ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΓΙΑ ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΕ ΤΟ SOLVER:

1) Προβλήματα Γραμμικού Προγραμματισμού

Μέρος Α)

Ένα εργοστάσιο παραγωγής προκατασκευασμένων δομικών στοιχείων παράγει δύο είδη από οπλισμένο σκυρόδεμα, τα E_1 και E_2 σε μηνιαίες ποσότητες (m^3). Για να κατασκευαστούν αυτά τα στοιχεία απαιτούνται ξυλότυποι 2.0 m^2 και 3.0m^2, καθώς και σιδηρός οπλισμός 50 χγρ. και 70 χγρ. αντίστοιχα. (Όλα για 1 m^3 σκυροδέματος)

Ακόμη οι απαιτούμενες ανθρωποώρες για εργασίες σκυροδέτησης, ξυλότυπου και σιδηρού οπλισμού είναι:

	Σκυρόδεμα (ανθρωποώρες / m^3)	Ξυλότυπος (ανθρωποώρες / m^2)	Σιδηρούς Οπλισμός (ανθρωποώρες / χγρ)
E_1	2.4	0.7	0.024
E_2	1.4	0.6	0.040

Οι μέγιστες δυνατότητες του εργοστασίου σε ανθρωποώρες για ένα μήνα παραγωγής είναι: Σκυροδέτηση 3360, ξυλότυπος 2520, σιδηρός οπλισμός 3360. Ακόμη, η τιμή πώλησης του E_1 είναι 3500€ ανά m^3, ενώ του E_2 είναι 5000€ ανά m^3.

Τέλος, τα μηνιαία έξοδα του εργοστασίου είναι 2,080,000€, ενώ από την πώληση του E_1 μετά την αφαίρεση της αξίας των πρώτων υλών, εισπράττει 1300€ ανά m^3 και από το E_2 1600€ ανά m^3.

Ζητούνται:

1. Να προσδιοριστούν οι βέλτιστες μηνιαίες ποσότητες παραγωγής των E_1 και E_2 με τις οποίες μεγιστοποιούνται οι εισπράξεις του εργοστασίου καθώς και ποιες είναι αυτές οι εισπράξεις.
2. Να προσδιοριστούν οι βέλτιστες μηνιαίες ποσότητες παραγωγής των E_1 και E_2 με τι οποίες μπορεί να λειτουργεί χωρίς ζημιά το εργοστάσιο, έχοντας ελάχιστες δυνατές μηνιαίες εισπράξεις.

Μέρος Β)

1. Ένας μηχανικός πρόκειται να φέρει από το εξωτερικό τόρνους και τρυπάνια. Οι συσκευές έρχονται λυμένες και ο μηχανικό θα τις συναρμολογήσει και θα τις μεταπωλήσει. Συνολικά μπορεί να αποθηκεύσει μέχρι 50 συσκευές. Κάθε τόρνος κοστίζει 40€ και κάθε τρυπάνι 20€. Ο Μηχανικός μπορεί να διαθέσει μέχρι 1400€ για την αγορά τους. Υπολογίζει να κερδίσει 60€ από κάθε τόρνο και 40€ από κάθε τρυπάνι. Με αυτές τις συνθήκες πόσους τόρνους και τρυπάνια πρέπει να αγοράσει για να κερδίσει περισσότερα; Να προσδιοριστεί η βέλτιστη λύση με την χρήση της Επίλυσης (Solver).

2. Συγκρότημα παραγωγής ετοίμου σκυροδέματος παράγει C16 και C20. Η τιμή πώλησης ενός m^3 C16 είναι 50€, ενώ ενός m^3 C20 είναι 60€. Οι απαιτούμενες ανθρωποώρες και μηχανήματα επί ώρες για την Παρασκευή ενός m^3 C16 και ενός m^3 C20 είναι:

	Ανθρωποώρες	Μηχανήματα επί ώρες
C16	0.7	0.3
C20	0.8	0.5

Η συνολική εβδομαδιαία απασχόληση του προσωπικού μπορεί να είναι μέχρι 112 ανθρωποώρες, ενώ των μηχανημάτων μέχρι 60 ώρες. Η ελάχιστη εβδομαδιαία παραγωγή του συγκροτήματος, ώστε να καλυφθούν τα έξοδα του είναι 40m^3 C16 και 60m^3 C20.

Ζητούνται να βρεθούν οι εβδομαδιαίες παραγωγές C16 και C20, ώστε να έχουμε το μέγιστο των εισπράξεων καθώς και ποιο θα είναι αυτό.

<u>Σημείωση:</u>
1. Να καταγράψετε το μαθηματικό μοντέλο για το κάθε γραμμικό πρόβλημα.
2. Στη συνέχεια να διαμορφώσετε και να επιλύσετε το εκάστοτε γραμμικό πρόβλημα σε ξεχωριστά φύλλα εργασίας, δηλαδή για κάθε πρόβλημα βελτιστοποίησης απαιτείται ξεχωριστό φύλλο εργασίας.

