M2

Μέτρηση της επιτάχυνσης της βαρύτητας με τη βοήθεια του απλού εκκρεμούς.

1 Σκοπός

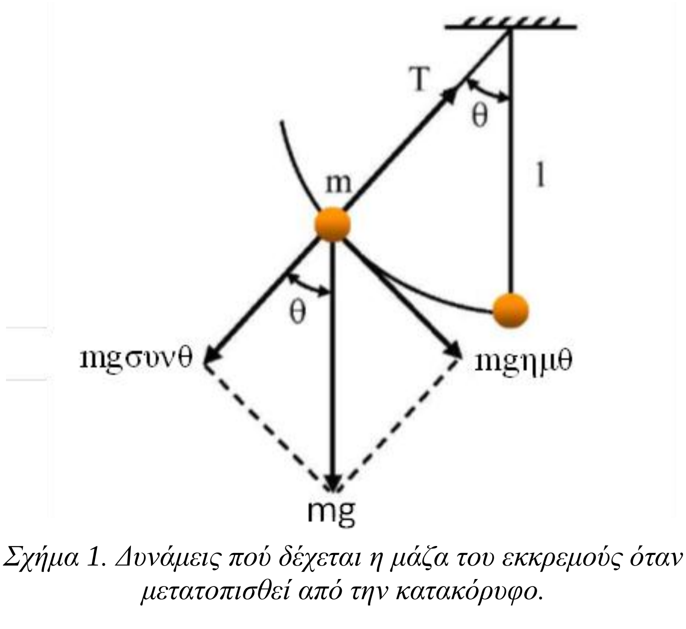
Η εργαστηριακή αυτή άσκηση αποσκοπεί στη μέτρηση της επιτάχυνσης της βαρύτητας σε ένα τόπο. Αυτή η μέτρηση επιτυγχάνεται υπολογίζοντας πειραματικά την περίοδο ταλάντωσης ενός απλού εκκρεμούς.

2 Θεωρία

2.1 Απλό εκκρεμές

Το απλό εκκρεμές είναι ένα ιδανικό σύστημα το οποίο αποτελείται από μια σημειακή μάζα εξαρτημένη από ακλόνητο σημείο με την βοήθεια αβαρούς, μη εκτατού νήματος. Κατά προσέγγιση ένα απλό εκκρεμές πραγματοποιείται εάν από σταθερό σημείο εξαρτηθεί δια λεπτού νήματος μια σφαίρα μικρής διαμέτρου της οποίας την μάζα θεωρούμε συγκεντρωμένη στο κέντρο της.

Όταν ένα απλό εκκρεμές μετατοπισθεί από τη θέση ισορροπίας του και αφεθεί ελεύθερο τότε αυτό αιωρείται σε κατακόρυφο επίπεδο λόγω της επίδρασης της βαρύτητας. Η κίνησή του είναι περιοδική και εκτελεί ταλάντωση. Το Σχήμα 1 δείχνει ένα εκκρεμές μήκους l με μάζα m που σχηματίζει γωνία θ με την κατακόρυφο. Οι δυνάμεις που δέχεται το σώμα μάζας m είναι η δύναμη του βάρους του mg και η τάση του νήματος T.



Σχήμα 1. Δυνάμεις πού δέχεται η μάζα του εκκρεμούς όταν μετατοπισθεί από την κατακόρυφο.

Η δύναμη του βάρους αναλύεται σε δυο συνιστώσες: μια είναι ακτινική και ισούται με mgσυνθ και η άλλη εφαπτομενική και ισούται με mgημθ. Η ακτινική συνιστώσα δίνει την απαραίτητη κεντρομόλο επιτάχυνση για να κινηθεί το σώμα επάνω σε κυκλικό τόξο. Η εφαπτομενική συνιστώσα είναι η δύναμη επαναφοράς που ασκείται στη μάζα m και την επαναφέρει στη θέση ισορροπίας. Άρα η δύναμη επαναφοράς είναι: $F = -mg\eta\mu\theta$. Εάν η γωνία θ είναι μικρή τότε το ημθ, με μεγάλη προσέγγιση είναι ίσο με την ίδια τη γωνία θ εκφρασμένη όμως σε ακτίνια (rad).

