**ΑΣΚΗΣΗ 2.1**

Picture1_24_10_2011**α)** Για δεδομένη αρχική ταχύτητα υ0, με ποια γωνία φ πρέπει να πετάξουμε μια μπάλα έτσι ώστε να φθάσει στο μέγιστο βεληνεκές; Θεωρείστε ότι το έδαφος είναι οριζόντιο, ότι η μπάλα ξεκινά από το έδαφος και αγνοήστε τις αντιστάσεις.

**β)** Υπολογίστε το μέγιστο βεληνεκές του ερωτήματος α)

**γ)** Υπολογίστε μόνο με διαστατική ανάλυση το μέγιστο βεληνεκές. Συγκρίνετε με την απάντηση του ερωτήματος β) και σχολιάστε ανάλογα.

(Υπόδειξη: 2 sinφ cosφ = sin2φ)

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ**

**α)** Αρχικά, θα πρέπει να βρούμε την εξάρτηση του βεληνεκούς από την αρχική γωνία φ στην κίνηση βολής. Ένας γρήγορος τρόπος είναι να ξεκινήσουμε από την εξάρτηση της θέσης x από το χρόνο t (στον άξονα x έχουμε ευθύγραμμη ομαλή κίνηση):

 (1)

Στη συνέχεια θα βρούμε το συνολικό χρόνο της βολής. Θα κάνουμε χρήση του γεγονότος ότι ο χρόνος για να φθάσει το σώμα στο μέγιστο ύψος, , είναι ο μισός του συνολικού χρόνου, λόγω συμμετρίας. Στο μέγιστο ύψος, , οπότε από τη σχέση (στον άξονα y έχουμε ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση):

 (2)

λαμβάνουμε:

 (3)

δηλαδή ο συνολικός χρόνος κίνησης, t, θα είναι:

 (4)

Αντικαθιστώντας τη σχέση (4) στη σχέση (1) βρίσκουμε το βεληνεκές, R, ίσο με:

 (5)

Ο όρος sin2φ λαμβάνει τη μέγιστη τιμή 1 όταν 2φ=π/2. Συνεπώς, το μέγιστο βεληνεκές επιτυγχάνεται για αρχική γωνία φ=π/4.

**β)** Το μέγιστο βεληνεκές, Rmax, προκύπτει εύκολα από τη σχέση (5) για sin2φ=1:

 (6)

**γ)** Για να εφαρμόσουμε διαστατική ανάλυση θα πρέπει να κατανοήσουμε τα φυσικά μεγέθη που χαρακτηρίζουν το πρόβλημα. Στο συγκεκριμένο θέμα τα ζητούμενα μεγέθη είναι η αρχική ταχύτητα, , και η επιτάχυνση της βαρύτητας, . Τώρα, πρέπει να δημιουργήσουμε μια παράσταση με τα υ0 και g με διαστάσεις μήκους, τη διάσταση του βεληνεκούς, λαμβάνοντας υπόψη ότι:

 (7)

Έστω ότι η ζητούμενη παράσταση είναι:

(8)

Απομένει να προσδιορίσουμε τους εκθέτες και . Από τις εξισώσεις (7) και (8) έχουμε:

 (9)

επομένως για να έχει η παράσταση (9) διαστάσεις μήκους θα πρέπει:

α+β=1 και –α-2β=0 (10)

που έχει λύση α=2 και β=-1. Αντικαθιστώντας τη σχέση (10) στην εξίσωση (8) παίρνουμε:

που είναι ίδια με την απάντηση που βρήκαμε στο ερώτημα β). Βέβαια, προσέξτε ότι οποιαδήποτε απόσταση του προβλήματος της βολής θα είναι σύμφωνα με τη διαστατική ανάλυση ανάλογη του παράγοντα . Το γεγονός ότι εδώ το αποτέλεσμα της διαστατικής ανάλυσης συμφωνεί με εκείνο του μέγιστου βεληνεκούς είναι τυχαίο. Έχετε κατά νου ότι η διαστατική ανάλυση αδυνατεί να μας δώσει σταθερές. Επομένως, η συμφωνία που βρήκαμε οφείλεται στο ότι ο τύπος του μέγιστου βεληνεκούς δεν περιέχει σταθερές.

