Άσκηση 1:

Ένας δίσκος Ψευδαργύρου τοποθετείται σε απόσταση 120cm από μια πηγή φωτός μήκους κύματος λ=200nm με ισχύ 100mWatt.

Πόση ισχύ απορροφά ένα ηλεκτρόνιο σύμφωνα με την κλασσική αντίληψη για το φως; (Υποθέστε ότι ένα ηλεκτρόνιο συλλέγει ενέργεια από μια κυκλική περιοχή ακτίνας r=1x10^{-10} m)

Αν η ενέργεια που χρειάζεται για να βγει ένα e έξω από το υλικό είναι φ=4,3eV, να υπολογιστεί ο χρόνος που απαιτείται για να απορροφήσει αυτό το ποσόν ενέργειας.

Λύση:

Στο πρόβλημα αυτό θέλουμε να υπολογίσουμε πόση φωτεινή ισχύ απορροφά το ηλεκτρόνιο ενός ατόμου. Για τον λόγο αυτό φανταζόμαστε το άτομο σαν ένα δίσκο ακτίνας 10^{-10}m. Με βάση αυτή την προσέγγιση το πρόβλημα προτείνει να υποθέσουμε ότι ένα ηλεκτρόνιο συλλέγει ενέργεια από μια κυκλική περιοχή ακτίνας r=1x10^{-10} m.

Η φωτεινή πηγή δεν είναι κατευθυντική οπότε δεχόμαστε ότι τα 100mWatt φωτεινής ισχύος διαδίδονται ομοιόμορφα (με σφαιρική συμμετρία) στο χώρο. Εφόσον ο δίσκος τοποθετείται σε απόσταση 1,2m από την φωτεινή πηγή θα υπολογίσουμε την ισχύ που πέφτει ανά τετρ. μέτρο στην επιφάνεια μιας σφαίρας ακτίνας 1,2m.

$$\text{Επιφανειακή πυκνότητα ισχύος} = \frac{ισχύς}{επιφ} = \frac{100mW}{4\pi d^2} = \frac{100\times10^{-3}W}{4\pi\times1{,}2^2 m^2} = 1{,}7\times10^{-2}\frac{W}{m^2}$$

Πόση φωτεινή ισχύς πέφτει επάνω σε ένα δίσκο που έχει ακτίνα $r = 10^{-10}m$; Για να απαντήσουμε στο ερώτημα θα πολλαπλασιάσουμε την ισχύ που πέφτει επάνω στην μονάδα επιφάνειας επί την επιφάνεια του δίσκου. $a = \pi r^2 = \pi\times10^{-20}m^2$. Οπότε

$$\text{Ισχύς στο άτομο} = 1{,}7\times10^{-2}\frac{W}{m^2}\times a = 1{,}7\times10^{-2}\frac{W}{m^2}\times\pi\times10^{-20}m^2 = 1{,}7\times10^{-22}W$$

ή αλλιώς $\text{Ισχύς στο άτομο} = 1{,}7\times10^{-22}\frac{Joule}{\sec}$. Εμείς όμως θέλουμε να υπολογίσουμε σε πόσο χρόνο θα απορροφήσει το άτομο (οπότε και το ηλεκτρόνιο) ενέργεια 4,3eV. Για τον λόγο αυτό θα μετατρέψουμε τις μονάδες.

$$\text{Ισχύς} \quad \sigma\tau o \quad \acute{\alpha}\tau o\mu o = 1{,}7\times10^{-22}\,\frac{Joule}{\sec} = \frac{1{,}7\times10^{-22}}{1{,}6\times10^{-19}}\,\frac{eV}{\sec} \approx 10^{-3}\,\frac{eV}{\sec}$$

$t = \dfrac{4{,}3eV}{10^{-3}\,\frac{eV}{\sec}} = 4{,}3\times10^{3}\sec = \dfrac{4300}{3600} = 1{,}2hours$. Το αποτέλεσμα είναι εξωφρενικό γιατί λέει πως για να εξαχθεί ένα ηλεκτρόνιο από το μέταλλο θα πρέπει να περιμένουμε περισσότερο από μια ώρα. Κάτι τέτοιο δεν παρατηρείται πειραματικά πράγμα που δείχνει την ανεπάρκεια της κλασσικής αντίληψης για το φως όσον αφορά την εξήγηση του φωτοηλεκτρικού φαινομένου. Στην λύση του προβλήματος δεν χρησιμοποιήθηκε το μήκος κύματος του φωτός γιατί σύμφωνα με την κλασσική αντίληψη το μήκος κύματος και η συχνότητα είναι καθαρά κυματικά χαρακτηριστικά του φωτός τα οποία δεν συνδέονται με την ενέργεια που μεταφέρει. Σύμφωνα με την σύγχρονη αντίληψη φως 200nm έχει ενέργεια $E(eV) = \dfrac{1240}{\lambda(nm)} = \dfrac{1240}{200} = 6{,}2eV$. Η ενέργεια του ενός φωτονίου είναι μεγαλύτερη από το έργο εξαγωγής 4,3eV οπότε θα εξάγονται φωτοηλεκτρόνια σχεδόν ακαριαία.

Άσκηση 2:

Μια δέσμη laser Ar^{+} μήκους κύματος λ=488nm και ισχύος 2mW, πέφτει επάνω σε ένα δείγμα που περιέχει νανοκρυστάλλους πυριτίου. Το ίχνος του laser στο δείγμα είναι κύκλος ακτίνας 1mm. Οι νανοκρύσταλλοι πυριτίου έχουν ακτίνα 2nm. Να υπολογιστεί: α) Η πυκνότητα φωτεινής ισχύος που πέφτει στην περιοχή του δείγματος που προσπίπτει η δέσμη του laser (κύκλος ακτίνας 1mm). β) Η φωτεινή ισχύς που απορροφά ένας νανοκρύσταλλος σε Joule/sec και σε eV/sec. γ) Ο αριθμός των φωτονίων που πέφτουν επάνω σε ένα νανοκρύσταλλο σε 1sec. δ) Κάθε πόσα μsec πέφτει ένα φωτόνιο σε ένα νανοκρύσταλλο;

Λύση:

α) Το μέγεθος του ίχνους (spot size) του laser είναι το εμβαδόν κύκλου με ακτίνα 1mm. $A = \pi r^2 = \pi\times\left(10^{-3}\right)^2 m^2 = \pi\times10^{-6}m^2$.

$$\text{Επιφανειακή πυκνότητα ισχύος} = \frac{\text{ισχύς}}{\text{επιφάνεια}} = \frac{2\times10^{-3}W}{\pi\times10^{-6}m^2} = \frac{2}{\pi}\times10^{3}\,\frac{W}{m^2}$$

β) Για να απαντήσουμε στο ερώτημα θα πολλαπλασιάσουμε την ισχύ που πέφτει επάνω στην μονάδα επιφάνειας επί την διατομή του νανοκρυστάλλου. $a = \pi r^2 = \pi\left(2\times10^{-9}\right)^2 = 4\pi\times10^{-18}m^2$.

