στο Βαφείο. Για την επόμενη εβδομάδα οι διαθέσιμες ώρες (συνολικά) στο Σιδηρουργείο είναι 600 και στο Βαφείο 480. Για κάθε Πόρτα η Επιχείρηση κερδίζει 80 Ευρώ ενώ για κάθε παράθυρο 60 Ευρώ. Ποια η παραγωγή της σε πόρτες και παράθυρα ώστε να μεγιστοποιηθεί το κέρδος της επιχείρησης;

Να επιλυθεί με την μέθοδο SIMPLEX.

2. Τεχνική SIMPLEX

Μέθοδος για την Αλγεβρική Επίλυση Προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού.

- Για το πρόβλημα παραγωγής

$$\text{Max } (Z = 80x + 60\psi)$$

$$4x + 2\psi \leq 600$$

$$2x + 2\psi \leq 480$$

$$x, \psi \geq 0$$

Η εφαρμογή της μεθόδου Simplex επιβάλλει τη μετατροπή όλων των λειτουργικών περιορισμών που διατυπώνονται με μορφή ανισοτήτων σε ισότητες. Αυτό επιτυγχάνεται εισάγοντας δύο τεχνητές μεταβλητές S_1 και S_2 και το πρόβλημα έχει την μορφή:

$$\text{Max } (80x + 60\psi + \mathbf{0S}_1 + \mathbf{0S}_2)$$

$$4x + 2\psi + \mathbf{S}_1 = 600 \quad \text{ή καλύτερα} \quad 4x + 2\psi + \mathbf{1S}_1 + \mathbf{0S}_2 = 600$$

$$2x + 2\psi + \mathbf{S}_2 = 480 \quad \text{ή καλύτερα} \quad 2x + 2\psi + \mathbf{0S}_1 + \mathbf{1S}_2 = 480$$

$$x, \psi, S_1, S_2 \geq 0$$

2. Τεχνική SIMPLEX

Κατασκευάζουμε τον αρχικό πίνακα SIMPLEX

Κάθε πίνακας Simplex αντιστοιχεί σε μία εφικτή λύση του προβλήματος. Μια προφανής λύση είναι η $x=0, \psi=0$.

Από $4x+2\psi+S_1=600 \Rightarrow S_1=600$ και από $2x+2\psi+S_2=480 \Rightarrow S_2=480$

Οι S_1 και S_2 είναι οι βασικές μεταβλητές (BM) και οι x, ψ ή μη βασικές

Οι συντελεστές των αγνώστων στην αντικειμενική συνάρτηση

Οι συντελεστές των αγνώστων στις εξισώσεις των περιορισμών

Οι Βασικές Μεταβλητές (B.M.) και οι συντελεστές στην Α.Σ.

Z_i προκύπτει από το άθροισμα των γινομένων των συντελεστών των BM με τους συντελεστές των αγνώστων στην αντίστοιχη στήλη

	C_i	80	60	0	0		
C_i		x	ψ	S_1	S_2	B_i	$\Delta M E$
0	S_1	4	2	1	0	600	
0	S_2	2	2	0	1	480	
	Z_i	0	0	0	0	0	
	$C_i - Z_i$	80	60	0	0	0	

2. Τεχνική SIMPLEX

Στην συνέχεια προσδιορίζουμε ποια από τις Βασικές Μεταβλητές θα αντικαταστήσουμε (S1, S2) με μια από τις X, Ψ.

3. Στοιχείο Οδηγός

2. Διαιρούμε τους Συντελεστές B_i με το αντίστοιχο στοιχείο της οδηγού στήλης. Η γραμμή με το μικρότερο λόγο καλείται οδηγός Γραμμή και μας προσδιορίζει την μεταβλητή που θα αντικατασταθεί (S1)

	C_i	80	60	0	0		
C_i		X	Ψ	S1	S2	B_i	ΔΜΕ
0	S1	4	2	1	0	600	$600/4=150$
0	S2	2	2	0	1	480	$480/2=240$
	Z_i	0	0	0	0	0	
	C_i-Z_i	80	60	0	0	0	

1. Βρίσκουμε το μεγαλύτερο θετικό από την γραμμή C_i-Z_i . Η Στήλη ονομάζεται οδηγός στήλη. Άρα η αντίστοιχη μεταβλητή (X) θα αντικαταστήσει μια εκ των S1, S2