ΑΣΚΗΣΗ1Α**ΑΣΚΗΣΗ 2.2**

Σώμα μάζας m = 1Kg κινείται σε ευθύγραμμη τροχιά με την ταχύτητά του σε συνάρτηση με το χρόνο, υ(t), να δίνεται στο διπλανό σχήμα.

**α)** να δώσετετον τύπο της συνάρτησης υ(t).

**β)** να κάνετε τα γραφήματα της επιτάχυνσης με το χρόνο, α(t), και της θέσης με το χρόνο, x(t).

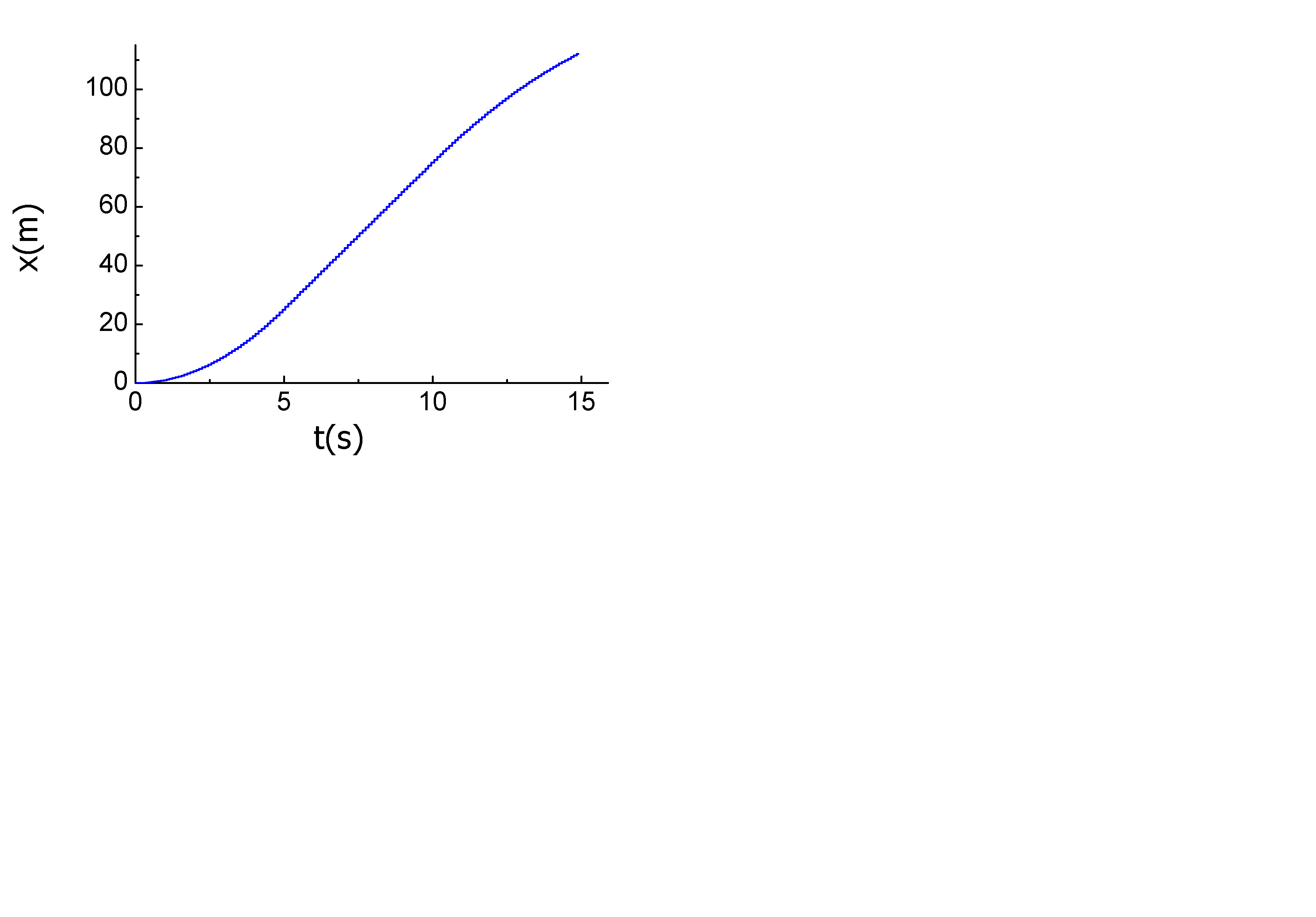
**γ)** να δώσετε τους τύπους της συνάρτησης α(t) και της συνάρτησης x(t).