Οπότε,

$$\text{Ι}\sigma\chi\acute{\upsilon}\varsigma \quad \sigma\tau o \quad \nu-\kappa = \frac{2}{\pi}\times 10^3 \frac{W}{m^2}\times a = \frac{2}{\pi}\times 10^3 \frac{W}{m^2}\times 4\pi\times 10^{-18} m^2 = 8\times 10^{-15} W$$ ή

αλλιώς

$$\text{Ι}\sigma\chi\acute{\upsilon}\varsigma \quad \sigma\tau o \quad \nu-\kappa = 8\times 10^{-15}\frac{Joule}{\sec}.$$

Για να μετατρέψουμε την ισχύ που πέφτει επάνω σε ένα νανοκρύσταλλο σε eV/sec διαιρούμε το αποτέλεσμα με το φορτίο του ηλεκτρονίου

$$\text{Ι}\sigma\chi\acute{\upsilon}\varsigma \quad \sigma\tau o \quad \nu-\kappa = \frac{8\times 10^{-15}}{1{,}6\times 10^{-19}}\frac{eV}{\sec} = 5\times 10^4 \frac{eV}{\sec}.$$

γ) Η ενέργεια του ενός φωτονίου είναι $E(eV) = \frac{1240}{\lambda(nm)} = \frac{1240}{488} eV = 2{,}54 eV$ κατά συνέπεια ο κάθε νανοκρύσταλλος δέχεται $\frac{5\times 10^4}{2{,}54} \approx 2\times 10^4 \frac{\varphi\omega\tau\acute{o}\nu\iota\alpha}{\sec}$.

δ) Αφού ο κάθε νανοκρύσταλλος δέχεται $2\times 10^4 \frac{\varphi\omega\tau\acute{o}\nu\iota\alpha}{\sec}$, ο χρόνος που μεσολαβεί μεταξύ της άφιξης δύο διαδοχικών φωτονίων θα είναι $\frac{1}{2\times 10^4}\sec = 50\mu\sec$.

Άσκηση 3:

Μια τετράγωνη φωτοδίοδος έχει πλευρά 20cm και τοποθετείται σε απόσταση 100cm από ένα LED που εκπέμπει στα 500nm. Οι μετρήσεις δείχνουν ότι η φωτεινή ισχύς επάνω στη φωτοδίοδο είναι 1μW. Να υπολογιστεί η συνολική ισχύς που εκπέμπεται από το LED υποθέτοντας σφαιρική συμμετρία. Πόσα φωτόνια εκπέμπονται από το LED ανά δευτερόλεπτο;

Λύση:

Αρχικά θα υπολογίσουμε την πυκνότητα φωτεινής ισχύος επάνω στη φωτοδίοδο

$$\text{Ε}\pi\iota\varphi\alpha\nu\varepsilon\iota\alpha\kappa\acute{\eta} \;\; \pi\upsilon\kappa\nu\acute{o}\tau\eta\tau\alpha \;\; \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}o\varsigma = \frac{\iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varsigma}{\varepsilon\pi\iota\varphi\acute{\alpha}\nu\varepsilon\iota\alpha} = \frac{1\times 10^{-6} W}{20\times 20\times 10^{-4} m^2} = 2{,}5\times 10^{-5}\frac{W}{m^2}$$

Αυτή είναι η πυκνότητα ισχύος επάνω στην επιφάνεια της φωτοδιόδου σε απόσταση 1m από την φωτεινή πηγή, κατά συνέπεια μπορούμε να υπολογίσουμε την ισχύ που εκπέμπει η φωτεινή πηγή επάνω σε μια σφαίρα ακτίνας 1m (εκμεταλλευόμενοι την παραδοχή της σφαιρικής συμμετρίας του εκπεμπόμενου φωτός).

$$\text{Ισχύς } LED = \left(\text{Επιφανειακή πυκνότητα ισχύος}\right) \times \text{επιφάνεια σφαίρας} =$$
$$= 2{,}5 \times 10^{-5} \frac{W}{m^2} \times 4\pi 1^2 = 0{,}314 mW$$

$$E(eV) = \frac{1240}{\lambda(nm)} = \frac{1240}{500} = 2{,}48 eV$$

μετατροπή σε Joule: $2{,}48 eV \times 1{,}6 \times 10^{-19} \frac{Joule}{eV} \approx 4 \times 10^{-19}\, Joule$.

Για να υπολογιστεί ο αριθμός φωτονίων που εκπέμπονται ανά sec θα πρέπει κανείς να διαιρέσει την φωτεινή ισχύ που εκπέμπει η πηγή δια την ενέργεια του ενός φωτονίου.

$$\frac{\text{Ισχύς}}{E} = \frac{0{,}314 \times 10^{-3}\, Joule/\sec}{4 \times 10^{-19}\, Joule} = 7{,}85 \times 10^{14} \frac{\text{φωτόνια}}{\sec}$$

Άσκηση 4:

Να υπολογιστεί το μήκος κύματος για τα εξής 'σωματίδια'. α) πρωτόνιο ενέργειας 4eV β) ηλεκτρόνιο ενέργειας 4eV γ) φωτόνιο ενέργειας 4eV.

m πρωτονίου= $1{,}673\text{x}10^{-27}$kgr, m ηλεκτρ.= $9{,}1\text{x}10^{-31}$ kg

Λύση:

Για την περίπτωση του πρωτονίου και του ηλεκτρονίου, το μήκος κύματος προσδιορίζεται με την εξίσωση του de Broglie. Για τις περιπτώσεις αυτών των δύο σωματιδίων θα υποθέσουμε ότι όλη η ενέργεια που έχουν είναι κινητική ενέργεια.

$K = \frac{1}{2} m\upsilon^2 = \frac{1}{2m} m^2 \upsilon^2 = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow p = \sqrt{2mE}$. Η ενέργεια των 4eV εκφρασμένη σε Joule είναι $4 \times 1{,}6 \times 10^{-19}\, Joule$

α) Για την περίπτωση του πρωτονίου το μήκος κύματος θα είναι:
$$\lambda_\pi = \frac{h}{p_\pi} = \frac{6{,}626 \times 10^{-34}\, Joule - \sec}{\sqrt{2 \times 1{,}673 \times 10^{-27} \times 1{,}6 \times 10^{-19} \times 4}} = 1{,}4 \times 10^{-11} m = 0{,}14 \overset{o}{\mathrm{A}}.$$

β) Για την περίπτωση του ηλεκτρονίου το μήκος κύματος θα είναι:
$$\lambda_\pi = \frac{h}{p_\pi} = \frac{6{,}626 \times 10^{-34}\, Joule - \sec}{\sqrt{2 \times 9{,}1 \times 10^{-31} \times 1{,}6 \times 10^{-19} \times 4}} = 6{,}1 \times 10^{-10} m = 6{,}1 \overset{o}{\mathrm{A}}.$$

γ) Για την περίπτωση του φωτονίου το μήκος κύματος προσδιορίζεται μέσω της εξίσωσης: $E(eV) = \dfrac{1240}{\lambda(nm)} \Rightarrow \lambda = \dfrac{1240}{4} = 310nm$.

