Πανεπιστήμιο Δυτικής Αττικής
Σχολή Μηχανικών – Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΕΡΕΥΝΑ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥ

2. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΛΑΧΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

Δρ. Ισαάκ Βρυζίδης

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. Προβλήματα Ελαχιστοποίησης
2. Παράδειγμα επίλυσης προβλήματος ελαχιστοποίησης με την Μέθοδο Simplex.
3. Ειδικές περιπτώσεις προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού

   Α) Προβλήματα με μη εφικτές λύσεις

   Β) Προβλήματα με μη φραγμένο σύνολο εφικτών λύσεων

   Γ) Προβλήματα με πολλαπλές βέλτιστες λύσεις

Ενότητα 1

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΛΑΧΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

1. Προβλήματα Ελαχιστοποίησης

- Μέχρι τώρα έχουν παρουσιαστεί αναλυτικά **προβλήματα μεγιστοποίησης** της αντικειμενικής συνάρτησης με περιορισμούς **« ≤ »**.
- Η άλλη μεγάλη κατηγορία προβλημάτων είναι τα **προβλήματα ελαχιστοποίησης** της αντικειμενικής συνάρτησης με περιορισμούς **« ≥ » ή « = ».**
- Τα γραμμικά προγράμματα τα οποία περιέχουν περιορισμούς με πρόσημο « ≥ » ή « = » **δεν παρέχουν συνήθως εξαρχής τη δυνατότητα σχηματισμού μιας πρώτης βάσης (αρχικός πίνακας Simplex),** αφού στους περιορισμούς του τύπου « ≥ » η μεταβλητή απόκλισης έχει αρνητικό πρόσημο ($-S_1$), ενώ στους περιορισμούς του τύπου « = » δεν εισάγεται καθόλου μεταβλητή απόκλισης.
- Στην περίπτωση αυτή, εισάγεται για κάθε τέτοιο περιορισμό μια τεχνητή μεταβλητή (artificial variable) με θετικό πρόσημο (A1) για να μπορέσουμε να έχουμε μια αρχική εφικτή λύση. Η τεχνητή μεταβλητή δεν έχει φυσική ερμηνεία και για αυτόν ακριβώς το λόγο όταν τελειώσει ο αλγόριθμος SIMPLEX πρέπει να ισούται με 0.

1. Προβλήματα Ελαχιστοποίησης

Πως μπορούμε να υποχρεώσουμε την Α1 να λάβει την τιμή 0; Χρησιμοποιώντας την τεχνική του μεγάλου Μ.

- Σύμφωνα με αυτήν οι τεχνητές μεταβλητές παίρνουν συντελεστές στην αντικειμενική συνάρτηση ίσους με Μ (για προβλήματα ελαχιστοποίησης) ή –Μ (για προβλήματα μεγιστοποίησης), όπου Μ ένας πολύ μεγάλος αριθμός. Οι πράξεις γίνονται σύμφωνα με τους κανόνες του αλγορίθμου, αλλά αντί για αριθμητικό αποτέλεσμα έχουμε **μια αλγεβρική παράσταση όπου ένας από τους όρους είναι πολλαπλάσιο του Μ**.
- Κατά την διαδικασία της βελτιστοποίησης οι τεχνητές μεταβλητές **θα εξέλθουν σύντομα από τη βάση παίρνοντας την τιμή μηδέν**. Κάτι τέτοιο συνεπάγεται και την οριστική απαλοιφή τους. Γενικότερα, όσο οι τεχνητές μεταβλητές παίρνουν τιμή και άρα ο αριθμός Μ παραμένει στην αντικειμενική συνάρτηση, η τιμή της είναι μεγαλύτερη από οποιαδήποτε άλλη πραγματική τιμή.