Μαθηματική Διατύπωση για κάθε γραμμικό πρόβλημα

<u>Μέρος Α – Ερώτημα 1</u>
Μεταβλητές Απόφασης:
x: η μηνιαία ποσότητα παραγωγής του E_1
y: η μηνιαία ποσότητα παραγωγής του E_2

Τότε θα έχουμε:

Max z =3500x+5000y
υπό τους περιορισμούς
$\mathbf{2.4x+1.4y \leq 3360}$
$0.7*2*x+0.6*3*y \leq 2520 \Leftrightarrow \mathbf{1.4x+1.8y \leq 2520}$
$50*0.024*x+70*0.040*y \leq 3360 \Leftrightarrow \mathbf{1.2x+2.8y \leq 3360}$
$\mathbf{1300x+1600y \geq 2{,}080{,}000}$
$\mathbf{x \geq 0, y \geq 0}$

<u>Μέρος Α – Ερώτημα 2</u>
Min z =3500x+5000y **(Αλλάζει η αντικειμενική)**
υπό τους περιορισμούς
$\mathbf{2.4x+1.4y \leq 3360}$
$\mathbf{1.4x+1.8y \leq 2520}$
$\mathbf{1.2x+2.8y \leq 3360}$
$\mathbf{1300x+1600y \geq 2{,}080{,}000}$
$\mathbf{x \geq 0, y \geq 0}$

<u>Μέρος Β – Ερώτημα 1</u>
Μεταβλητές Απόφασης:
x: αριθμός των τόρνων που θα αγοραστούν
y: αριθμός των τρυπανιών που θα αγοραστούν

Τότε θα έχουμε:

Max z =60x+40y
υπό τους περιορισμούς
$\mathbf{x + y \leq 50}$
$\mathbf{40x+20y \leq 1400}$
$\mathbf{x \geq 0, y \geq 0}$

<u>Μέρος Β – Ερώτημα 2</u>
Μεταβλητές Απόφασης:
x: εβδομαδιαία παραγωγή C16
y: εβδομαδιαία παραγωγή C20

Τότε θα έχουμε:

Max z =50x+60y
υπό τους περιορισμούς
$\mathbf{x \geq 40}$
$\mathbf{y \geq 60}$
$\mathbf{0.7x+0.8y \leq 112}$
$\mathbf{0.3x+0.5y \leq 60}$

Πρότυπο μορφοποίησης στο Excel για κάθε γραμμικό πρόβλημα

Μέρος Α

	A	B	C	D	E
1	ΑΓΝΩΣΤΟΙ				Βέλτιστη Τιμή Χ=572,7 Υ=954,6
2	Μηνιαία ποσότητα παραγωγής του Ε1	Χ	572,7		
3	Μηνιαία ποσότητα παραγωγής του Ε2	Υ	954,6		
4	ΔΕΔΟΜΕΝΑ				
5		Προϊόν Α	Προϊόν Β	Διαθεσιμότητα	
6	Ανθρωποώρες για σκυρόδετηση	*2,4*	*1,4*	*3360*	
7	Ανθρωποώρες για ξυλότυπο	*1,4*	*1,8*	*2520*	
8	Ανθρωποώρες για Σιδηρό Οπλισμό	*1,2*	*2,8*	*3360*	
9	ΚΕΡΔΟΣ/ ΠΡΟΪΟΝ	*1300*	*1600*	*2080000*	*Μηνιαία Έξοδα Εργοστασίου*
10	ΕΙΣΠΡΑΞΕΙΣ/ΠΡΟΪΟΝ	*3500*	*5000*		
11					
12	ΣΥΝΘΗΚΗ 1	*2.710,92*	<=	***3360***	
13	ΣΥΝΘΗΚΗ 2	*2520,012*	<=	***2520***	
14	ΣΥΝΘΗΚΗ 3	*3360,016*	<=	***3360***	
15	ΣΥΝΘΗΚΗ 4	*2.271.829,00*	>=	***2.080.000,00***	
16					
17	ΑΝΤ. ΣΥΝ. (Max)	*6.777.305,00*			

Μέρος Β1

	A	B	C	D	E
1	ΑΓΝΩΣΤΟΙ				Βέλτιστη Τιμή Χ=20 Υ=30
2	Αριθμός τόρνων	χ	20		
3	Αριθμός τρυπανιών	ψ	30		
4	ΔΕΔΟΜΕΝΑ				
5		Αριθμός τόρνων	Αριθμός τρυπανιών	Διαθεσιμότητα	
6	Περιορισμός Αποθήκευσης	*1*	*1*	*50*	
7	Περιορισμός Κόστους	*40*	*20*	*1400*	
8	ΚΕΡΔΟΣ/ΠΡΟΪΟΝ	*60*	*40*		
9					
10	ΣΥΝΘΗΚΗ 1	*50*	<=	***50***	
11	ΣΥΝΘΗΚΗ 2	*1400*	<=	***1400***	
12					
13	ΑΝΤ. ΣΥΝ. (Max)	2.400			