Άσκηση 5:

Η ενέργεια Fermi του νατρίου είναι 3,24eV. Εάν όλη η ενέργεια ενός e που βρίσκεται στην επιφάνεια Fermi είναι κινητική α) Να υπολογιστεί το μήκος κύματος λ_F β) Να υπολογιστεί η ταχύτητα υ_F

Λύση:

α) $K = \dfrac{1}{2}m\upsilon^2 = \dfrac{1}{2m}m^2\upsilon^2 = \dfrac{p^2}{2m} \Rightarrow p = \sqrt{2mE}$. Το μήκος κύματος προσδιορίζεται με την εξίσωση του de Broglie

$\lambda = \dfrac{h}{p} = \dfrac{6{,}626\times10^{-34}\,Joule-\sec}{\sqrt{2\times9{,}1\times10^{-31}\times1{,}6\times10^{-19}\times3{,}24}} = 6{,}8\,\overset{o}{\mathrm{A}}$. Η ταχύτητα Fermi υπολογίζεται από την εξίσωση

$$\lambda_F = \frac{h}{p_F} = \frac{h}{m\upsilon_F} \Rightarrow \upsilon_F = \frac{h}{m\lambda_F} = \frac{6{,}626\times10^{-34}\,Joule-\sec}{9{,}1\times10^{-31}\times0{,}68\times10^{-9}\times3{,}24} = 1{,}07\times10^6\,\frac{m}{\sec}.$$

Άσκηση 6:

Να υπολογιστεί το μήκος κύματος de Broglie λόγω της θερμικής κίνησης των ηλεκτρονίων σε θερμοκρασία 300^0K στον Νάτριο. k_B =$1{,}38\text{x}10^{-23}$ Joule/Kelvin.

Λύση:

Στην άσκηση αυτή μας ζητάνε να υπολογίσουμε το μήκος κύματος του ηλεκτρονίου με την προϋπόθεση ότι έχουμε υιοθετήσει το μοντέλο του αερίου των ελευθέρων ηλεκτρονίων. Στο μοντέλο αυτό τα ηλεκτρόνια δεν καταλαμβάνουν ενεργειακές καταστάσεις (όπως θεωρεί το κβαντικό μοντέλο) αλλά είναι ελεύθερα να κινούνται όπως τα μόρια ενός αερίου. Από την κινητική θεωρία των αερίων ξέρουμε ότι η μέση κινητική ενέργεια των μορίων ενός αερίου που βρίσκεται σε θερμοκρασία T είναι $< K > = \dfrac{1}{2}m\upsilon^2 = \dfrac{n}{2}k_B T$

όπου m η μάζα του μορίου, υ: η θερμική ταχύτητα, k_B : η σταθερά Boltzmann, T η απόλυτη θερμοκρασία και n: οι βαθμοί ελευθερίας του ηλεκτρονίου. Θεωρώντας ότι τα ηλεκτρόνια είναι ελεύθερα σαν τα μόρια των αερίων, δεχόμαστε ότι η μέση ταχύτητα θα δίνεται από την ίδια εξίσωση.

Στην προκειμένη περίπτωση έχουμε ένα τρισδιάστατο αέριο ηλεκτρονίων οπότε n=3. Εισάγουμε τις τιμές στην εξίσωση για να υπολογίσουμε την θερμική ταχύτητα

$$\upsilon^2 = \frac{3kT}{m} \Rightarrow \upsilon = 1{,}17 \times 10^5 m/\sec$$

Παρατηρείστε ότι η ταχύτητα που υπολογίζεται με το μοντέλο του αερίου των ελευθέρων ηλεκτρονίων είναι 10 φορές μικρότερη από αυτή που υπολογίζει το κβαντικό μοντέλο. Αυτό συμβαίνει γιατί η προσέγγιση των ελευθέρων ηλεκτρονίων θεωρεί πως όλα τα ηλεκτρόνια συμμετέχουν στην αγωγιμότητα, ενώ σύμφωνα με το κβαντικό μοντέλο μόνο τα ηλεκτρόνια που βρίσκονται κοντά στη στάθμη Fermi.

Το μήκος κύματος του ηλεκτρονίου είναι $\lambda = \dfrac{h}{m\upsilon} = \dfrac{6{,}626 \times 10^{-34} Joule - \sec}{9{,}1 \times 10^{-31} \times 1{,}17 \times 10^5} = 6{,}2nm$

.

Άσκηση 7:

Στα πειράματα UPS χρησιμοποιείται σαν φωτεινή πηγή ένας σωλήνας ηλίου. Να υπολογιστεί η ενέργεια των μεταβάσεων ανάμεσα στις τρεις πρώτες στάθμες του ατόμου του Ηλίου χρησιμοποιώντας το μοντέλο Bohr.

Λύση:

Το μοντέλο του Bohr ισχλυει μόνο στα άτομα που περιέχουν ένα ηλεκτρόνιο και αυτό γιατί δεν μπορεί να πάρει υπόψη του την αλληλεπίδραση μεταξύ των ηλεκτρονίων. Θα υποογίσουμε την ενέργεια του ηλεκτρονίου σε άν άτομο ηλίου που περιέχει ένα μόνο ηλεκτρόνιο. Στην ολική ενέργεια του ηλεκτρονίου υπάρχει ένας όρος που εκφράζει την κινητική ενέργεια και ένας δεύτερος όρος που περιγράφει την δυναμική ενέργεια. Οπότε $E_{o\lambda} = K + U = \dfrac{1}{2} m\upsilon^2 - k\dfrac{Ze^2}{r}$ (1)

Η ελκτική δύναμη πυρήνα ηλεκτρονίου παίζει τον ρόλο της κεντρομόλου δύναμης.

$$F_K = F_{Cb} \Rightarrow \frac{m\upsilon^2}{r} = k\frac{Ze^2}{r^2} \quad (2)$$

Από την εξίσωση αυτή απλοποιώντας την ακτίνα από τον παρανομαστή και διαιρώντας τα δύο μέλη με το 2 πεοκύπτει ότι:

$$\frac{m\upsilon^2}{2}=\frac{1}{2}k\frac{Ze^2}{r}$$

Από την έκφραση αυτή φαίνεται ότι η κινητική ενέργεια είναι ίση με το μισό της δυναμικής ενέργειας.