Για παράδειγμα:

$\theta = \ \ 0° = 0.000$ (rad) και $\eta\mu\theta = 0.000$ άρα διαφορά 0.00%
$\theta = \ \ 2° = 0.035$ (rad) και $\eta\mu\theta = 0.035$ άρα διαφορά 0.00%
$\theta = 10° = 0.175$ (rad) και $\eta\mu\theta = 0.174$ άρα διαφορά 0.51%
$\theta = 15° = 0.262$ (rad) και $\eta\mu\theta = 0.259$ άρα διαφορά 1.14%

Η μετατόπιση κατά μήκος του τόξου s είναι $x = l \cdot \theta$ και για μικρές γωνίες η κίνηση μπορεί να θεωρηθεί σχεδόν ευθύγραμμη. Άρα υποθέτοντας ότι: $\sin\theta \cong \theta$ θα ισχύει:

$$F = -mg\theta = -mg\left(\frac{x}{l}\right) = -\left(\frac{mg}{l}\right)x$$

Επομένως για μικρές απομακρύνσεις η δύναμη επαναφοράς είναι ανάλογη της απομάκρυνσης και έχει αντίθετη φορά από αυτήν. Άρα ικανοποιείται η συνθήκη για να εκτελέσει το απλό εκκρεμές απλή αρμονική ταλάντωση. Η περίοδος ενός απλού εκκρεμούς με μικρό πλάτος ταλάντωσης θα είναι:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Όταν το πλάτος της ταλάντωσης δεν είναι αρκετά μικρό η γενική εξίσωση για την περίοδο αποδεικνύεται ότι είναι:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1 + \frac{1}{2^2}\left(\eta\mu\frac{\theta_m}{2}\right)^2 + \frac{1}{2^2}\frac{3^2}{4^2}\left(\eta\mu\frac{\theta_m}{2}\right)^4 + \cdots\right]$$

όπου θ_m η μέγιστη γωνιακή επιτάχυνση.

Από την τελευταία σχέση γίνεται κατανοητό ότι η περίοδος μπορεί να υπολογιστεί με όση ακρίβεια επιθυμείτε αρκεί να ληφθούν υπ' όψη όλοι οι αναγκαίοι όροι της προηγούμενης σειράς.

2.2 Νόμος της παγκόσμιας έλξης - Επιτάχυνση της βαρύτητας

Μεταξύ δυο σωμάτων που έχουν μάζες m_1 και m_2 και απέχουν απόσταση r αναπτύσσεται μια ελκτική δύναμη επάνω στην ευθεία που ενώνει τα σώματα και έχει μέτρο:

$$F = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

όπου G είναι μια παγκόσμια σταθερά που έχει την ίδια τιμή για όλα τα ζευγάρια σωμάτων και ονομάζεται σταθερά της παγκόσμιας έλξης. Η τιμή της σταθεράς αυτής βρέθηκε πειραματικά και είναι (στο SI): $G = 6.67 \times 10^{-11}\ \text{Ntm}^2/\text{Kgr}$.

Η σταθερά G της παγκόσμιας έλξης δεν εξαρτάται από το είδος των μαζών αλλά ούτε και από το μέσον το οποίο τις περιβάλλει. Εάν θεωρηθεί όλη η μάζα M της γης συγκεντρωμένη στο κέντρο της, από τον νόμο της παγκόσμιας έλξης υπολογίζεται η ελκτική δύναμη που ασκεί η γη σε ένα σώμα μάζας m που βρίσκεται στην επιφάνειά της: $F = G\frac{Mm}{R^2}$
όπου R είναι η ακτίνα της γης. Βέβαια, λόγω του ότι η δύναμη F είναι ακριβώς το βάρος B του