Μέρος Β2

	A	B	C	D	E
1	ΑΓΝΩΣΤΟΙ				Βέλτιστη Τιμή Χ=72.72 Υ=76.36
2	Εβδομαδιαία παραγωγή C16	χ	72,7273		
3	Εβδομαδιαία παραγωγή C20	ψ	76,3636		
4	ΔΕΔΟΜΕΝΑ				
5		Παραγωγή C16	Παραγωγή C20	Διαθεσιμότητα	
6	Περιορισμός Ανθρωποώρες	*0,7*	*0,8*	*112*	
7	Περιορισμός Μηχανήματα επί ώρες	*0,3*	*0,5*	*60*	
8	Ελάχιστη Παραγωγή	*40*	*60*		
9	ΚΕΡΔΟΣ/ΠΡΟΪΟΝ	*50*	*60*		
10					
11	ΣΥΝΘΗΚΗ 1	*112*	<=	***112***	
12	ΣΥΝΘΗΚΗ 2	*60*	<=	***60***	
13	ΣΥΝΘΗΚΗ 3	*72,727273*	>=	***40***	
14	ΣΥΝΘΗΚΗ 4	*76,363636*	>=	***60***	
15					
16	ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ (Max)	**8.218**			
17					

2) Προβλήματα Γραμμικού Προγραμματισμού – Ανάλυση Ευαισθησίας

Μέρος Α)

Οικοδομική εταιρεία έχει αγοράσει ένα οικόπεδο συνολικού εμβαδού 400 στρεμμάτων και προγραμματίζει την ανέγερση μονοκατοικιών τύπου Α με εμβαδό 110 m^2 που απευθύνονται σε αγοραστές μέσου εισοδήματος, τύπου Β με εμβαδό 150 m^2 που απευθύνονται σε αγοραστές μέσου και υψηλού εισοδήματος και τύπου Γ με εμβαδό 200 m^2 που απευθύνονται σε αγοραστές υψηλού εισοδήματος. Οι μηχανικοί της εταιρείας κάνοντας τα προσχέδια εκτιμώντας και τις υποχρεώσεις του Οικοδομικού Κανονισμού, έκριναν ότι το 30% της έκτασης θα χρησιμοποιηθεί για κοινόχρηστους χώρους (δρόμοι, πλατείες, κ.λ.π.), ενώ το υπόλοιπο θα πουληθεί στους αγοραστές μαζί με τις κατοικίες (κάλυψη κατοικίας και ακάλυπτος χώρος).

Το κέρδος από κάθε μονοκατοικία είναι 14000€ για τον τύπο Α, 20000€ για τον τύπο Β και 26000€ για τον τύπο Γ, ενώ σύμφωνα με έρευνα αγοράς που έγινε διαπιστώθηκε ότι μπορεί να εμφανιστούν μέχρι 350 αγοραστές μέσου εισοδήματος και μέχρι 120 αγοραστές υψηλού εισοδήματος.

Η οικοπεδική έκταση που απαιτεί κάθε κατοικία (κάλυψη + ακάλυπτος χώρος) για τους τρεις τύπους κατοικιών είναι 440 m^2, 600 m^2 και 800 m^2 αντίστοιχα. Ακόμη, υπάρχουν οι εξής περιορισμοί: Η δυνατότητα για προμήθεια ενός υλικού Υ, που θα χρησιμοποιηθεί και στους τρεις τύπους κατοικιών σε ποσότητες 30 m^3, 40 m^3 και 50 m^3 αντίστοιχα, είναι περιορισμένη και εντός του συνολικού χρονικού διαστήματος που θα κατασκευασθούν οι κατοικίες, η συνολική προμήθεια του υλικού αυτού δεν μπορεί να υπερβεί τα 12000 m^3 συνολικά.

Επίσης ο χρονικός προγραμματισμός του έργου έδειξε ότι το έργο θα πρέπει να κατασκευαστεί εντός 500 εργάσιμων ημερών και ο απαιτούμενος κατά μέσο όρο χρόνος για την κατασκευή μιας κατοικίας είναι 1.3 εργάσιμες ημέρες για την κατοικία τΑ, 1.5 εργάσιμες ημέρες για την κατοικία Β και 1.8 εργάσιμες ημέρες για την κατοικία Γ.

Με χρήση των παραπάνω στοιχείων ζητείται:

1. Να βρεθεί η πιο συμφέρουσα οικονομικά λύση για την εταιρεία αναφορικά με το αριθμό των κατοικιών κάθε τύπου που θα κατασκευάσει.
2. Ποιος περιορισμός εμποδίζει την περαιτέρω αύξηση των εσόδων της εταιρεία;
3. Ποια η αύξηση ή η μείωση του κέρδους σε κάθε τύπου κατοικία, ώστε η βέλτιστη λύση να παραμένει η ίδια;
4. Αν το κέρδος για την κατοικία τύπου Α μεταβληθεί σε 17000€, ποιο θα είναι το νέο βέλτιστο;
5. Αν η ποσότητα του υλικού Υ που μπορεί να προμηθευτεί η εταιρεία αυξηθεί ή μειωθεί κατά 5% μεταβάλλεται η βέλτιστη λύση; Αν ναι, ποιο είναι το νέο βέλτιστο αν αυξηθεί κατά 5%, δηλαδή από 12000 σε 12600.

Σημειώσεις:

1. Να χρησιμοποιήσετε ένα πλαίσιο κειμένου όπου θα περιλαμβάνει το μαθηματικό μοντέλο του προβλήματος μαζί με τις απαντήσεις των ερωτημάτων.

2. Για την απάντηση των ερωτημάτων 2-4 θα χρειαστούν τα αποτελέσματα της ανάλυση ευαισθησίας.

Μέρος Β)

Ένα εργοστάσιο παράγει δυο βασικά προϊόντα: προϊόν Α (Χ1) και προϊόν Β (Χ2).