2. Τεχνική SIMPLEX

Το επόμενο βήμα είναι η κατασκευή του Νέου Πίνακα SIMPLEX

	Ci	80	60	0	0		
Ci		X	Ψ	S1	S2	Bi	ΔΜΕ
0	S1	4	2	1	0	600	600/4=150
0	S2	2	2	0	1	480	480/2=240
	Zi	0	0	0	0	0	
	Ci-Zi	80	60	0	0	0	

Διαιρούμε τα στοιχεία της οδηγού γραμμής με το οδηγό στοιχείο: $4/4=1$, $2/4=1/2$, $1/4$, $0/4=0$, $600/4=150$ και στις Β.Μ. η S1 Αντικαθιστάται από την X

	Ci	80	60	0	0		
Ci		X	Ψ	S1	S2	Bi	ΔΜΕ
80	X	1	1/2	1/4	0	150	
0	S2						
	Zi						
	Ci-Zi						

2. Τεχνική SIMPLEX

Κατασκευάζουμε τον Νέο Πίνακα SIMPLEX (βήμα 2)

	Ci	80	60	0	0		
Ci		X	Ψ	S1	S2	Bi	ΔΜΕ
0	S1	4	2	1	0	600	600/4=150
0	S2	2	2	0	1	480	480/2=240
	Zi	0	0	0	0	0	
	Ci-Zi	80	60	0	0	0	

Για τις άλλες γραμμές:

$$\begin{bmatrix} \text{Νέες} \\ \text{τιμές} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Προηγούμενες} \\ \text{τιμές} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \text{Στοιχείο σειράς} \\ \text{στην οδηγό στηλη} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \text{Τιμές νέας} \\ \text{οδηγού σειράς} \end{bmatrix}$$

Άρα: $2-2*1=0$, $2-2*1/2=1$, $0-2*1/4=0-1/2=-1/2$, $1-2*0=1$, $480-2*150=180$

	Ci	80	60	0	0		
Ci		X	Ψ	S1	S2	Bi	ΔΜΕ
80	X	1	1/2	1/4	0	150	
0	S2	0	1	-1/2	1	180	
	Zi						
	Ci-Zi						

2. Τεχνική SIMPLEX

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τα Z_i , $C_i - Z_i$

	C_i	80	60	0	0		
C_i	X	Ψ	S1	S2	B_i	$\Delta M E$	
80	X	1	1/2	1/4	0	150	
0	S2	0	1	-1/2	1	180	
	Z_i						
	$C_i - Z_i$						

1. Υπολογίζουμε Z_i
 Σε κάθε στήλη προσθέτουμε το γινόμενο των συντελεστών των Βασικών Μεταβλητών με τα αντίστοιχα στοιχεία της στήλης
 $80 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 80$,
 $80 \cdot 1/2 + 0 \cdot 1 = 40$,
 $80 \cdot 1/4 + 0 \cdot (-1/2) = 20$,
 $80 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$

	C_i	80	60	0	0		
C_i	X	Ψ	S1	S2	B_i	$\Delta M E$	
80	X	1	1/2	1/4	0	150	
0	S2	0	1	-1/2	1	180	
	Z_i	80	40	20	0	12000	
	$C_i - Z_i$	0	20	-20	0		

2. Υπολογίζουμε $C_i - Z_i$
 $80 - 80 = 0$,
 $60 - 40 = 20$,
 $0 - 20 = -20$,
 $0 - 0 = 0$

Υπολογίζουμε Z
 Με λύση $\Psi = 0$, $S1 = 0$,
 $X = 150$, $S2 = 180$
 $Z = 80 \cdot 150 + 60 \cdot 0 = 12000$

2. Τεχνική SIMPLEX

Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία όσο υπάρχει $C_i - Z_i > 0$

	C_i	80	60	0	0		
C_i		X	Ψ	S1	S2	B_i	$\Delta M E$
80	X	1	1/2	1/4	0	150	$150 / (1/2) = 300$
0	S2	0	1	-1/2	1	180	$180 / 1 = 180$
	Z_i	80	40	20	0	12000	
	$C_i - Z_i$	0	20	-20	0		