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ**

**α)** Η συνάρτηση υ(t) είναι:

 (1)

**β)** Από το γράφημα της εκφώνησης και τη σχέση (1) παρατηρούμε ότι: για 0 ≤ t ≤ 5 s έχουμε ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με α = 2 m/s2, για 5 ≤ t ≤ 10 s έχουμε ευθύγραμμη ομαλή κίνηση και για 10 ≤ t ≤ 15 s έχουμε ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση με α = -1 m/s2, οπότε έχουμε τα παρακάτω γραφήματα:

ΑΣΚΗΣΗ1b

**γ)** Εφαρμόζοντας τις σχέσεις  και , λαμβάνοντας υπόψη τα κατάλληλα όρια και το ερώτημα β οι ζητούμενες συναρτήσεις είναι:

**ΑΣΚΗΣΗ 2.3**

Σώμα μάζας m=1 Kg ξεκινά από την ηρεμία και διαγράφει λεία κυκλική οριζόντια τροχιά ακτίνας R. Το μέτρο της ταχύτητάς του, υ, μεταβάλλεται με σταθερό ρυθμό, Α>0. Όταν το σώμα συμπληρώσει μια περιστροφή να εκφράσετε σε συνάρτηση με την ακτίνα R και την περίοδο Τ:

**α)** την επιτρόχια επιτάχυνσή του.

**β)** την κεντρομόλο επιτάχυνσή του.

**γ)** την εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει το διάνυσμα της επιτάχυνσης με την ακτίνα που συνδέει το σώμα με το κέντρο του κύκλου

**δ)** τη διάσταση της σταθεράς Α

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ**

**α)** από την εκφώνηση έχουμε για την επιτρόχια επιτάχυνση:

(1)

Ολοκληρώνοντας την (1) έχουμε:

(2)

(3)

Όταν το σώμα συμπληρώσει μια περιστροφή σε χρόνο μιας περιόδου,

οπότε η επιτρόχια επιτάχυνση είναι:

**β)** η κεντρομόλος επιτάχυνση είναι:

**γ)** η κεντρομόλος επιτάχυνση έχει την ακτινική διεύθυνση και αφού , η εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει το διάνυσμα της επιτάχυνσης με την ακτίνα που συνδέει το σώμα με το κέντρο του κύκλου είναι:

**δ)**

**ΑΣΚΗΣΗ 2.4**

Σώμα μάζας m = 1Kg κινείται σε ευθύγραμμη οριζόντια και λεία τροχιά με την επιτάχυνσή του σε συνάρτηση με τη θέση του, , να δίνεται από τη σχέση (σε m/s2). Για δίνεται ότι, ενώ για . Η επιτάχυνση έχει οριζόντια διεύθυνση.

**α)** να βρείτετη συνάρτηση .

**β)** να βρείτε την κλίση της συνάρτησης .

**γ)** να υπολογίσετε τη θέση του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο, .

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ**

**α)**

**β)** Η κλίση της συνάρτησης είναι η σταθερά με διάσταση:

**γ)**

**ΑΣΚΗΣΗ 2.5**

Η ομαλή κυκλική κίνηση πάνω σε κύκλο ακτίνας που βρίσκεται στο επίπεδο μπορεί να περιγραφεί από τις παρακάτω εξισώσεις κίνησης:

α) να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας.

β) να δείξετε ότι η ταχύτητα είναι εφαπτόμενη στην τροχιά.

γ) να υπολογίσετε το μέτρο της επιτάχυνσης.

δ) να δείξετε ότι η επιτάχυνση είναι κεντρομόλος.