$$K=\frac{m\upsilon^2}{2}=-\frac{1}{2}U$$

Εισάγοντας το αποτέλεσμα αυτό στην αρχική εξίσωση (1) της ενέργειας βρίσκουμε ότι αυτή είναι ίση με: $E_{o\lambda}=K+U=-\frac{1}{2}U+U=\frac{1}{2}U$, αντικαθιστώντας την δυναμική ενέργεια προκύπτει ότι $E_{o\lambda}=\frac{1}{2}U=-\frac{1}{2}k\frac{Ze^2}{r}$ (3)

Σε κάθε τροχιά το ηλεκτρόνιο είναι ένα στάσιμο κύμα οπότε το μήκος της τροχιάς θα είναι ίσο με ακέραιο πλήθος μηκών κύματος του ηλεκτρονίου

$$\left.\begin{aligned}2\pi r&=n\cdot\lambda\\ \lambda&=\frac{h}{p}\end{aligned}\right\}\Rightarrow 2\pi r=n\cdot\frac{h}{m\upsilon}\Rightarrow m\cdot\upsilon\cdot r=n\cdot\frac{h}{2\pi}$$

Από την εξίσωση (2) μπορεί κανείς να λύσει ως προς την ταχύτητα οπότε προκύπτει ότι:

$$\upsilon=\sqrt{\frac{k}{m}\frac{Ze^2}{r}}$$

Αντικαθιστώντας στην ισότητα (4) την ταχύτητα προκύπτει μία σχέση που περιέχει μόνο την ακτίνα και μερικές σταθερές

$m\sqrt{\frac{k}{m}\frac{Ze^2}{r}}r=n\cdot\hbar$ λύνοντας ως προς r προκύπτει ότι: $r_n=n^2\frac{\hbar^2}{kmZe^2}$

Οι ποσότητες που περιέχονται στο κλάσμα είναι φυσικές σταθερές $k=9\times10^9\frac{Nt\cdot m^2}{Cb^2}$, $e=1{,}6\times10^{-19}Cb$, $\hbar=1{,}05\times10^{-34}Joule-\sec$, $m=9{,}1\times10^{-31}kgr$,

$\frac{\hbar^2}{kme^2}=5{,}3\times10^{-11}m=0{,}53\overset{o}{\mathrm{A}}$. Οπότε από την εξίσωση $r_n=n^2\frac{\hbar^2}{kmZe^2}$, προκύπτει ότι $r_n=n^2\times\frac{0{,}53\overset{o}{\mathrm{A}}}{Z}$.

Η ενέργεια δίνεται από τη σχέση: $E_n = -\frac{13{,}6eV}{n^2} Z^2$. Για το Ήλιο Z=2 οπότε $E_n = -\frac{54{,}4eV}{n^2}$.

n	E_n (eV)	ΔΕ
1	-54,4	
2	-13,6	(2->1) 40,8 (He II)
3	-6,0	(3->2) 7,6

Άσκηση 8:

α) Να υπολογιστεί το μήκος ελεύθερης διαδρομής του ηλεκτρονίου στο InP σε θερμοκρασία δωματίου. Η ενεργός μάζα του ηλεκτρονίου είναι m*=0,077m_e. Δίνονται m_e=9,1x10^{-31}kgr, k_B=1,38x10^{-23}Joule/Kelvin, ευκινησία των ηλεκτρονίων στο InP μ=0,46m^2/Volt-sec, φορτίο ηλεκτρονίου q=1,6x10^{-19}Cb. β) Εάν η πλεγματική σταθερά είναι ~0,6nm, πόσες πλεγματικές σταθερές είναι το μήκος ελεύθερης διαδρομής; Πόσο πρέπει να είναι το μήκος ενός μικρού αγωγού InP έτσι ώστε να γίνεται η αγωγή βαλλιστικά;

Λύση:

α) Η μέση κινητική ενέργεια των ελευθέρων ηλεκτρονίων που οφείλεται στην θερμική κίνηση είναι $\frac{1}{2} m^* \upsilon^2 = \frac{n}{2} kT$

όπου m^* η ενεργός μάζα του ηλεκτρονίου στο InP, υ: η θερμική ταχύτητα, k: η σταθερά Boltzmann, T: η απόλυτη θερμοκρασία και n: οι βαθμοί ελευθερίας του ηλεκτρονίου. Στην προκειμένη περίπτωση έχουμε ένα τρισδιάστατο αέριο ηλεκτρονίων οπότε n=3. Εισάγουμε τις τιμές στην εξίσωση για να υπολογίσουμε την θερμική ταχύτητα.

$$\upsilon^2 = \frac{3kT}{m^*} \Rightarrow \upsilon = 4{,}33 \times 10^5 m/\sec.$$

Ο χρόνος εφησυχασμού υπολογίζεται από την εξίσωση $\tau = \frac{\mu m^*}{q} = 1{,}9 \times 10^{-13} \sec$

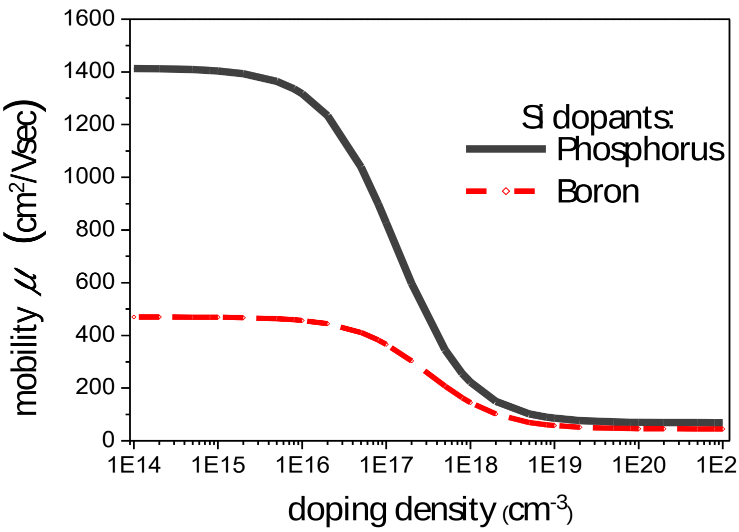
Το μήκος ελεύθερης διαδρομής είναι:

$$l_e = \upsilon_{o\lambda} \cdot \tau = 4{,}33 \times 10^5 \times 1{,}9 \times 10^{-13} = 8{,}3 \times 10^{-8} = 83nm$$

β) Το πλήθος πλεγματικών σταθερών που διανύει το ηλεκτρόνιο μέχρι την επόμενη σκέδαση είναι $N = \frac{83}{0,6} = 138$. Το μήκος ενός αγωγού για βαλλιστική αγωγιμότητα πρέπει να είναι της τάξης του μήκους ελεύθερης διαδρομής.