Το μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού είναι:

Max z = 120 X1 + 100 X2
υπό τους περιορισμούς:
8X1+8X2 ≤ 960 Περιορισμός μονάδα παραγωγής 1
4X1+2X2 ≤ 400 Περιορισμός παραγωγής 2
4X1+3X2 ≤ 420 Περιορισμός παραγωγής 3
X1, X2 ≥ 0

Ζητείται:

1. Έχει βέλτιστη λύση το παραπάνω πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού; Αν ναι, ποια είναι;
2. Να προσδιοριστούν ποιοι περιορισμοί είναι δεσμευτικοί και ποιοι μη δεσμευτικοί.
3. Ποιος είναι ο μέγιστος αριθμός ωρών εργασίας που μπορούν να προστεθούν ή να αφαιρεθούν στις μονάδες παραγωγής 2 & 3;
4. Να προσδιοριστούν τα άνω και κάτω όρια για τον συντελεστή κέρδους του προϊόντος Α, μέσα στα οποία η βέλτιστη λύση δεν μεταβάλλεται.
5. Θα αλλάξει η βέλτιστη λύση στην περίπτωση όπου οι ώρες της μονάδα παραγωγής 1 μειωθούν κατά 20 ώρες, δηλαδή οι διαθέσιμες είναι 940 ώρες; Αν ναι, ποια θα είναι η καινούργια βέλτιστη λύση;

Μέρος Γ)

1. Ένας αγρότης μπορεί να χρησιμοποιήσει δύο τύπους λιπασμάτων Α και Β. Σε κάθε σακί ο τύπος Α περιέχει 10 μονάδες Φωσφόρου, 3 Καλίου και 6 Αζώτου, ενώ σε κάθε σακί τύπου Β περιέχονται 12 μονάδες Φωσφόρου, 5 Καλίου και 7 Αζώτου. Στην έκταση που καλλιεργεί χρειάζεται: το πολύ 1200 μον. Φωσφόρου και τουλάχιστον 315 μον. Καλίου και 504 Αζώτου. Αν ο τύπος Α κοστίζει 16€ το σακί και ο Β 20€ το σακί, πόσα σακιά από το κάθε είδος πρέπει να προμηθευτεί για να έχει το ελάχιστο κόστος;

2. Ένας αγρότης έχει στη διάθεσή του 3200€ και 160 μέρες για να σπείρει τα 100 στρέμματα του χωραφιού του. Στην αγορά υπάρχουν τρία είδη σπόρων Α, Β, και Γ με τιμές 40, 20 και 30€/στρέμμα αντίστοιχα, και τα οποία απαιτούν 1,2, και 1, αντίστοιχα μέρες σποράς ανά στρέμμα. Αν από κάθε είδος κερδίζει 100, 300, και 200€/στρέμμα αντίστοιχα, πόσα στρέμματα πρέπει να σπείρει για κάθε είδος σπόρου, ώστε να μεγιστοποιήσει το κέρδος του;

<u>Σημείωση:</u> Να χρησιμοποιήσετε το Solver για να επιλύσετε τα γραμμικά προβλήματα του μέρους Γ. Στο ίδιο φύλλο εργασίας να καταγράψετε το μαθηματικό μοντέλο για το κάθε πρόβλημα

Μαθηματική Διατύπωση και Πρότυπο μορφοποίησης στο Excel

Μέρος Α

Μαθηματικό Μοντέλο

Μεταβλητές Απόφασης:
x1: αριθμός κατοικιών τύπου Α
x2: αριθμός κατοικιών τύπου Β
x3: αριθμός κατοικιών τύπου Γ

Τότε θα έχουμε:

Max z = 15000 x1 + 20000 x2 + 26000 x3
υπό τους περιορισμούς
0.44 x1 + 0.6 x2 + 0.8 x3 ≤ 400*0,7=280 (Περιορισμός εμβαδόν του οικοπέδου)
1.3 x1 + 1.5 x2 + 1.8 x3 ≤ 500 (Περιορισμός διαθέσιμου χρόνου)
30 x1 + 40 x2 + 50 x3 ≤ 12000 (Περιορισμός υλικών κατασκευής)
x1 ≤ 350 (περιορισμός της αγοράς)
x3 ≤ 120 (περιορισμός της αγοράς)
x1 + x2 + x3 ≤ 470 (περιορισμός της αγοράς)
x1, x2, x3 ≥ 0

	A	B	C	D	E
1	ΑΓΝΩΣΤΟΙ				
2	Αριθμός Κατοικιών τύπου Α	x1	0		
3	Αριθμός Κατοικιών τύπου Β	x2	150		
4	Αριθμός Κατοικιών τύπου Γ	x3	120		
5	ΔΕΔΟΜΕΝΑ				
6		Τύπου Α	Τύπου Β	Τύπου Γ	Διαθεσιμότητα
7	Περιορισμός στο εμβαδόν του οικοπέδου	0,44	0,6	0,8	280
8	Περιορισμός Χρόνου	1,3	1,5	1,8	500
9	Περιορισμός Υλικών Κατασκευής	30	40	50	12000
10	Περιορισμός της Αγοράς - Μέσου Εισοδήματος	1	0	0	350
11	Περιορισμός της Αγοράς - Υψηλού Εισοδήματος	0	0	1	120
12	Αθροιστικός Περιορισμός της Αγοράς	1	1	1	470
13	Κέρδος/τύπο κατοικίας	14000	20000	26000	
14					
15	ΣΥΝΘΗΚΗ 1	186,00	<=	280	
16	ΣΥΝΘΗΚΗ 2	441,00	<=	500	
17	ΣΥΝΘΗΚΗ 3	12.000,00	<=	12000	
18	ΣΥΝΘΗΚΗ 4	0,00	<=	350	
19	ΣΥΝΘΗΚΗ 5	120,00	<=	120	
20	ΣΥΝΘΗΚΗ 6	270,00	<=	470	
21					
22	ΑΝΤ. ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ (Max)	6.120.000,00			