σώματος θα ισχύει: $mg = G\frac{Mm}{R^2}$ και τελικά: $g = G\frac{M}{R^2}$

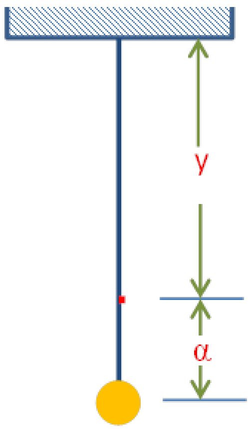
Δηλαδή η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι ανεξάρτητη από την μάζα των σωμάτων. Στον ίδιο τόπο η επιτάχυνση της βαρύτητας σε ύψος h πάνω από την επιφάνεια της γης δίνεται από την σχέση:

$$g_{(h)} = G\frac{M}{(R+h)^2}$$

όπου $(R + h)$ είναι η απόσταση από το κέντρο της γης. Άρα το g σε ένα τόπο φαίνεται να ελαττώνεται όσο αυξάνεται το υψόμετρο του συγκεκριμένου τόπου. Η επιτάχυνση της βαρύτητας εξαρτάται ακόμη και από το γεωγραφικό πλάτος (μεγαλύτερη είναι η ακτίνα της γης στον ισημερινό από ότι στους πόλους). Η τιμή του g στον ισημερινό μετρήθηκε σε 9.78 m/s^2 ενώ η αντίστοιχη τιμή στους πόλους είναι 9.83 m/s^2.

3 Πειραματική διαδικασία

Εάν το νήμα του απλού εκκρεμούς είναι αβαρές και μη εκτατό τότε θα μετρούσαμε το μήκος *l* από το σταθερό σημείο εξάρτησης μέχρι το κέντρο βάρους της σφαίρας το οποίο μάλιστα συμπίπτει και με το γεωμετρικό της κέντρο. Επειδή όμως το νήμα δύσκολα εκπληρώνει τις παραπάνω προϋποθέσεις δεν είναι δυνατόν να γνωρίζουμε την ακριβή θέση του κέντρου βάρους του συστήματος νήματος - σφαιριδίου.



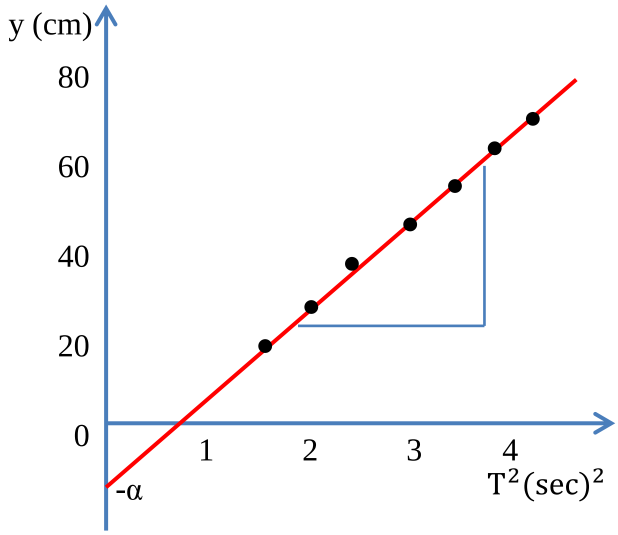
Σχήμα 2. Εκκρεμές με κόμπο.

Προκειμένου να ξεπεραστεί η προηγούμενη δυσκολία χρησιμοποιείται το εξής τέχνασμα. Δένεται ένας κόμπος στο νήμα, ώστε το μήκος y από το κόμπο μέχρι το σημείο εξάρτησης μπορεί να μετρηθεί με αρκετή ακρίβεια ενώ η απόσταση α του ίδιου κόμπου από το κέντρο βάρους του συστήματος εξακολουθεί να παραμένει άγνωστη.

Έτσι η σχέση: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ γράφεται $T = 2\pi\sqrt{\frac{y+\alpha}{g}}$ από την οποία λαμβάνεται:

$$y = \frac{g}{4\pi^2}T^2 - \alpha$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι η γραφική παράσταση: $y = f(T^2)$ είναι ευθεία γραμμή (Σχήμα 3) και η κλίση της οποίας δίνεται από την σχέση: $\text{κλίση} = \frac{g}{4\pi^2}$



Σχήμα 3. Γραφική παράσταση της $y = f(T^2)$.