Ενότητα 2

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

2. Παράδειγμα Ελαχιστοποίησης

Παράδειγμα

Στη διατροφή των ζώων μιας φάρμας θα πρέπει να περιλαμβάνονται 2 θρεπτικά συστατικά (Α, Β). Στη αγορά υπάρχουν διαθέσιμες τρεις ζωοτροφές (Κ, Λ και Μ) με κόστος ανά κιλό 2 €, 1,4 και 1,6 €. Η περιεκτικότητα (%) σε θρεπτικά συστατικά των ζωοτροφών Κ και Λ.

Στη δίαιτα των ζώων θα πρέπει να περιλαμβάνεται στην τροφή τους τουλάχιστον 25% Α και 30% Β.

Η φάρμα θέλει να προμηθευτεί 1000 κιλά τροφής.

Αντικείμενο είναι η ελαχιστοποίηση του κόστους.

	Περιεκτικότητα σε Α	Περιεκτικότητα σε Β
Ζωοτροφή Κ	30%	30%
Ζωοτροφή Λ	20%	20%
Ζωοτροφή Μ	20%	30%

2. Παράδειγμα Ελαχιστοποίησης

Μοντελοποίηση του Προβλήματος

X1: Κιλά Ζωοτροφής Κ

X2: Κιλά Ζωοτροφής Λ

X3: Κιλά Ζωοτροφής Μ

Αντικειμενική Συνάρτηση: Min(2X1 + 1,4*X2 + 1,6X3)

<u>Συνθήκες</u>

Τροφή = 1000 δηλαδή **X1 + X2 + X3 = 1000**

Θρ.Συστ Α ≥ 25%*1000 δηλαδή **0,3X1 + 0,2X2 + 0,2X3 ≥ 250**

Θρ.Συστ Β ≥ 30%*1000 δηλαδή **0,3X1 + 0,2X2 + 0,3X3 ≥ 300**

X1, X2, X3 ≥ 0

2. Παράδειγμα Ελαχιστοποίησης

1. Εισαγωγή μεταβλητών S1, S2

$$\text{Min}(2X1 + 1{,}4X2 + 1{,}6X3)$$

$$\begin{aligned}
X1 + X2 + X3 &= 1000 \\
30X1 + 20X2 + 20X3 - S1 &= 25000 \\
30X1 + 20X2 + 30X3 - S2 &= 30000 \\
X1, X2, X3, S1, S2 &\geq 0
\end{aligned}$$

Διαφοροποίηση από τα προβλήματα μεγιστοποίησης

2. Χρησιμοποιούμε τεχνητές μεταβλητές A1, A2, A3 και έναν πολύ μεγάλο αριθμό Μ.

$$\text{Min}(2X1 + 1{,}4X2 + 1{,}6X3 + 0S1 + 0S2 + MA1 + MA2 + MA3)$$

$$\begin{aligned}
X1 + X2 + X3 + A1 &= 1000 \\
30X1 + 20X2 + 20X3 - S1 + A2 &= 25000 \\
30X1 + 20X2 + 30X3 - S2 + A3 &= 30000 \\
X1, X2, X3, S1, S2, A1, A2, A3 &\geq 0
\end{aligned}$$

2. Παράδειγμα Ελαχιστοποίησης

Μια προφανής λύση

X1=0, X2=0, X3=0, S1=0, S2=0, A1=1000, A2= 25000, A3= 30000

Βασικές Μεταβλητές A1, A2, A3

Ο Πίνακας SIMPLEX

Ακολουθούμε τα ίδια βήματα με το πρόβλημα μεγιστοποίησης. Η διαφορά είναι στο ότι η οδηγός στήλη επιλέγεται αυτή με το μικρότερο Ci-Zi, Οδηγός γραμμή αυτή με το μικρότερο λόγο και η λύση επιτυγχάνεται όταν Ci-Zi >0.