Βέλτιστη Τιμή
X1=0, X2=150, X3=120

Z=6.120.000,00

Μέρος Β

(Μορφοποίηση στο Excel)

	A	B	C	D	E
1	ΑΓΝΩΣΤΟΙ				
2	Προϊόν Α	X1	60		
3	Προϊόν Β	X2	60		
4	ΔΕΔΟΜΕΝΑ				
5		Προϊόν Α	Προϊόν Β	Διαθεσιμότητα	
6	Μονάδα Παραγωγής 1	8	8	960	
7	Μονάδα Παραγωγής 2	4	2	400	
8	Μονάδα Παραγωγής 3	4	3	420	
9	ΚΕΡΔΟΣ/ΠΡΟΪΟΝ	120	100		
10					
11	ΣΥΝΘΗΚΗ 1	960	<=	960	
12	ΣΥΝΘΗΚΗ 2	360	<=	400	
13	ΣΥΝΘΗΚΗ 3	420	<=	420	
14					
15	ΑΝΤ. ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ (Max)	13.200			
16					

Μέρος Γ

(Μαθηματική Διατύπωση)

Μέρος Γ1

Μεταβλητές Απόφασης:
Χ: αριθμός σακιών τύπου Α
Υ: αριθμός σακιών τύπου Β

Τότε θα έχουμε:

Min z =16*X+ 20*Y
υπό τους περιορισμούς
Φωσφόρος: **10*Χ + 12*Υ <= 1200**
Κάλιο: **3*Χ + 5*Υ >= 315**
Άζωτο: **6*Χ + 7*Υ >= 504**
Χ, Υ >=0

Βέλτιστη Λύση
(Χ,Υ)=(35,42)
Ζ = 1400€

Μέρος Γ2

Μεταβλητές Απόφασης:
Χ1: αριθμός στρεμμάτων που θα χρησιμοποιηθεί ο σπόρος Α
Χ2: αριθμός στρεμμάτων που θα χρησιμοποιηθεί ο σπόρος Β
Χ3: αριθμός στρεμμάτων που θα χρησιμοποιηθεί ο σπόρος Γ

Τότε θα έχουμε:

Max z =100*X1+ 300*X2 + 200*X3
υπό τους περιορισμούς
Χρηματοδότηση: **40*Χ1 + 20*Χ2 + 30*Χ3 <= 3200**
Μέρες Σποράς: **Χ1 + 2*Χ2 + Χ3 <= 160**
Συνολικά Στρέμματα: **Χ1 + Χ2 + Χ3 <= 100**
Χ1, Χ2, Χ3 >=0

Βέλτιστη Λύση
(Χ1, Χ2, Χ3)=(0, 60, 40)
Ζ=26000€

3) Προβλήματα Ακέραιου Γραμμικού Προγραμματισμού

Μέρος Α)

Μια τεχνική εταιρεία συμμετέχει σε κοινοπραξίες που αναλαμβάνουν την εκτέλεση μεγάλων έργων. Για την επόμενη τριετία έχει δεχτεί πολλές προτάσεις για ανάληψη μέρους μεγάλων έργων. Έπειτα από αρχική επιλογή κατέληξε σε έναν τελικό κατάλογο επτά υποψήφιων προς ανάληψη έργων. Τα υποψήφια έργα διαφέρουν τόσο ως προς τη μακροπρόθεσμη απόδοση τους όσο και ως προς το ύψος της χρηματοδότησης τους από την πλευρά της εταιρείας, καθώς και ως προς τις ανάγκες τους σε προσωπικό και εξοπλισμό της εταιρείας, όπως φαίνεται στον πίνακα που ακολουθεί:

	Έργα						
	1	2	3	4	5	6	7
Απόδοση	17	10	15	19	7	13	9
Χρηματοδότηση (εκ. €)	43	28	34	48	17	32	23
Προσωπικό	6	5	4	7	4	5	8
Εξοπλισμός	ΝΑΙ	ΝΑΙ		ΝΑΙ	ΝΑΙ		

Τα έργα 1 και 2 είναι αμοιβαίως αποκλειόμενα, όπως και τα έργα 3 και 4. Επιπλέον, ούτε το 3 ούτε το 4 μπορούν να αναληφθούν αν δεν αναληφθούν το 1 και το 2 αντίστοιχα. Αντίθετα, δεν υπάρχει κανείς περιορισμός για τα έργα 5, 6 και 7. Ακόμη, το συνολικό διαθέσιμο κεφάλαιο της εταιρείας που μπορεί να διαθέσει για χρηματοδότηση των έργων που θα αναλάβει είναι 100 εκ. ευρώ, το διαθέσιμο προσωπικό της 16 άτομα, ενώ ο εξοπλισμός της επαρκεί μόνο για 3 έργα. Στόχος είναι η μεγιστοποίηση της απόδοσης των χρημάτων.