Άσκηση 9:

Να υπολογιστεί το μήκος ελεύθερης διαδρομής του ηλεκτρονίου σε πυρίτιο εμπλουτισμένο με φώσφορο σε θερμοκρασία δωματίου. Η πυκνότητα των προσμίξεων είναι 10^{17}άτομα P/cm^3. Η ενεργός μάζα του ηλεκτρονίου είναι $m^*=0{,}26m_e$. Δίνονται $m_e=9{,}1\times10^{-31}$kgr, $k_B=1{,}38\times10^{-23}$Joule/Kelvin, το φορτίο ηλεκτρονίου $q=1{,}6\times10^{-19}$Cb.



Λύση:

Η μέση κινητική ενέργεια των ελευθέρων ηλεκτρονίων που οφείλεται στην θερμική κίνηση είναι $\frac{1}{2}m^*\upsilon^2 = \frac{n}{2}kT$

όπου m* η ενεργός μάζα του ηλεκτρονίου στο πυρίτιο, υ: η θερμική ταχύτητα, k: η σταθερά Boltzmann, T: η απόλυτη θερμοκρασία και n: οι βαθμοί ελευθερίας του ηλεκτρονίου. Στην προκειμένη περίπτωση έχουμε ένα τρισδιάστατο αέριο ηλεκτρονίων οπότε n=3. Εισάγουμε τις τιμές στην εξίσωση για να υπολογίσουμε την θερμική ταχύτητα.

$\upsilon^2 = \frac{3kT}{m^*} \Rightarrow \upsilon = 2{,}3\times10^5\, m/\sec$. Η ολική ταχύτητα του ηλεκτρονίου είναι το διανυσματικό άθροισμα της θερμικής ταχύτητας και της ταχύτητας ολίσθησης. Η ταχύτητα ολίσθησης είναι μερικές τάξεις μεγέθους μικρότερη από την θερμική, για αυτό σε καλή προσέγγιση ισχύει ότι $\upsilon_{o\lambda} = \upsilon$. Η ευκινησία των ηλεκτρονίων προκύπτει από την γ. παράσταση και είναι 800cm^2/V-sec.

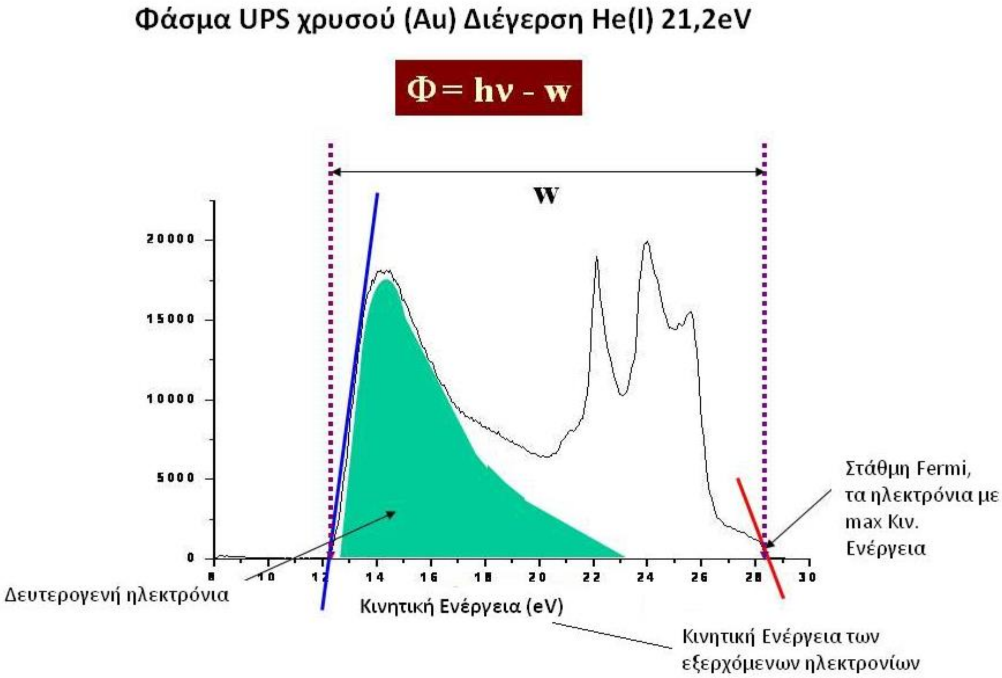
Οπότε $\tau = \frac{\mu m^*}{q} = 1{,}2\times10^{-13}$

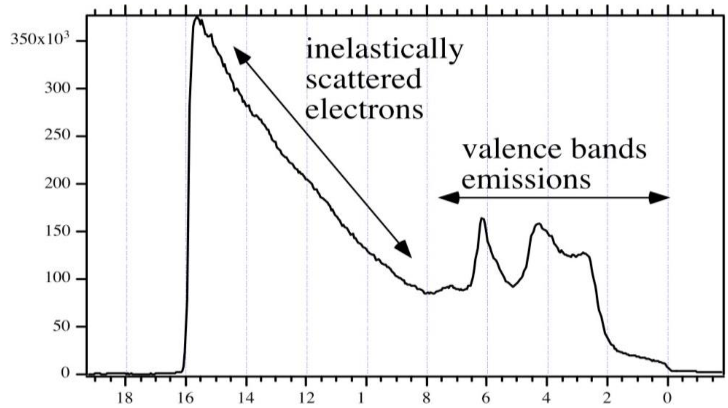
Το μήκος ελεύθερης διαδρομής είναι :

$$l_e = \upsilon_{o\lambda} \cdot \tau = 2{,}3 \times 10^5 \times 1{,}2 \times 10^{-13} = 2{,}76 \times 10^{-8} = 28nm$$

Άσκηση 10:

Δίνεται το φάσμα UPS Au, He (I), 21.21eV. α) Ποιές από τις κορυφές του φάσματος δίνουν πληροφορίες για την πυκνότητα καταστάσεων στη ζώνη σθένους; β) Ποια κορυφή αντιστοιχεί στη δευτερογενή εκπομπή ηλεκτρονίων; γ) Να εξηγηθεί πως υπολογίζεται το έργο εξαγωγής. δ) Ποια περιμένετε να είναι η μορφή του φάσματος κοντά στην στάθμη Fermi; ε) Ποια είναι η διαφορά του πρώτου και του δεύτερου φάσματος; στ) Να σχεδιαστεί το διάγραμμα ενέργειας των ηλεκτρονίων.