	Ci	**2**	**1,4**	**1,6**	**0**	**0**	**M**	**M**	**M**	
		X1	**X2**	**X3**	**S1**	**S2**	**A1**	**A2**	**A3**	Bi
M	**A1**	1	1	1	0	0	1	0	0	1000
M	**A2**	30	20	20	-1	0	0	1	0	25000
M	**A3**	30	20	30	0	-1	0	0	1	30000
	ZI	61M	41M	51M	-M	-M	M	M	M	
	Ci-Zi	2-61M	1,4-41M	1,6-51M	M	M	-M	-M	-M	

Βρίσκουμε το μικρότερο Ci-Zi.
Διαφοροποίηση από πρόβλημα Μεγιστοποίησης

2. Παράδειγμα Ελαχιστοποίησης

	Ci	2	1,4	1,6	0	0	M	M	M		
		X1	**X2**	**X3**	**S1**	**S2**	**A1**	**A2**	**A3**	Bi	**ΔΜΕ**
M	**A1**	1	1	1	0	0	1	0	0	1000	1000
M	**A2**	30	20	20	-1	0	0	1	0	25000	833,3333
M	**A3**	30	20	30	0	-1	0	0	1	30000	1000
	ZI	61M	41M	51M	-M	-M	M	M	M		
	Ci-Zi	2-61M	1,4-41M	1,6-51M	M	M	-M	-M	-M		

Βρίσκουμε το μικρότερο Ci-Zi. Οδηγός Στήλη και τη μεταβλητή (X1) που θα ενταχθεί στις βασικές. Διαφοροποίηση από πρόβλημα Μεγιστοποίησης

Βρίσκουμε το μικρότερο

Bi / αντ. Στοιχείο Οδηγού Στήλης

Η Οδηγός Γραμμή καθορίζει τη βασική μεταβλητή που θα αντικατασταθεί.

2. Παράδειγμα Ελαχιστοποίησης

	Ci	2	1,4	1,6	0	0	M	M	M		
		X1	X2	X3	S1	S2	A1	A2	A3	Bi	ΔΜΕ
M	A1	0	0,3333	0,3333	0,0333	0	1	-0,03	0	166,6667	
2	X1	1,00	0,67	0,67	-0,03	0,00	0,00	0,03	0,00	833,33	
M	A3	0	0	10	1	-1	0	-1	1	500	
	ZI										
	Ci-Zi										

Διαιρούμε τα στοιχεία της οδηγού γραμμής με το οδηγό στοιχείο 30/30=1, …και στις Β.Μ η Α2 Αντικαθιστάται από την Χ1

Για τις άλλες γραμμές από το κάθε στοιχείο αφαιρείται το αντίστοιχο στοιχείο της οδηγού στήλης πολλαπλασιασμένο με τη νέα τιμή του αντίστοιχου στοιχείου της οδηγού γραμμής.

2. Παράδειγμα Ελαχιστοποίησης

	Ci	2	1,4	1,6	0	0	M	M	M	
		X1	X2	X3	S1	S2	A1	A2	A3	Bi
M	A1	0	0,3333	0,3333	0,033	0	1	-0,0333	0	166,67
2	X1	1	0,67	0,67	-0,03	0	0	0,03	0	833,33
M	A3	0	0	10	1	-1	0	-1	1	5000
	ZI	2	1,33+0,33M	10,33M+1,334	1,03M-0,6	-M	M	-1,03M+0,06	M	
	Ci-Zi	0	0,067-0,33M	0,267-10,34M	-1,03M+0,6	m	0	2,03M-0,06	0	

2. Παράδειγμα Ελαχιστοποίησης

	Ci	**2**	**1,4**	**1,6**	**0**	**0**	**M**	**M**	**M**		
		X1	**X2**	**X3**	**S1**	**S2**	**A1**	**A2**	**A3**	Bi	**ΔΜΕ**
M	**A1**	0	0,3333333	0,333333333	0,033333333	0	1	-0,033333333	0	166,6667	500
2	**X1**	1,00	0,67	0,67	-0,03	0,00	0,00	0,03	0,00	833,33	1250
M	**A3**	0	0	10	1	-1	0	-1	1	5000	500
	ZI	2	1,3333+0,333M	10,3333M +1,3334	1,0333M -0,6	-M	M	-1,0333M +0,06	M		
	Ci-Zi	0	0,0667-0,333M	0,2667-10,334M	-1,0033m +0,6	M	0	2,0333M -0,06	0		