Μέρος Β)

Μια αεροπορική εταιρεία εξετάζει την αγορά επιβατικών αεροπλάνων μεγάλων, μεσαίων και κοντινών αποστάσεων. Η τιμή αγοράς θα είναι 67εκ. ευρώ για κάθε αεροπλάνο μεγάλων αποστάσεων, 50 εκ. ευρώ για κάθε αεροπλάνο μεσαίων αποστάσεων και 35 εκ. ευρώ για κάθε αεροπλάνο μικρών αποστάσεων. Το διοικητικό συμβούλιο έχει δεσμεύσει 1.5 δις ευρώ για αυτές τις αγορές. Ανεξάρτητα με το πλήθος των αεροπλάνων, που θα αγοραστούν, αναμένεται να υπάρχει τέτοια ζήτηση για ταξίδια σε κάθε απόσταση, οπότε τα αεροπλάνα θα χρησιμοποιούνται στη μέγιστη χωρητικότητα τους. Εκτιμάται ότι το καθαρό ετήσιο κέρδος (μετά από την αφαίρεση του κόστους κεφαλαίου) θα είναι 4.2 εκ. ευρώ για κάθε αεροπλάνο μεγάλης απόστασης, 3 εκ. ευρώ για κάθε αεροπλάνο μέσης απόστασης και 2.3 εκ. ευρώ για κάθε αεροπλάνο μικρής απόστασης.

Προβλέπεται ότι αρκετοί εκπαιδευμένοι πιλότοι θα είναι διαθέσιμοι έτσι, ώστε να επανδρωθούν 30 νέα αεροπλάνα. Αν αγοραστούν μόνο αεροπλάνα μικρών αποστάσεων, οι εγκαταστάσεις συντήρησης, που υπάρχουν εγγυώνται ότι μπορούν να συντηρηθούν 40 νέα αεροπλάνα. Ωστόσο, κάθε αεροπλάνο μεσαίας απόστασης είναι ισοδύναμο με 4/3 αεροπλάνο μικρής απόστασης και κάθε αεροπλάνο μεγάλης απόστασης είναι ισοδύναμο με 5/3 αεροπλάνο μικρής απόστασης, ως προς την χρήση των υπηρεσιών συντήρησης. Η διοίκηση επιθυμεί να γνωρίζει πόσα αεροπλάνα κάθε τύπου πρέπει να αγοραστούν για να μεγιστοποιηθεί το κέρδος.

Μαθηματική Διατύπωση και Πρότυπο μορφοποίησης στο Excel

Μέρος Α

Μαθηματικό Μοντέλο

Μεταβλητές Απόφασης:
Ορίζουμε τις 0/1 μεταβλητές x1, x2, x3, x4, x5, x6 και x7 να συμβολίζουν την επιλογή ή όχι καθενός από τα επτά έργα. Δηλαδή αν x1=1, το έργο 1 επιλέγεται, αν x1=0, δεν επιλέγεται κ.ο.κ.

Τότε θα έχουμε:

Max z = 17*x1 + 10*x2 + 15*x3 + 19*x4 + 7*x5 + 13*x6 + 9*x7
υπό τους περιορισμούς
Χρηματοδότηση: **43*x1 + 28*x2 + 34*x3 + 48*x4 + 17*x5 + 32*x6 + 23*x7 <= 100**
Προσωπικό: **6*x1 + 5*x2 + 4*x3 + 7*x4 + 4*x5 + 5*x6 + 8*x7 <= 16**
Εξοπλισμός: **x1 + x2 + 0*x3 + x4 + x5 + 0*x6 + 0*x7 <= 3**
Μεταξύ 1 και 2: **x1+x2 <= 1**
Μεταξύ 3 και 4: **x3+x4 <= 1**
Μεταξύ 1 και 3: **x3 <= x1**
Μεταξύ 2 και 4: **x4 <= x2**
x1, x2, x3, x4, x5, x6 και x7 **δυαδικές (0/1)**

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Επιλογή Έργων								
2		x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	
3	Επιλογή έργων (1 - Επιλέγεται, 0 - Όχι)	1	0	1	0	1	0	0	
4									
5		Έργα							
6		1	2	3	4	5	6	7	Διαθεσιμό-τητα
7	Απόδοση	17	10	15	19	7	13	9	
8	Χρηματοδότηση (εκ. €)	43	28	34	48	17	32	23	100
9	Απαιτήσεις σε Προσωπικό	6	5	4	7	4	5	8	16
10	Απαιτήσεις σε Εξοπλισμό (1-ναι, 0-όχι)	1	1	0	1	1	0	0	3
11									
12	Περιορισμοί								
13	Απαιτήσεις Χρηματοδότησης	94	<=	100					
14	Απαιτήσεις σε Προσωπικό	14	<=	16					
15	Απαιτήσεις σε Εξοπλισμό	2	<=	3					
16	Αμοιβαία αποκλειόμενα έργα 1 & 2 (x1+x2<=1)	1	<=	1					
17	Αμοιβαία αποκλειόμενα έργα 3 & 4 (x2+x3<=1)	1	<=	1					
18	Εξάρτηση του 3 από το 1 (x3<=x1 ή x3-x1<=0)	1	<=	1					
19	Εξάρτηση του 4 από το 2 (x4<=x2 ή x4-x2<=0)	0	<=	0					
20									
21	Αντ. Συναρτ. (max Απόδοση χαρτοφυλακίου)	39							
22									