Λύση:

α) Οι κορυφές στο δεξί άκρο του φάσματος προέρχονται από πρωτογενή ηλεκτρόνια, δηλαδή ηλεκτρόνια της ζώνης σθένους τα οποία απορρόφησαν ένα φωτόνιο και έφτασαν μέχρι την επιφάνεια του μετάλλου χωρίς να υποστούν μη ελαστικές σκεδάσεις (δηλαδή χωρίς να χάσουν ενέργεια) και στη συνέχεια βγήκαν απ' αυτό. Το σκαλί που φαίνεται στο δεξί άκρο οφείλεται στα ηλεκτρόνια που εξήχθηκαν από την στάθμη Fermi κατά συνέπεια έχουν μέγιστη κινητική ενέργεια. Διακρίνονται δύο κορυφές στα ~4 και ~6eV χαμηλότερα από την στάθμη Fermi. Οι κορυφές αυτές δείχνουν ότι για αυτές τις τιμές ενέργειας εξάγονται περισσότερα ηλεκτρόνια κατά συνέπεια σε μια πρώτη ανάγνωση μπορεί κανείς να πει ότι η πυκνότητα ενεργειακών καταστάσεων θα είναι μεγαλύτερη στα ~4 και ~6eV χαμηλότερα από την στάθμη Fermi.

β) Η κορυφή στο αριστερό άκρο του φάσματος οφείλεται σε δευτερογενή ηλεκτρόνια, δηλαδή σε ηλεκτρόνια της ζώνης σθένους, τα οποία είχαν ενέργεια σχετικά κοντά στην ενέργεια της στάθμης Fermi απορρόφησαν την ενέργεια ενός φωτονίου αλλά κατά την διαδρομή τους προς την επιφάνεια του μετάλλου σκεδάστηκαν μη ελαστικά (δηλαδή έχασαν κινητική ενέργεια) και βγήκαν έξω από το μέταλλο με πολύ μικρότερη ενέργεια από αυτή που θα είχαν εάν δεν είχαν υποστεί μη ελαστικές σκεδάσεις. Η κορυφή των δευτερογενών ηλεκτρονίων σκεπάζει τις όποιες πληροφορίες μεταφέρει το τμήμα του διαγράμματος το οποίο οφείλεται στα πρωτογενή ηλεκτρόνια σχετικά με την πυκνότητα ενεργειακών καταστάσεων στο μέταλλο. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η κορυφή των δευτερογενών ηλεκτρονίων είναι ιδιαίτερα σημαντική γιατί μας επιτρέπει να υπολογίσουμε το εύρος του φάσματος και από εκεί το έργο εξαγωγής. Επιπλέον θα πρέπει να σημειωθεί ότι η πληροφορία που χάνουμε σε ότι αφορά την πυκνότητα ενεργειακών καταστάσεων δεν είναι και τόσο σημαντική γιατί κατά την μελέτη των ηλεκτρικών ιδιοτήτων ενδιαφερόμαστε μόνο για τα ηλεκτρόνια που βρίσκονται κοντά στη στάθμη Fermi μιας και αυτά είναι που συμμετέχουν στην αγωγιμότητα.

γ) Δίνεται ότι η ενέργεια των φωτονίων κατά την μέτρηση είναι 21,21eV. Από το διάγραμμα προκύπτει ότι η μέγιστη κινητική ενέργεια των εξερχομένων ηλεκτρονίων είναι περίπου 28eV ενώ η ελάχιστη είναι ~16eV. Γνωρίζουμε ότι τα ηλεκτρόνια που εξέρχονται με την μέγιστη κινητική ενέργεια είναι αυτά που βρίσκονται επάνω στη στάθμη Fermi και η μέγιστη Κινητική ενέργεια θα είναι (21,21-φ)eV. Αντίστοιχα η ελάχιστη Κινητική ενέργεια θα είναι 0eV ενώ από το διάγραμμα προκύπτει να είναι ~16eV. Οι αυξημένες τιμές στο διάγραμμα οφείλονται στο γεγονός ότι τα εξερχόμενα ηλεκτρόνια επιταχύνονται από ένα ηλεκτρικό πεδίο. Με βάση αυτό το συλλογισμό, η τιμή της ενέργειας για το σκαλί στα δεξιά του διαγράμματος θα είναι $K_{max}+qV_{εξωτ}$. Η τιμή της ενέργειας για το αριστερό άκρο του διαγράμματος θα είναι $qV_{εξωτ}$. Εάν κανείς αφαιρέσει τις τετμημένες του αριστερού από το δεξί άκρο του διαγράμματος θα βρει την μέγιστη Κινητική ενέργεια. Με βάση την εξίσωση του Einstein το έργο εξαγωγής θα είναι $φ=hf-K_{max}$. Στην προκειμένη περίπτωση 21,21-16=5,2eV

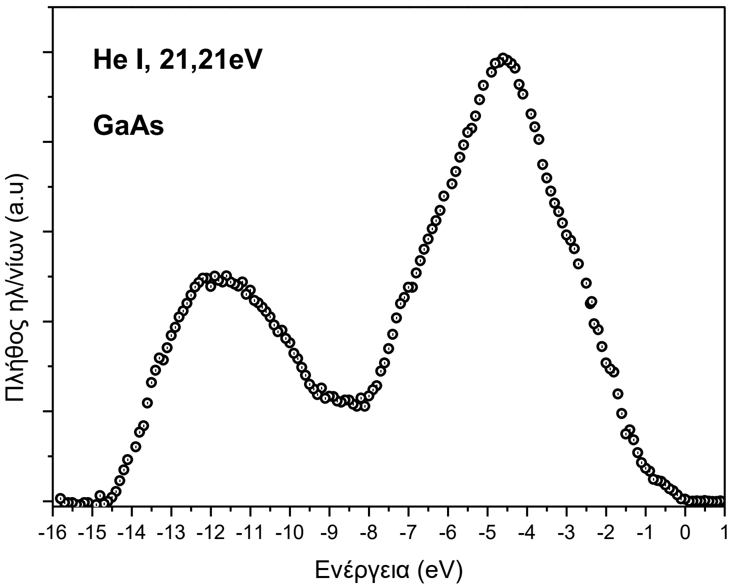
δ) Σαν ένα σκαλί γιατί οι ενεργειακές καταστάσεις που βρίσκονται πάνω από την στάθμη Fermi είναι κενές οπότε δεν μπορούν να εξαχθούν ηλεκτρόνια από αυτές, ενώ οι καταστάσεις κάτω από την στάθμη Fermi είναι γεμάτες. Στην πραγματικότητα η μορφή του φάσματος θα είναι σαν ένα στρογγυλεμένο σκαλί και αυτό γιατί η πληρότητα των κατστάσεων ακολουθεί την κατανομή Fermi-Dirac οπότε η πληρότητα καταστάσεων απάνω στην στάθμη Fermi είναι 50%.