Για την μέτρηση λοιπόν της επιτάχυνσης της βαρύτητας g μετριέται εργαστηριακά η περίοδος T για διάφορες τιμές του μήκους y και χαράσσεται η πειραματική ευθεία $y = f(T^2)$. Βρίσκεται η κλίση της και εν συνεχεία υπολογίζεται η επιτάχυνση της βαρύτητας g.

4 Εργασίες.

1. Μετρείστε το χρόνο 10 περιόδων ταλάντωσης του εκκρεμούς για 10 διαφορετικές τιμές του μήκους y και συμπληρώστε τον πίνακα που ακολουθεί.

α/α	**y** (cm)	**10T** (sec)	**T** (sec)	$\mathbf{T^2}$ (sec)^2
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				

2. Υπολογίστε την κλίση της πειραματικής ευθείας και από αυτήν την τιμή της επιτάχυνσης της βαρύτητας. Γράψτε τα τελικά αποτελέσματα:

$$\text{κλίση} = \qquad \left(\frac{m}{sec^2}\right) \quad \text{και} \quad g = \qquad \left(\frac{m}{sec^2}\right)$$

3. Από το σημείο τομής της πειραματικής ευθείας με τον κατακόρυφο άξονα υπολογίστε το άγνωστο μήκος α.

Παρατήρηση: Απαραίτητη είναι η γνώση της θεωρίας που αναπτύσσεται στην ενότητα M1 (Θεωρία Ταλαντώσεων).

5 Θεματολογικές ερωτήσεις κατανόησης.

5.1 Ερωτήσεις θεωρίας.

1. Τι ονομάζεται απλή αρμονική ταλάντωση; Να γραφούν οι τύποι της απομάκρυνσης, της ταχύτητας και της επιτάχυνσης σε συνάρτηση με τον χρόνο.
2. Ποια είναι η ικανή και αναγκαία συνθήκη για να εκτελεί ένα σώμα απλή αρμονική ταλάντωση;
3. Τι ονομάζεται απλό ή μαθηματικό εκκρεμές; Ποιος ο τύπος της περιόδου του;
4. Υπό ποιες προϋποθέσεις το απλό εκκρεμές εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση;
5. Διατυπώστε το νόμο της παγκόσμιας έλξης.
6. Αποδείξτε τη σχέση που συνδέει την ένταση του πεδίου βαρύτητας με τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της Γης.
7. Για ποιο λόγο χωρίζεται το νήμα του εκκρεμούς του εργαστηριακού πειράματος σε δυο κομμάτια y και α;

5.2 Β. Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής.

1. Στα περιοδικά φαινόμενα έχουμε:

- ☐ α. Μόνο χρονική περιοδικότητα.
- ☐ β. Μόνο τοπική (χωρική)περιοδικότητα.
- ☐ γ. Χρονική ή τοπική ή χωροχρονική περιοδικότητα.
- ☐ δ. Είτε το α είτε το β.

2. Γραμμικές καλούνται οι ταλαντώσεις εκείνες στις οποίες:

- ☐ α. Η ταλαντωμένη μάζα διαγράφει κάποια τροχιά.
- ☐ β. Οι απομακρύνσεις της ταλαντωμένης μάζας δίνονται από εξισώσεις πρώτου βαθμού.
- ☐ γ. Η ταλαντωμένη μάζα διαγράφει ευθύγραμμη τροχιά.
- ☐ δ. Κανένα από τα παραπάνω.

3. Η σταθερά G της αναλυτικής έκφρασης του νόμου της παγκόσμιας έλξης είναι:

- ☐ α. Ανεξάρτητη της φύσης των σωμάτων και εξαρτάται μόνο από τις μονάδες της μάζας και της απόστασης.
- ☐ β. Εξαρτάται από την φύση των σωμάτων και των χρησιμοποιημένων μονάδων μάζας και απόστασης.
- ☐ γ. Είναι σταθερή και δεν εξαρτάται από οποιοδήποτε παράγοντα.