Υπολογίζουμε Zi και Ci-Zi

Βρίσκουμε Οδηγό Στήλη – Οδηγό Γραμμή και Οδηγό Στοιχείο

Στις Βασικές μεταβλητές θα εισαχθεί η X3 στη θέση της A3

Επαναλαμβάνουμε τα βήματα

2. Παράδειγμα Ελαχιστοποίησης

	Ci	2	1,4	1,6	0	0	M	M	M		
		X1	**X2**	**X3**	**S1**	**S2**	**A1**	**A2**	**A3**	Bi	**ΔΜΕ**
M	**A1**	0	0,3333333	0	0	0,033333	1	0	-0,0333333	0	
2	**X1**	1,00	0,67	0,00	-0,10	0,07	0,00	0,10	-0,07	500,00	
1,6	**X3**	0	0	1	0,1	-0,1	0	-0,1	0,1	500	
	ZI										
	Ci-Zi										

Υπολογίζουμε Zi και Ci-Zi

Βρίσκουμε Οδηγό Στήλη – Οδηγό Γραμμή και Οδηγό Στοιχείο

Στις Βασικές μεταβλητές θα εισαχθεί η X3 στη θέση της A3

Επαναλαμβάνουμε τα βήματα

2. Παράδειγμα Ελαχιστοποίησης

	Ci	2	1,4	1,6	0	0	M	M	M		
		X1	**X2**	**X3**	**S1**	**S2**	**A1**	**A2**	**A3**	Bi	**ΔΜΕ**
M	**A1**	0	0,3333333	0	0	0,033333	1	0	-0,0333333	0	0
2	**X1**	1,00	0,67	0,00	-0,10	0,07	0,00	0,10	-0,07	500	750
1,6	**X3**	0	0	1	0,1	-0,1	0	-0,1	0,1	500	
	ZI	2	0,333M +1,3334	1,6	-0,04	0,0333M -0,02	M	0,04	-0,0333M -0,14+0,16		
	Ci-Zi	0	-0,333M +0,0667	0	0,04	0,02 -0,033M	0	M -0,04	0,9666M +0,03		

Υπολογίζουμε Zi και Ci-Zi

Βρίσκουμε Οδηγό Στήλη – Οδηγό Γραμμή και Οδηγό Στοιχείο

Στις Βασικές μεταβλητές θα εισαχθεί η Χ2 στη θέση της Α1

Επαναλαμβάνουμε τα βήματα

2. Παράδειγμα Ελαχιστοποίησης

	Ci	2	1,4	1,6	0	0	M	M	M		
		X1	**X2**	**X3**	**S1**	**S2**	**A1**	**A2**	**A3**	Bi	**ΔΜΕ**
1,4	**X2**	0	1	0	0	0,1				0	
2	**X1**	1,00	0,00	0,00	-0,10	0,00				500,00	
1,6	**X3**	0	0	1	0,1	-0,1				500	
	ZI	2	1,4	1,6	-0,04	- 0,02					
	Ci-Zi	0	0	0	0,04	0,02					

Τελικός Πίνακας

X1=500, X2=0, X3=500

Ενότητα 3

ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

3. Ειδικές περιπτώσεις προβλημάτων Γ.Π.

Α) Προβλήματα με μη εφικτές λύσεις (1)

Πως διαπιστώνεται η έλλειψη εφικτών λύσεων στη μέθοδο Simplex;

Κατά την εφαρμογή του αλγορίθμου Simplex σε κάποιο βήμα της διαδικασίας θα ικανοποιούνται οι συνθήκες βελτιστοποίησης, ενώ *στη βάση θα παραμένει τουλάχιστον μια τεχνητή μεταβλητή* που δεν θα έχει αντικατασταθεί ακόμη.