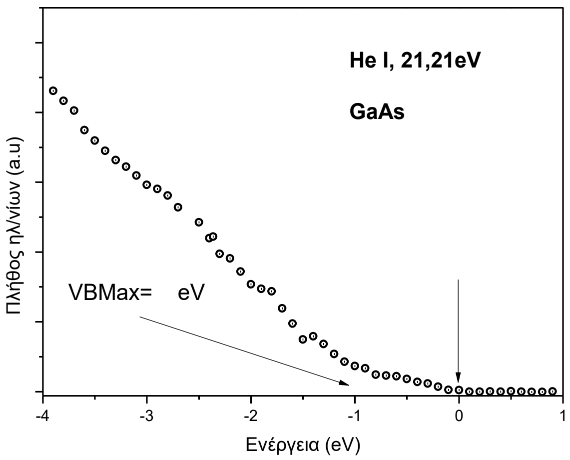
ε) Στο δεύτερο διάγραμα ο οριζόντιος άξονας δίνει την τιμή της ενέργειας σύνδεσης που είχαν τα ηλεκτρόνια όταν βρισκόντουσαν μέσα στο δείγμα Au μετρημένη σε eV. Το δεύτερο διάγραμα προκύπτει από την μετατόπιση του πρώτου φάσματος προς τα δεξιά έτσι ώστε το σκαλί της στάθμης Fermi να φτάσει στην τιμή ενέργειας σύνδεσης μηδέν. Ο οριζόντιος άξονας δεν αντιστοιχεί στην Κινητική ενέργεια αλλά στην ενέργεια σύνδεσης. Πράγματι η ενέργεια σύνδεσης για τα ηλεκτρόνια που βρίσκονται στην στάθμη Fermi είναι μηδέν.

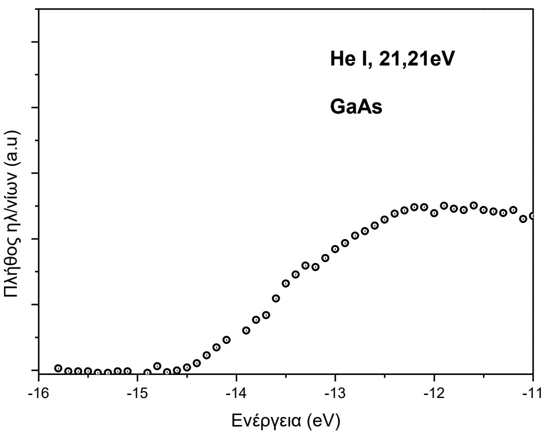
στ) Περιμένουμε ότι η πυκνότητα καταστάσεων θα αυξάνεται απότομα για ενέργειες που απέχουν περισσότερο από 2eV από τη στάθμη Fermi και θα παρουσιάζει μέγιστα στα 4 και 6eV κάτω από τη στάθμη Fermi.

Άσκηση 11:

Δίνεται το φάσμα UPS GaAs, He (I), 21.21eV. α) Ποιές από τις κορυφές του φάσματος δίνουν πληροφορίες για την πυκνότητα καταστάσεων στη ζώνη σθένους; β) Ποια κορυφή αντιστοιχεί στη δευτερογενή εκπομπή ηλεκτρονίων; γ) Να υπολογιστεί το έργο εξαγωγής. δ) Να σχεδιαστεί το ενεργειακό διάγραμμα ζωνών εάν είναι γνωστό ότι το ενεργειακό χάσμα του GaAs είναι 1,43eV.







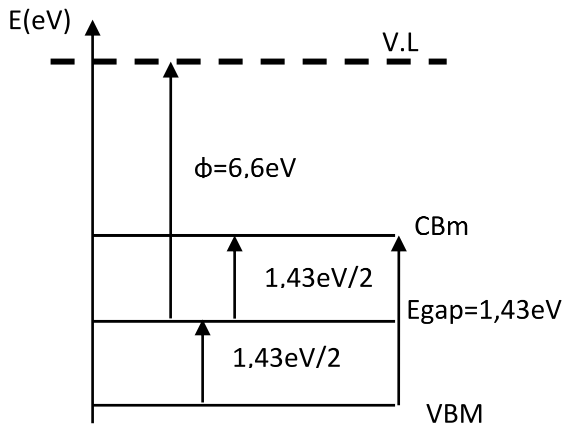
Λύση:

Η κορυφή στα δεξιά οφείλεται στην πρωτογενή εκπομπή ηλεκτρονίων και δίνει πληροφορίες για την ζώνη σθένους. Το GaAs είναι ημιαγωγός οπότε η ζώνη σθένους και η ζώνη αγωγιμότητας χωρίζονται από το ενεργειακό χάσμα (band Gap). Στους μη-εκφυλισμένους ημιαγωγούς (δηλαδή σε ημιαγωγούς που έχουν μέτρια νόθευση) η στάθμη Fermi βρίσκεται μέσα στο ενεργειακό χάσμα, πράγμα που σημαίνει ότι το έργο εξαγωγής φ (απόσταση της στάθμης Fermi από το vacuum level) είναι διαφορετικό από την ενέργεια ιονισμού (απόσταση από το μέγιστο της ζώνης σθένους VBM στο vacuum level). Είπαμε ότι σε μια πρώτη προσέγγιση η στάθμη Fermi ενός μετάλλου χωρίζει τις γεμάτες από τις άδειες καταστάσεις. Αυτή η περιγραφή δεν μπορεί να ισχύει για την περίπτωση ενός ημιαγωγού όπου η στάθμη Fermi βρίσκεται μέσα στο ενεργειακό χάσμα οπότε δεν υπάρχουν ενεργειακές καταστάσεις στην άμεση γειτονιά πάνω και κάτω από τη στάθμη Fermi. Για τον λόγο αυτό στάθμη Fermi ενός ημιαγωγού είναι ένα θεωρητικό κατασκεύασμα. Για να γίνει κατανοητό το νόημα της στάθμης Fermi σε ένα ημιαγωγό θα πρέπει κενείς να αναφερθεί στην κατανομή Fermi-Dirac η οποία δίνει τον βαθμό κατάληψης των διαφόρων καταστάσεων. Σε αυτή την κλίμακα η στάθμη Fermi αντιστοιχεί στην ενέργεια για την οποία ο βαθμός κατάληψης είναι ίσος με 50%. Ακόμα κι αν δεν υπάρχουν ηλεκτρόνια στη στάθμη Fermi ενός ημιαγωγού, το έργο εξαγωγής μπορεί να μετρηθεί με μετρήσεις UPS.

Το επίπεδο Fermi προσδιορίζεται με μέτρηση UPS από ένα δείγμα Ag το οποίο βρίσκεται σε ηλεκτρική επαφή με το δείγμα ημιαγωγού, GaAs στην προκειμένη περίπτωση, που εξετάζεται. Το επίπεδο Fermi έχει σημειωθεί με ένα βέλος στο διάγραμμα κάτω αριστερά.