4. Αν αφεθούν να πέσουν από το ίδιο ύψος συγχρόνως σώματα με διαφορετικές μάζες σε ένα χώρο κενού αέρος:

- ☐ α. Θα πέσουν κινούμενα με διαφορετικές ταχύτητες, η δε ταχύτητα τους θα είναι ανάλογη της μάζας τους
- ☐ β. Θα εκτελέσουν ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με την ίδια ταχύτητα.
- ☐ γ. Θα κινηθούν με διαφορετικές ταχύτητες εκτελώντας επιταχυνόμενη κίνηση, η δε επιτάχυνση τους θα εξαρτάται από τη μάζα τους.

5. Η επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης έχει μικρότερη τιμή:

- ☐ α. Στους πόλους.
- ☐ β. Στον Ισημερινό.
- ☐ γ. Κανένα εκ των α και β δεν είναι σωστό.

6. Προκειμένου περί απλού εκκρεμούς η σταθερά επαναφοράς D αυτού δίνεται από την σχέση:

- ☐ α. $D = \frac{mg}{l}$
- ☐ β. $D = -\frac{mg}{l}$
- ☐ γ. $D = -mgl$
- ☐ δ. $D = -\frac{ml}{g}$

7. **Θεωρείστε απλό εκκρεμές με μήκος l. Το εκκρεμές ταλαντώνεται με μικρή γωνία αρχικής εκτροπής σε τόπο όπου η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι g. Αν μεταφερθεί το εκκρεμές σε άλλο τόπο με μεγαλύτερο g.**

Α) Η περίοδος του εκκρεμούς:

- ☐ α. Μειώνεται.
- ☐ β. Αυξάνεται.
- ☐ γ. Δεν μεταβάλλεται.

Β) Για να επανέλθει η αρχική περίοδος του εκκρεμούς πρέπει να:

- ☐ α. Να αυξηθεί το μήκος του εκκρεμούς.
- ☐ β. Να μειωθεί το μήκος του εκκρεμούς.
- ☐ γ. Να αυξηθεί η μάζα του σφαιριδίου του εκκρεμούς.
- ☐ δ. Να μειωθεί η μάζα του σφαιριδίου του εκκρεμούς.

5.3 Ερωτήσεις κρίσεως

1. **Τι καλείται εκκρεμές δευτερολέπτων; Τι σημαίνει η έκφραση το "ωρολόγιο είναι ακριβές";**

   Εκκρεμές δευτερολέπτων καλείται αυτό που έχει περίοδο 2 sec. Άρα ένα ρολόι είναι ακριβές όταν έχει την περίοδο των 2 sec

2. **Όταν ένα εκκρεμές, κερδίζει χρόνο (πηγαίνει εμπρός) τι ρύθμιση πρέπει να του γίνει για να διορθωθεί ώστε να δείχνει κανονική ώρα;**

   Εφ' όσον πηγαίνει εμπρός θα πρέπει να έχει περίοδο μικρότερη των 2 sec. Άρα θα πρέπει να γίνει τέτοια ρύθμιση ώστε να αυξηθεί η περίοδος του. Αλλά $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ όπου g η επιτάχυνση της βαρύτητας που είναι σταθερή στον ίδιο τόπο. Άρα πρέπει να αυξηθεί το μήκος l ώστε να αυξηθεί η περίοδος και να γίνει $T = 2$ sec.

3. **Ποια η επιτάχυνση μαθηματικού εκκρεμούς όταν διέρχεται από τη θέση ισορροπίας α) Αν το πλάτος των αιωρήσεων είναι μικρό και β) Αν το πλάτος των αιωρήσεων είναι μεγάλο.**

   α) Αν το πλάτος των αιωρήσεων είναι μικρό η κίνηση θεωρείται γραμμική αρμονική ταλάντωση και άρα στη θέση ισορροπίας η δύναμη είναι μηδέν και επομένως και η επιτάχυνση $\alpha = 0$.