Αυτό μπορεί να οφείλεται σε δύο λόγους:

α) αντικρουόμενες απαιτήσεις ανάμεσα στους περιορισμούς του προβλήματος. Σε αυτή την περίπτωση εξετάζουμε τη δυνατότητα χαλάρωσης κάποιων περιορισμών.

β) Λανθασμένη ή ελλιπής διατύπωση είτε του μαθηματικού μοντέλου είτε των δεδομένων του προβλήματος.

Σημείωση: a) Οι τεχνητές μεταβλητές, που παραμένουν στη βάση, προσδιορίζουν τους περιορισμούς του προβλήματος, οι οποίοι δημιουργούν το πρόβλημα της αδυναμίας ύπαρξης εφικτών λύσεων.

b) Η περίπτωση μη εφικτών λύσεων σε ένα πρόβλημα ΓΠ μπορεί να προκύψει μόνο σε προβλήματα στα οποία είναι αναγκαία η χρήση τεχνητών μεταβλητών.

3. Ειδικές περιπτώσεις προβλημάτων Γ.Π.

Α) Προβλήματα με μη εφικτές λύσεις (2)

Παράδειγμα:

$\min(Z= 90x_1 + 75x_2 + 80x_3)$

υπό τους περιορισμούς

$x_1 + x_2 + x_3 = 1000$

$0{,}40x_1 + 0{,}25x_2 + 0{,}20x_3 \geq 450$

$0{,}60x_1 + 0{,}20x_2 + 0{,}40x_3 \geq 400$

$x_1 , x_2 , x_3 \geq 0$

Στο επόμενο τελικό πίνακα Simplex, ικανοποιείται το κριτήριο βελτιστοποίησης (όλοι οι συντελεστές Ci-Zi ≥ 0), ενώ παραμένει η τεχνητή μεταβλητή A2 στην βάση. Δεν υπάρχει εφικτή λύση.

Τελικός Πίνακας Simplex

	Ci	90	75	80	0	0	M		
Ci		x1	x2	x3	S2	S3	A2	Bi	
0	S3	0	2/5	1/5	0	1	0	200	
M	A2	0	-3/20	-1/5	-1	0	1	50	
90	x1	1	1	1	0	0	0	1000	
	Zi	90	90-(3/20)M	90-(1/5)M	-M	0	M		
	Ci-Zi	0	-15+(3/20)M	-10+(1/5)M	M	0	0		

3. Ειδικές περιπτώσεις προβλημάτων Γ.Π.

Β) Προβλήματα με μη φραγμένο σύνολο εφικτών λύσεων (1)

Πώς διαπιστώνεται η έλλειψη ύπαρξης πεπερασμένης τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης στη μέθοδο Simplex;

Η ύπαρξη του μη φραγμένου συνόλου εφικτών λύσεων διαπιστώνεται όταν σε κάποιο βήμα της διαδικασίας του αλγορίθμου Simplex δεν είναι δυνατόν να προσδιοριστεί ποια βασική μεταβλητή θα αντικατασταθεί. *Αυτό συμβαίνει όταν όλες οι τιμές της οδηγού στήλης είναι αρνητικές ή μηδέν.* Άρα, οι τιμές των βασικών μεταβλητών μπορούν να αυξάνονται απεριόριστα, δηλαδή η περιοχή εφικτών λύσεων δεν είναι φραγμένη και δεν υπάρχει πεπερασμένη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης.

Επειδή κάτι τέτοιο δεν είναι δυνατόν να αντιστοιχεί σε πραγματικές καταστάσεις, το πρόβλημα οφείλεται κατά κανόνα στην παράλειψη ή στη λανθασμένη διατύπωση των περιορισμών του προβλήματος.

Σημείωση: Οι βασικές μεταβλητές με αρνητική τιμή στην οδηγό στήλη δεν λαμβάνονται υπόψη στην επιλογή της βασικής μεταβλητής που θα αντικατασταθεί.

3. Ειδικές περιπτώσεις προβλημάτων Γ.Π.