β) Η κορυφή στα αριστερά του φάσματος προκύπτει από τα δευτερογενή ηλεκτρόνια που εκπέμπονται από το δείγμα. Αναμένεται ότι η ισχύς της κορυφής αυτής θα αυξάνεται όσο μειώνεται η κρυσταλλικότητα του δείγματος.

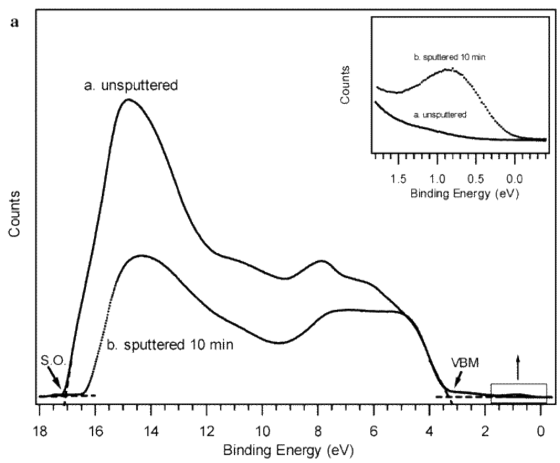
γ) Το εύρος του φάσματος φαίνεται να είναι 14,6eV οπότε το έργο εξαφωγής θα είναι 21,21-14,60=6,60eV

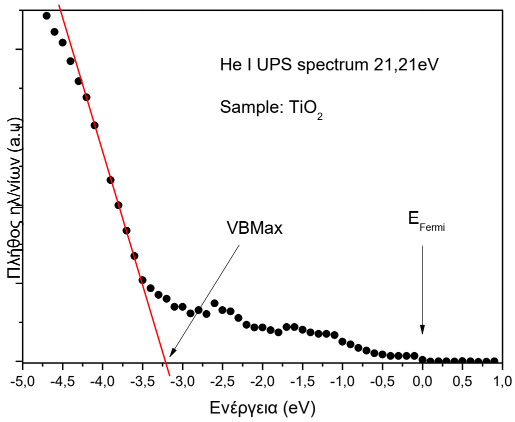


δ) Στην περίπτωση ενός αυτοφυούς ημιαγωγού (intrinsic semiconductor) δηλαδή ενός ημιαγωγού που δεν περιέχει προσμίξεις, η στάθμη Fermi βρίσκεται στο μέσον του ενεργειακού χάμσατος. Το μέγιστο της ζώνης σθένους VBM υπολογίζεται ως εξής: Χαράζουμε δύο ευθείες που προσεγγίζουν το μέτωπο και το πάτημα του σκαλιού κοντά στα 0eV. Από το σημείο τομής προσδιορίζεται το VBM. Στην προκειμένη περίπτωση βρίσκεται ~0,7eV πιό κάτω από τη στάθμη Fermi. Το ενεργειακό χάσμα είναι (από άλλες μετρήσεις 1,43eV) επομένως, το ελάχιστο της ζώνης αγωγιμότητας CBm θα βρίσκεται 1,43eV/2 πιό πάνω από τη στάθμη Fermi.

Άσκηση 12:

Δίνεται το φάσμα UPS TiO_2, He (I), 21.21eV. α) Ποιές από τις κορυφές του φάσματος δίνουν πληροφορίες για την πυκνότητα καταστάσεων στη ζώνη σθένους; β) Ποια κορυφή αντιστοιχεί στη δευτερογενή εκπομπή ηλεκτρονίων; γ) Να ερμηνεύσετε τη μείωση της έντασης της κορυφής στις χαμηλές ενέργειες μετά την ιοντοβολή. δ) Να υπολογιστεί το έργο εξαγωγής πριν και μετά την ιοντοβολή. ε) Να σχεδιαστεί το διάγραμμα ενέργειας των ηλεκτρονίων εάν είναι γνωστό ότι το ενεργειακό χάσμα του TiO_2 είναι 3,3eV.

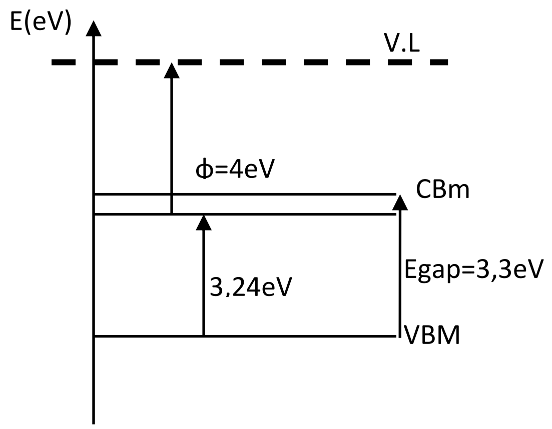




Λύση:

α) Οι κορυφές μέχρι τα 8eV όπως φαίνονται στο Σχήμα
β) Οι κορυφές μετά τα ~12eV
γ) Η μείωση της έντασης της κορυφής των δευτερογενών ηλεκτρονίων μετά την ιοντοβολή δεν μπορεί να ερμηνευτεί μέσω επίκλησης της χειρότερης κρυσταλλικότητας μετά την ιοντοβολή. Αναγκαστικά θα πρέπει κανείς να επικαλεστεί επιφανειακές καταστάσεις ή κρυσταλλικές ατέλειες που δημιουργήθηκαν κατά την ανάπτυξη (κατασκευή) του δείγματος οι οποίες απομακρύνθηκαν με την ιοντοβολή.
δ) Το εύρος του φάσματος (μετρημένο από την τιμή μηδέν του οριζόντιου άξονα) πριν την ιοντοβολή είναι 17,2eV και μετά την ιοντοβολή 16,6eV. Το έργο εξαγωγής προσδιορίζεται αφαιρώντας από τα 21,21eV των φωτονίων το εύρος του φάσματος UPS. $\phi = E_{\phi\omega\tau} - w = 21{,}21 - 17{,}2 \approx 4eV$

ε) Στο διάγραμμα παρουσιάζονται τα φάσματα UPS οξειδίου του Ti πριν και μετά την ιοντοβολή.



Για το φάσμα πριν την ιοντοβολή: Το μέγιστο της ζώνης σθένους (VBM) βρίσκεται 3,24eV χαμηλότερα από τη στάθμη Fermi η οποία αντιστοιχεί σε ενέργεια σύνδεσης 0eV. Για να προσδιοριστεί το μέγιστο της ζώνης σθένους προσεγγίζουμε το δεξιό μέτωπο του φάσματος με μια ευθεία γραμμή (γραμμική προσέγγιση για τα πειραματικά σημεία) και σημειώνουμε το σημείο τομής του άξονα της ευθείας με τον άξονα της ενέργειας σύνδεσης. Το Ενεργειακό χάσμα του TiO_2 είναι (από άλλες μετρήσεις) 3,3eV.