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ**

**α)** Υπολογίζουμε τις συνιστώσες της ταχύτητας:

*,*

οπότε το μέτρο της ταχύτητας είναι:

**β)** Στην κυκλική κίνηση το διάνυσμα θέσης, , συμπίπτει με την ακτίνα του κύκλου. Επομένως, για να δείξουμε ότι η ταχύτητα, , είναι εφαπτόμενη στην τροχιά αρκεί να δείξουμε ότι είναι κάθετη στο διάνυσμα θέσης. Μαθηματικά, αυτό σημαίνει πως θα πρέπει:

που ισχύει.

**γ)** Υπολογίζουμε τις συνιστώσες της επιτάχυνσης:

*,*

οπότε το μέτρο της επιτάχυνσης είναι:

**δ)** Όπως στο ερώτημα β) για να δείξουμε ότι η επιτάχυνση είναι κεντρομόλος αρκεί να δείξουμε ότι είναι αντιπαράλληλη στο διάνυσμα θέσης. Μαθηματικά, αυτό σημαίνει πως θα πρέπει:

Ισχύει ότι:

**ΑΣΚΗΣΗ 2.6**

Σώμα μάζας κινείται στο επίπεδο xy, με τις εξισώσεις κίνησης να είναι και , σε μέτρα.

**α)** να βρείτεσυναρτήσει του χρόνου το διάνυσμα θέσης, , και την ταχύτητα,

**β)** να βρείτεσε συνάρτηση του χρόνου την επιτάχυνση .

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ**

**α)** Από την εκφώνηση:

(1)

Επίσης,

Δηλαδή:

(2)

**β)** Ισχύει:

(3)

**ΑΣΚΗΣΗ 2.7**

|  |  |
| --- | --- |
| Σώμα μάζας κινείται σε ευθύγραμμη οριζόντια και λεία τροχιά με τη θέση του σε συνάρτηση με το χρόνο, , να δίνεται στο διπλανό σχήμα όπου η αρχή των αξόνων είναι το σημείο (0,0). Για δίνεται ότι . Αρχικά, για , το σώμα κινείται με ομαλά μεταβαλλόμενη ταχύτητα και το ίδιο ισχύει για .  **α)** να υπολογίσετε τη συνάρτηση , για το διάστημα s. |  |
| **β)** να υπολογίσετε την ταχύτητα σε συνάρτηση με το χρόνο, , για το διάστημα s.  **γ)** να βρείτε τη συνάρτηση της θέσης του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο, , για το διάστημα s. | |

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ**

**α)** Σύμφωνα με την εκφώνηση, αφού για και για το σώμα κινείται με ομαλά μεταβαλλόμενη ταχύτητα στα χρονικά αυτά διαστήματα η κίνηση είναι ομαλά μεταβαλλόμενη. Για το χρονικό διάστημα βλέπουμε από το γράφημα ότι η θέση είναι ανάλογη του χρόνου. Επομένως, για η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλή με . Τώρα, για από το γράφημα βλέπουμε ότι πρόκειται για ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση και με αφού για δίνεται ότι θα έχουμε ότι για το συγκεκριμένο χρονικό διάστημα θα ισχύει:

(1)

(2)

Παρατηρώντας ότι για έχουμε εύκολα βρίσκουμε ότι .

Επιπλέον, για από το γράφημα βλέπουμε ότι πρόκειται για ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση και για το συγκεκριμένο χρονικό διάστημα θα ισχύει:

(3)

όπου και, με βάση τη σχέση (2), . Παρατηρώντας ότι για έχουμε βρίσκουμε ότι .

*Προσοχή: για να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση (3) για το χρονικό διάστημα λαμβάνουμε ως αρχικό χρονικό σημείο το , επομένως η χρονική στιγμή αντιστοιχεί σε χρονικό διάστημα 1s.*

Τελικά, η επιτάχυνση δίνεται από τη συνάρτηση:

(4)

**β)** Από τη σχέση (2) είναι:

Για η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλή, άρα:

και τέλος για θα ισχύει:

Τελικά, η ταχύτητα δίνεται από τη συνάρτηση:

(5)

**γ)** Από τη σχέση (1) είναι:

Για η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλή, με ταχύτητα , άρα:

Τέλος, για από τη σχέση (3) έχουμε:

Τελικά, η θέση δίνεται από τη συνάρτηση:

**ΑΣΚΗΣΗ 2.8**

Σώμα κινείται σε οριζόντια ευθεία με επιτάχυνση που δίνεται από τη σχέση . Δίνεται ότι για  ισχύει  και . Να υπολογιστούν η ταχύτητα, η επιτάχυνση και το διάστημα που διάνυσε το σώμα συναρτήσει του χρόνου. (Ιωάννου-Τρικαλινός σελ.40)

**ΑΣΚΗΣΗ 2.9**

Το διάνυσμα θέσης ενός κινητού δίνεται από την εξίσωση όπου α και b σταθερές. Να υπολογιστούν τα διανύσματα της ταχύτητας και της επιτάχυνσης καθώς και τα μέτρα τους. Να υπολογιστεί η γωνία των διανυσμάτων της ταχύτητας και της επιτάχυνσης.

**ΑΣΚΗΣΗ 2.10**

Η επιτάχυνση ενός σώματος που κινείται ευθύγραμμα δίνεται από τη σχέση:  . Υπολογίστε την ταχύτητα και το διάστημα που διανύει το σώμα σαν συνάρτηση του χρόνου, αν ξέρουμε ότι τη χρονική στιγμή είναι  και . (Ιωάννου-Τρικαλινός, Παράδειγμα σελ. 39)

**ΑΣΚΗΣΗ 2.11**

Σώμα κινείται στον άξονα x με εξίσωση κίνησης και ο χρόνος σε sec. Να βρεθούν η ταχύτητα και η επιτάχυνση. β) Η μέση ταχύτητα και η μέση επιτάχυνση το χρονικό διάστημα από  έως . (Παράδειγμα 5.4. Alonso-Finn)

**ΑΣΚΗΣΗ 2.12**

Σώμα κινείται στον άξονα x με ταχύτητα . Εάν είναι γνωστό ότι για  είναι , να βρεθεί εάν το κινητό θα περάσει ξανά από το σημείο  με ποια ταχύτητα και ποια επιτάχυνση.

**ΑΣΚΗΣΗ 2.13**

Σώμα κινείται στον άξονα x με επιτάχυνση . Εάν είναι γνωστό ότι την χρονική στιγμή  είναι  και , να προσδιοριστούν οι εξισώσεις της ταχύτητας και της επιτάχυνσης συναρτήσει του χρόνου.

**ΑΣΚΗΣΗ 2.14**

Σώμα κινείται στον άξονα x με επιτάχυνση , όπου  είναι κάποια σταθερή ποσότητα. Εάν είναι γνωστό ότι την χρονική στιγμή  η ταχύτητα είναι  και η θέση , να προσδιοριστεί η εξίσωση της θέσης του κινητού συναρτήσει του χρόνου.

**ΑΣΚΗΣΗ 2.15**

Ένα αρχικά ακίνητο σώμα πέφτει από την κορυφή ενός κτηρίου ύψους . Το τελευταίο δευτερόλεπτο της κίνησής του διανύει απόσταση . Να υπολογιστούν: α) το ύψος  του κτηρίου και η διάρκεια της κίνησης. β) Να ερμηνεύσετε την μη αποδεκτή λύση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης, ως προς  , που θα βρείτε. (Halliday-Resnick, 2.60)

**ΑΣΚΗΣΗ 2.16**

Η επιτάχυνση Εάν το διάνυσμα θέσης ενός σώματος είναι  να βρείτε τις εξισώσεις  και , καθώς και την γωνία των διανυσμάτων  και  την χρονική στιγμή .

**ΑΣΚΗΣΗ 2.17**

Εάν το διάνυσμα θέσης ενός σώματος είναι  να αποδείξτε ότι το διάνυσμα της επιτάχυνσης  έχει σταθερό μέτρο. Να υπολογιστεί η γωνία των διανυσμάτων  και  την χρονική στιγμή .

**ΑΣΚΗΣΗ 2.18**

Εάν το διάνυσμα θέσης ενός σώματος που κινείται στο χώρο είναι  να βρείτε τις εξισώσεις  και , καθώς και την γωνία των διανυσμάτων  και  την χρονική στιγμή .