Βέλτιστη Τιμή
X1=1, X2=0, X3=1, X4=0, X5=1, X6=0, X7=0

Z=39

Μέρος Β

Μέρος Β
Μεταβλητές Απόφασης:
X1: αριθμός αεροπλάνων μεγάλων αποστάσεων
X2: αριθμός αεροπλάνων μεσαίων αποστάσεων
X3: αριθμός αεροπλάνων μικρών αποστάσεων

Τότε θα έχουμε:

Max z =4.2*X1+ 3*X2 + 2.3*X3
υπό τους περιορισμούς
Χρηματοδότηση: **67*X1 + 50*X2 + 35*X3 <= 1500**
Πιλότοι: **X1 + X2 + X3 <= 30**
Συντήρηση: **(5/3)X1 + (4/3) X2 + X3 <= 40**
X1, X2, X3 >=0 *και ακέραιοι*

	A	B	C	D	E
1		ΑΓΝΩΣΤΟΙ			
2		x1	x2	x3	Μεγ. Επιτρ. Τιμές
3	**Αεροπλάνα**	14	0	16	
4	Απαιτήσεις Χρηματοδότησης (εκ. €)	67	50	35	1500
5	Απαιτήσεις σε πιλότους	1	1	1	30
6	Υπηρεσίες Συντήρησης	5/3	4/3	1	40
7	Καθαρό ετήσιο κέρδος (εκ. €)	4,2	3	2,3	
8					
9	**ΣΥΝΘΗΚΕΣ**				
10	67*x1 +50*x2 +35*x3<=1500	1498	<=	1500	
11	x1+x2+x3<=30	30	<=	30	
12	(5/3)*x1+(4/3)*x2+x3<=40	39,33	<=	40	
13					
14	**ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ**	Max Καθαρό Ετήσιο κέρδος	**95,6**		
15					

Βέλτιστη Τιμή
X1=14, X2=0, X3=16

Z=95.6

Σημείωση:

3. Να καταγράψετε το μαθηματικό μοντέλο για το κάθε γραμμικό πρόβλημα.
4. Στη συνέχεια να διαμορφώσετε και να επιλύσετε το εκάστοτε γραμμικό πρόβλημα σε ξεχωριστά φύλλα εργασίας, δηλαδή για κάθε πρόβλημα βελτιστοποίησης απαιτείται ξεχωριστό φύλλο εργασίας.

4) Προβλήματα Ακέραιου Γραμμικού Προγραμματισμού 2

Μέρος Α)

Το Πανεπιστήμιο Δυτικής Αττικής θέλει να επεκτείνει τις εγκαταστάσεις του με νέες αίθουσες διδασκαλίας, προκειμένου να καλύψει τις διδακτικές του ανάγκες. Χρησιμοποιούνται τριών τύπων αίθουσες διδασκαλίας: α) μικρές 60 τ.μ. Β) Μεσαίες 90 τ.μ. και γ) οι μεγάλες των 150 τ.μ.

Η κατασκευή τους κοστίζει αντίστοιχα 15000€, 23000€ και 35000€ και μπορούν να φιλοξενήσουν 40, 70 και 160 φοιτητές αντίστοιχα. Απαιτούνται τουλάχιστον 5 μικρές, 7 μεσαίες και από 4 έως 8 μεγάλες αίθουσες. Η συνολική επιφάνεια των αιθουσών δεν πρέπει να ξεπερνά τα 1950 τ.μ. και το διαθέσιμο χρηματικό κεφάλαιο είναι 420000€. Να υπολογισθεί ο αριθμός των αιθουσών ανά κατηγορία που πρέπει να κατασκευαστεί ώστε να μεγιστοποιηθεί ο αριθμός των φοιτητών που μπορούν να φιλοξενηθούν ταυτόχρονα.

Μέρος Β)

Ένα πολυκατάστημα αποφάσισε να παραμένει ανοιχτό σε 24ωρη βάση. Ο διευθυντής του καταστήματος χώρισε το 24ωρο σε έξι περιόδους 4 ωρών και προσδιόρισε τις παρακάτω ελάχιστε απαιτήσεις προσωπικού για κάθε περίοδο:

Χρόνος	**Απαιτούμενο προσωπικό**
Μεσάνυχτα – 4:00 π.μ.	90
4:00 π.μ. – 8:00 π.μ.	215
8:00 π.μ. – Μεσημέρι	250
Μεσημέρι – 4:00 μ.μ.	65
4:00μ.μ. – 8:00μ.μ.	300
8:00μ.μ. - Μεσάνυχτα	125

Το προσωπικό του καταστήματος πρέπει να ξεκινάει τη βάρδιά στην αρχή μίας από αυτές τις περιόδους και πρέπει να εργάζεται για 8 συνεχόμενες ώρες. Ο διευθυντής του καταστήματος θέλει να ξέρει τον ελάχιστο αριθμό υπαλλήλων που πρέπει να τοποθετήσει σε κάθε περίοδο για να ελαχιστοποιήσει τον συνολικό αριθμό των εργαζομένων. Διατυπώστε και λύστε αυτό το πρόβλημα

Σημείωση:

5. Να καταγράψετε το μαθηματικό μοντέλο για το κάθε γραμμικό πρόβλημα.
6. Στη συνέχεια να διαμορφώσετε και να επιλύσετε το εκάστοτε γραμμικό πρόβλημα σε ξεχωριστά φύλλα εργασίας, δηλαδή για κάθε πρόβλημα βελτιστοποίησης απαιτείται ξεχωριστό φύλλο εργασίας.