Β) Προβλήματα με μη φραγμένο σύνολο εφικτών λύσεων (2)

Παράδειγμα:

$\text{Max}(Z = 3x_1 + 5x_2)$

υπό τους περιορισμούς

$4x_1 - 8x_2 \geq 40$

$4x_1 + 3x_2 \geq 315$

$-2x_1 + x_2 \leq 0$

$x_1 , x_2 \geq 0$

Προσδιορίζουμε την οδηγό στήλη (η μεγαλύτερη θετική ποσότητα στην γραμμή Ci-Zi), αλλά όλες οι τιμές των βασικών μεταβλητών (x1,x2,S3) είναι αρνητικές (-0,18, -0,09, -0,27). Αυτό σημαίνει ότι μία αύξηση στην μεταβλητή S2 θα οδηγήσει σε αύξηση των μεταβλητών x1, x2, S3 χωρίς περιορισμό.

Τελικός πίνακας Simplex

	Ci	3	5	0	0	0	-M	-M		
Ci		x1	x2	S1	S2	S3	A1	A2	Bi	
3	x1	1	-8	-0,07	**-0,18**	0	0,07	0,18	60	
2	x2	0	3	0,09	**-0,09**	0	-0,09	0,09	25	
0	S3	0	1	-0,23	**-0,27**	1	0,23	0,27	95	
	Zi	3	2	-0,02	-0,73	0	0,02	0,73	230	
	Ci-Zi	0	0	0,02	0,73	0	-0,02-M	-0,73-M	0	

3. Ειδικές περιπτώσεις προβλημάτων Γ.Π.

Γ) Προβλήματα με πολλαπλές βέλτιστες λύσεις (1)

Πως μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι βρισκόμαστε στην περίπτωση πολλαπλών βέλτιστων λύσεων;

Όταν στον τελικό πίνακα Simplex (ικανοποιείται το κριτήριο βελτιστοποίησης) *υπάρχει τουλάχιστον μια μη βασική μεταβλητή με μηδενική τιμή στη σειρά Ci-Zi*, τότε η λύση που προέκυψε δεν είναι η μοναδική και υπάρχουν άλλα ακρότατα που δίνουν την ίδια βέλτιστη τιμή στην αντικειμενική συνάρτηση.

Αυτή την άλλη βέλτιστη λύση θα μπορούσαμε να την προσδιορίσουμε (εφόσον επιθυμούμε) πραγματοποιώντας μία επιπρόσθετη επανάληψη με την μέθοδο Simplex (επιλέγουμε την μεταβλητή με μηδενική τιμή στη σειρά Ci-Zi για να εισέλθει στην βάση.

Σημείωση: Οι τιμές της σειράς Ci-Zi δηλώνουν την καθαρή μεταβολή στην τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης όταν η συγκεκριμένη μεταβλητή αυξηθεί κατά μία μονάδα.

Special cases in the Simplex Method

Γ) Προβλήματα με πολλαπλές βέλτιστες λύσεις (2)

Παράδειγμα:

$\max(Z = 140x_1 + 105x_2)$

υπό τους περιορισμούς

$8x_1 + 8x_2 \leq 960$

$4x_1 + 2x_2 \leq 400$

$4x_1 + 3x_2 \leq 420$

$x_1 , x_2 \geq 0$

Στην γραμμή Ci-Zi, η τιμή για την μεταβλητή S2 είναι μηδέν. Επομένως, είμαστε στην περίπτωση πολλαπλών βέλτιστων λύσεων.

Τελικός Πίνακας Simplex

	Ci	140	105	0	0	0		
Ci		x1	x2	S1	S2	S3	Bi	
0	S1	0	0	1	2	-4	80	
140	x1	1	0	0	3/4	-1/2	90	
105	x2	0	1	0	-1	1	20	
	Zi	140	105	0	0	35	14700	
	Ci-Zi	0	0	0	**0**	-35		

ΤΕΛΟΣ

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