**ΑΣΚΗΣΗ 2.19**

Το διάνυσμα θέσης ενός σώματος που κινείται στο επίπεδο xy είναι . Να βρείτε τις εξισώσεις  και , καθώς και την εξίσωση της τροχιάς.

**ΑΣΚΗΣΗ 2.20**

Ένα σώμα κινείται στο επίπεδο xy με επιτάχυνση που δίνεται από τη σχέση  . Είναι γνωστό ότι την χρονική στιγμή είναι  και  . Να βρεθεί η εξίσωση της τροχιάς.

**ΑΣΚΗΣΗ 2.21**

Ένα σώμα κινείται στο επίπεδο xy με ταχύτητα  . Είναι γνωστό ότι την χρονική στιγμή το σώμα βρίσκεται στο σημείο . Να βρεθεί η εξίσωση της τροχιάς. (Ιωάννου-Τρικαλινός Ασκ. 2.7)

**ΑΣΚΗΣΗ 2.22**

Ένα σώμα κινείται στο επίπεδο xy και διαγράφει παραβολική τροχιά με εξίσωση . Την χρονική στιγμή  βρίσκεται στην αρχή των αξόνων α) Γράψτε τις εξισώσεις  και . β) Υπολογίστε τα  και  καθώς και την κεντρομόλο συνιστώσα της επιτάχυνσης την χρονική στιγμή . γ) Να υπολογιστεί η ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς στο σημείο .

**ΑΣΚΗΣΗ 2.23**

Ένα σώμα κινείται σε κυκλική τροχιά ακτίνας  με γωνιακή επιτάχυνση . Εάν είναι γνωστό ότι την χρονική στιγμή  η γωνιακή ταχύτητα είναι  και το αρχικό τόξο , να προσδιοριστούν τα διανύσματα της επιτρόχιας και της κεντρομόλου επιτάχυνσης.

**ΑΣΚΗΣΗ 2.24**

Βλήμα βάλλεται από ύψος  προς τα κάτω με ταχύτητα , που σχηματίζει με την κατακόρυφη γωνία . Να υπολογιστεί το βεληνεκές και η αρχική ταχύτητα, αν το σώμα συναντά το έδαφος σε χρόνο .

**ΑΣΚΗΣΗ 2.25**

Βλήμα εκτοξεύεται από το έδαφος με αρχική ταχύτητα  υπό γωνία  και φτάνει στην ταράτσα ενός κτηρίου ύψους  σε οριζόντια απόσταση . Να υπολογιστεί η γωνία , εάν τα ,  και  είναι γνωστά.

**ΑΣΚΗΣΗ 2.26**

Βλήμα εκτοξεύεται από τη βάση κεκλιμένου επιπέδου γωνίας , υπό γωνία  ως προς τον ορίζοντα. Να υπολογιστεί το βεληνεκές επί του κεκλιμένου επιπέδου.

**ΑΣΚΗΣΗ 2.27**

Η ταχύτητα ενός σώματος, το οποίο κινείται σε ευθύγραμμη τροχιά μεταβάλλεται με την θέση του  με βάση την εξίσωση . Υπολογίστε την επιτάχυνση και το είδος της κίνησης.

**ΑΣΚΗΣΗ 2.28**

|  |  |
| --- | --- |
|  | Γράψτε την έκφραση για την θέση  του κινητού |

**ΑΣΚΗΣΗ 2.29**

Οι συντεταγμένες ενός σώματος που κινείται στο επίπεδο xy δίνονται από τις εξισώσεις:  και  (ο χρόνος σε sec και οι αποστάσεις σε m). Να βρεθούν α) οι συνιστώσες της ταχύτητας και της επιτάχυνσης, β) τα μέτρα της ταχύτητας και της επιτάχυνσης, γ) η γωνία των διανυσμάτων της ταχύτητας και της επιτάχυνσης, δ) η εξίσωση της τροχιάς που διαγράφει το σώμα.