   β) Αν το πλάτος δεν είναι μικρό τότε η κίνηση είναι κυκλική και άρα όταν διέρχεται από τη θέση ισορροπίας έχει κεντρομόλο επιτάχυνση $\alpha_\kappa = \upsilon^2/l$ Η επιτρόχιος επιτάχυνση είναι μηδέν διότι η συνισταμένη των δυνάμεων έχει διεύθυνση κάθετη στην ταχύτητα.

4. **Ποια η περίοδος ωρολογίου το οποίο προηγείται (πηγαίνει εμπρός) κατά 5min εντός 10 ωρών;**

Εφ' όσον προηγείται κατά $5\text{min} = 300\text{sec}$ τότε σε $10\text{h} = 36000\,\text{sec}$ σημαίνει ότι εκτελεί 300 απλές αιωρήσεις περισσότερες από τα δευτερόλεπτα που έχουν παρέλθει διότι το ωρολόγιο γράφει 1 sec σε κάθε απλή αιώρηση.

Άρα σε 3600 sec εκτελεί 36300 αιωρήσεις.

Σε x sec εκτελεί 2 αιωρήσεις

$$x = T = \frac{36000}{36300} \times 2\text{sec} = 1.98\ (\text{sec})$$

5. **Να συγκριθούν οι περίοδοι ταλαντώσεως ενός εκκρεμούς στην επιφάνεια της θάλασσας και σε ένα υψηλό όρος.**

Για τις δυο αυτές θέσεις ισχύει: $T_{(0)} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_{(0)}}}$ και $T_{(h)} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_{(h)}}}$

Από την σχέση $g_{(h)} = G\frac{M}{(R+h)^2}$ είναι φανερό ότι: $g_{(0)} > g_{(h)}$ και άρα $T_{(0)} < T_{(h)}$.

6. **Εάν ο όγκος της Γης ελαττώνεται ενώ η μάζα της παρέμενε σταθερά, τι μεταβολή θα υφίσταται η επιτάχυνση της βαρύτητας σε ένα σημείο Σ του πεδίου βαρύτητας που βρίσκεται εκτός της Γης;**

Είναι $g_{(r)} = G\frac{M}{r^2}$ όπου T η απόσταση του Σ από το κέντρο της Γης.

Επειδή η μάζα της γης διατηρείται σταθερή έπεται ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας $g_{(r)}$ είναι σταθερή και ανεξάρτητη του όγκου της Γης.

7. **Που είναι μεγαλύτερη η ένταση του πεδίου βαρύτητας της Γης: στο κενό, εντός της ατμόσφαιρας ή εντός του ύδατος;**

Η ένταση του πεδίου βαρύτητας της Γης δίνεται από την σχέση: $g_{(h)} = G\frac{M}{(R+h)^2}$

Κανένας από τους όρους του δεύτερου μέλους της εξίσωσης δεν εξαρτάται από το μέσον εντός του οποίου βρίσκεται το θεωρούμενο σώμα. Άρα είναι η ίδια.

8. **Σώμα που βρίσκεται εκτός πεδίου βαρύτητας έχει α) βάρος και β) κέντρο βάρους.**

α) Εκτός πεδίου βαρύτητας το σώμα δεν έχει βάρος διότι εξ ορισμό το πεδίο βαρύτητας είναι ο χώρος εντός του οποίου όταν φέρουμε το σώμα δεν ασκείται σε αυτό δύναμη δηλαδή δεν έχει βάρος.

β) Κέντρο βάρους έχει κάθε σώμα είτε είναι εντός είτε εκτός του πεδίου βαρύτητας η δε θέση του κέντρου βάρους ως προς το σώμα δεν μεταβάλλεται όταν αλλάζει η θέση του σώματος.

9. **Να υπολογισθεί το βάρος της Γης.**

Ο όρος βάρος της Γης δεν έχει νόημα εφ' όσον βάρος σώματος ονομάζεται η δύναμη με την οποία το έλκει η Γη.