Μαθηματική Διατύπωση και Πρότυπο μορφοποίησης στο Excel

Μέρος Α

Μαθηματικό Μοντέλο

Μεταβλητές Απόφασης:
X1: αριθμός μικρών αιθουσών
X2: αριθμός μεσαίων αιθουσών
X3: αριθμός μεγάλων αιθουσών

Τότε θα έχουμε:

Max z =40*X1+ 70*X2 + 160*X3
υπό τους περιορισμούς
Χρηματοδότηση: **15000*X1 +23000*X2 + 35000*X3 <= 420000**
Επιφάνεια: **60*X1 + 90*X2 + 150*X3 <= 1950**
Ελάχιστες Απαιτήσεις: **X1 >= 5, X2 >= 7, X3 >=4**
Μέγιστες Απαιτήσεις: **X3<=8**
X1, X2, X3: ακέραιοι

Πρότυπο μορφοποίησης στο Excel

	A	B	C	D	E
1		ΑΓΝΩΣΤΟΙ			
2		x1	x2	x3	Μεγ. Επιτρ. Τιμές
3	Αίθουσες	5	7	5	
4	Επιφάνεια	60	90	150	1950
5	Κόστος	15000	23000	35000	420000
6	Ελ. Αριθμ. Αιθουσών	5	7	4	
7	Μέγιστος Αριθμ. Αιθουσών			8	
8	Φοιτητές /αίθ	40	70	160	
9					
10	ΣΥΝΘΗΚΕΣ				
11	x1 >=5	5	>=	5	
12	x2>=7	7	>=	7	
13	x3>=4	5	>=	4	
14	x3<=8	5	<=	8	
15	Διαθέσιμο Κεφάλαιο	411000	<=	420000	
16	Επιφάνεια	1680	<=	1950	
17					
18	ΑΝΤ. ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ	Μεγιστοποίηση Αριθμού Φοιτητών	1490		
19					
20					
21					
22					

Βέλτιστη Τιμή
X1=5, X2=7, X3=5

Z=1490

Μέρος Β

Μεταβλητές Απόφασης:
x1: Αριθμός υπαλλήλων που ξεκινάει τα Μεσάνυχτα
x2: Αριθμός υπαλλήλων που ξεκινάει στις 4:00 π.μ.
x3: Αριθμός υπαλλήλων που ξεκινάει στις 8:00 π.μ.
x4: Αριθμός υπαλλήλων που ξεκινάει το Μεσημέρι
x5: Αριθμός υπαλλήλων που ξεκινάει στις 4:00 μ.μ.
x6: Αριθμός υπαλλήλων που ξεκινάει στις 8:00 μ.μ.

Τότε θα έχουμε:

Min z = x1 + x2 + x3 + x4 + x5 + x6
υπό τους περιορισμούς
x6+x1 >= 90
x1+x2>=215
x2+x3 >= 250
x3+x4>=65
x4+x5 >= 300
x5+x6>=125
x1,x2,x3,x4,x5,x6 (Μη αρνητικοί ακέραιοι)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**Μεταβλητές του προβλήματος**							
2		**x1**	**x2**	**x3**	**x4**	**x5**	**x6**	
3	**Προσωπικό καταστήματος**	**90**	**125**	**125**	**0**	**300**	**0**	
4								
5		**Δεδομένα**						
6	**Χρόνος**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**Απαίτηση**
7	Μεσάνυχτα – 4:00 π.μ.	1	0	0	0	0	1	90
8	4:00 π.μ. – 8:00 π.μ.	1	1	0	0	0	0	215
9	8:00 π.μ. – Μεσημέρι	0	1	1	0	0	0	250
10	Μεσημέρι – 4:00 μ.μ.	0	0	1	1	0	0	65
11	4:00μ.μ. – 8:00μ.μ.	0	0	0	1	1	0	300
12	8:00μ.μ. - Μεσάνυχτα	0	0	0	0	1	1	125
13								
14	Περιορισμοί							
15	Συνθήκη 1: (x6+x1>=90)	90	>=	90				
16	Συνθήκη 2: (x1+x2>=215)	215	>=	215				
17	Συνθήκη 3: (x2+x3>=250)	250	>=	250				
18	Συνθήκη 4: (x3+x4>=65)	125	>=	65				
19	Συνθήκη 5: (x4+x5>=300)	300	>=	300				
20	Συνθήκη 6: (x5+x6>=125)	300	>=	125				
21								
22	Αντ. Συναρτ. (min Αριθμός Υπαλλήλων)	640						

Βέλτιστη Τιμή
X1=90, X2=125, X3=125
X4=0, X5=300, X6=0

Z=640