1. Βρίσκουμε το μεγαλύτερο θετικό $C_i - Z_i$. Η Στήλη ονομάζεται οδηγός στήλη. Η αντίστοιχη μεταβλητή (Ψ) θα αντικαταστήσει μια εκ των X, S2

3. Στοιχείο Οδηγός

2. Διαιρούμε τους Συντελεστές B_i με το αντίστοιχο στοιχείο της οδηγού στήλης. Η γραμμή με το μικρότερο λόγο καλείται οδηγός Γραμμή και μας προσδιορίζει την μεταβλητή που θα αντικατασταθεί (S2)

2. Τεχνική SIMPLEX

	Ci	80	60	0	0		
Ci	X	ψ	S1	S2	Bi		ΔΜΕ
80	X	1	1/2	1/4	0	150	150
0	S2	0	1	-1/2	1	180	180
	Zi	80	40	20	0	12000	
	Ci-Zi	0	20	-20	0		

Διαιρούμε τα στοιχεία της οδηγού γραμμής με το οδηγό στοιχείο $0/1=0$, $1/1=1$, $(-1/2)/1=-1/2$ $1/1=1$, $180/1=180$ και στις Β.Μ. η S2 Αντικαθιστάται από την ψ

	Ci	80	60	0	0		
Ci	X	ψ	S1	S2	Bi		ΔΜΕ
80	X						
60	ψ	0	1	-1/2	1	180	
	Zi						
	Ci-Zi						

2. Τεχνική SIMPLEX

	Ci	80	60	0	0		
Ci		X	Ψ	S1	S2	Bi	ΔΜΕ
80	X	1	1/2	1/4	0	150	150
60	Ψ	0	1	-1/2	1	180	180
	Zi	80	40	20	0	12000	
	Ci-Zi	0	20	-20	0		

Για τις άλλες γραμμές:

$$\begin{bmatrix} \text{Νέες} \\ \text{τιμές} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Προηγούμενες} \\ \text{τιμές} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \text{Στοιχείο σειράς} \\ \text{στην οδηγό στήλη} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \text{Τιμές νέας} \\ \text{οδηγού σειράς} \end{bmatrix}$$

Άρα: $1 - 1/2 \cdot 0 = 1$, $1/2 - 1/2 \cdot 1 = 0$, $1/4 - 1/2 \cdot (-1/2) = 1/4 + 1/4 = 1/2$, $0 - 1/2 \cdot 1 = -1/2$, $150 - 1/2 \cdot 180 = 150 - 90 = 60$

	Ci	80	60	0	0		
Ci		X	Ψ	S1	S2	Bi	ΔΜΕ
80	X	1	0	1/2	-1/2	60	
60	Ψ	0	1	-1/2	1	180	
	Zi						
	Ci-Zi						

2. Τεχνική SIMPLEX

Τελικός Πίνακας Simplex

	Ci	80	60	0	0		
Ci		X	Y	S1	S2	Bi	ΔΜΕ
80	X	1	0	1/2	-1/2	60	
60	ψ	0	1	-1/2	1	180	
	Zi	80	60	10	20	15600	
	Ci-Zi	0	0	-10	-20		

1. Υπολογίζουμε Zi

Σε κάθε στήλη προσθέτουμε το γινόμενο των συντελεστών των Βασικών Μεταβλητών με τα αντίστοιχα στοιχεία της στήλης

$$80 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 80,$$

$$80 \cdot 0 + 60 \cdot 1 = 60,$$

$$80 \cdot 1/2 + 60 \cdot (-1/2) = 10, \quad 80 \cdot (-1/2) + 60 \cdot 1 = 20$$

2. Υπολογίζουμε Ci-Zi

$$80 - 80 = 0,$$

$$60 - 60 = 0,$$

$$0 - 10 = -10,$$

$$0 - 20 = -20.$$

Κανένα Θετικό.