**ΑΣΚΗΣΗ 2.30**

Τα διανύσματα θέσης δύο σωμάτων που κινούνται στο χώρο και έχουν μάζες  και , δίνονται από τις εξισώσεις:  και  (ο χρόνος σε sec και οι αποστάσεις σε m). α) Να υπολογίστε τη χρονική στιγμή που θα συγκρουσθούν τα δύο σώματα. β) Ποιο είναι το διάνυσμα της δύναμης που θα δεχθεί κάθε σώμα; Αποδείξτε ότι οι δυνάμεις αυτές είναι της μορφής δράσης-αντίδρασης. γ) Υπολογίστε το διάνυσμα της ορμής του συστήματος των δύο σωμάτων πριν και μετά τη σύγκρουση. δ) Εάν μετά τη σύγκρουση τα δύο σώματα ενώνονται σε ένα να βρείτε το διάνυσμα θέσης του συσσωματώματος.

**ΑΣΚΗΣΗ 2.31**

Οι συντεταγμένες της θέσης ενός σώματος επάνω στους άξονες x,y και z δίνονται από τις εξισώσεις: εξισώσεις:  ,  και  (ο χρόνος σε sec και οι αποστάσεις σε m). Αποδείξτε ότι η κίνηση γίνεται επάνω σε ένα επίπεδο. Υπόδειξη: Γράψτε το διάνυσμα θέσης  για τρεις χρονικές στιγμές  και . Στη συνέχεια αποδείξτε ότι 

**ΑΣΚΗΣΗ 2.32**

Σώμα κινείται στον άξονα x με εξίσωση κίνησης  και ο χρόνος σε sec. Να υπολογιστεί η ταχύτητα και να αποδειχθεί ότι τείνει σε μία συγκεκριμένη τιμή.

**ΑΣΚΗΣΗ 2.33**

Να υπολογίσετε την πρώτη και την δεύτερη παράγωγο του διανύσματος θέσης ενός σώματος , ως προς t, εάν όλα τα άλλα μεγέθη είναι σταθερά. Επίσης να υπολογίστε τις αρχικές τιμές των διανυσμάτων ,  και  (δηλαδή την τιμή του κάθε διανύσματος την χρονική στιγμή .

**ΑΣΚΗΣΗ 2.34**

Ένα σώμα κινείται σε ευθεία τροχιά . H επιτάχυνσή του έχει την διεύθυνση της κίνησης και το μέτρο της σε συνάρτηση με τη θέση του κινητού, δίνεται από τη σχέση  (σε m/s2). Δίνεται ότι για  είναι  και για  είναι .

**N**α βρείτετην ταχύτητα , την επιτάχυνση  και την θέση του σώματος 

**Λύση:**

Δίνεται ότι (1)



Ολοκλήρωση και στα δύο μέλη:  (2)

Παρατηρήσεις στα όρια της ολοκλήρωσης:

* Το πρόβλημα λέει «Δίνεται ότι για  είναι ». Η πρόταση αυτή καθορίζει τα κάτω όρια της ολοκλήρωσης.
* Τα άνω όρια της ολοκλήρωσης δεν είναι σωστά γραμμένα, αλλά χρησιμοποιούμε αυτό το γράψιμο για ευκολία. Αφού το  εμφανίζεται σαν μεταβλητή δεν μπορεί να είναι και όριο ολοκλήρωσης (τα όρια ολοκλήρωσης είναι σταθεροί αριθμοί). Κανονικά θα έπρεπε να γράψουμε: . Τώρα η εξίσωση είναι σωστή γιατί η μεταβλητή είναι  και το όριο ολοκλήρωσης το .

Η εξίσωση (2) γίνεται:

 ή 



τελικά  (3)

Στην (3) αντικαθιστώ το  με  και γίνεται 

ολοκλήρωση στα δύο μέλη: 

 από τις ιδιότητες των λογαρίθμων:

 (4)

Εισάγοντας την τιμή του  της εξίσωσης (4) στην τιμή του  που προσδιορίστηκε στην εξίσωση (3) προκύπτει:



Τέλος εισάγοντας την τιμή του  της εξίσωσης (4) στην τιμή του  που δίνεται από την εκφώνηση (εξίσωση 1) προκύπτει:



Οι Ασκήσεις 2.1-2.7 προέρχονται από τις σημειώσεις του κ. Βαρσάμη