Βέλτιστη Λύση

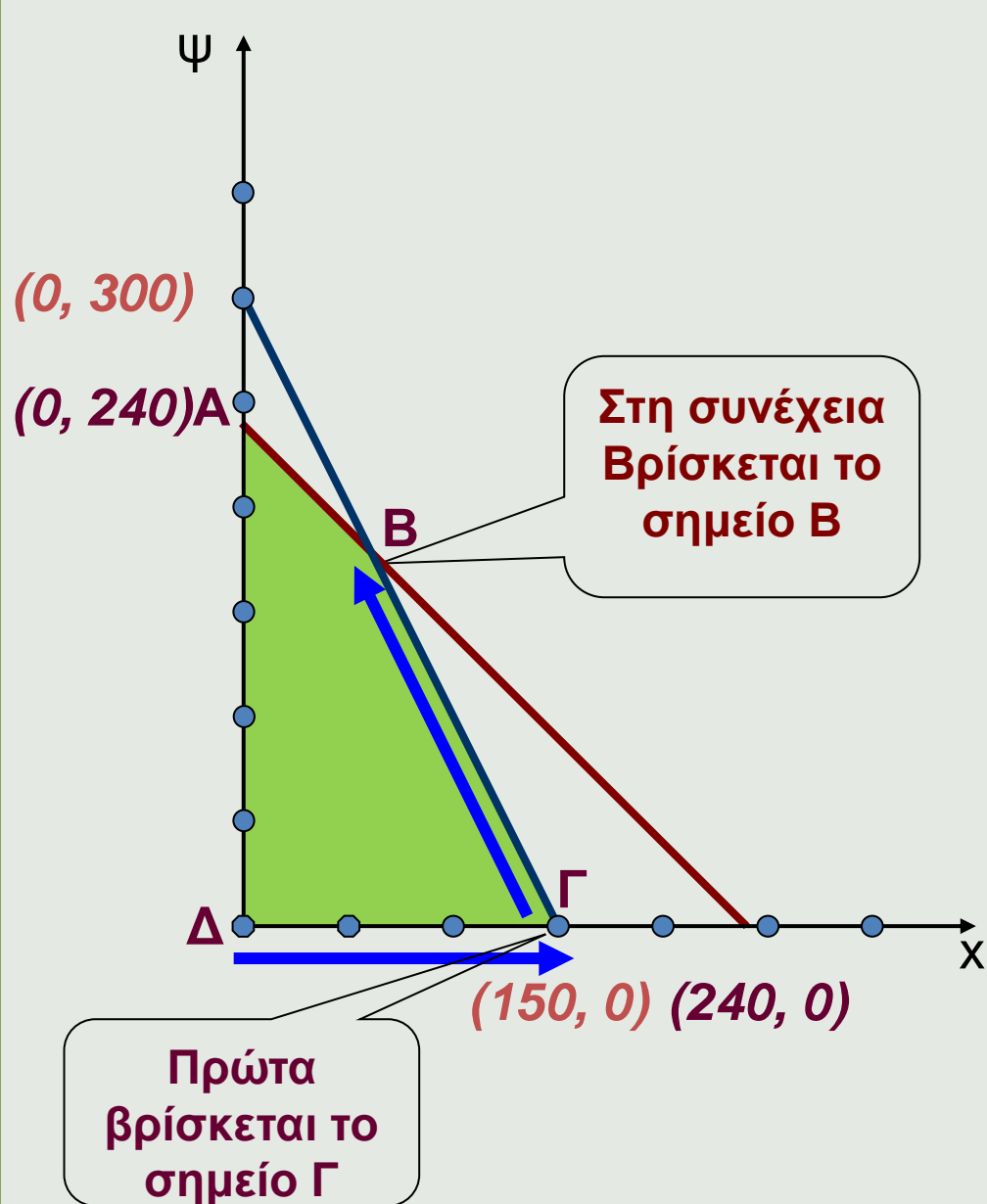
3. Υπολογίζουμε Z

Με $S1=0$, $S2=0$ έχουμε

$$X=60, \quad Y=180$$

$$Z=80 \cdot 60 + 60 \cdot 180 = 15600$$

2. Τεχνική SIMPLEX



Η SIMPLEX ξεκινά από την λύση $(0,0)$ και διαγράφει το πολύγωνο (πολύεδρο) μέχρι να βρεθεί η βέλτιστη.

Στο παράδειγμά μας ξεκινά από το $\Delta(0,0)$ – στον πρώτο κύκλο προσεγγίζεται το $\Gamma(150,0)$ και στον δεύτερο κύκλο το $B(60, 180)$ που είναι η Βέλτιστη λύση

ΤΕΛΟΣ



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