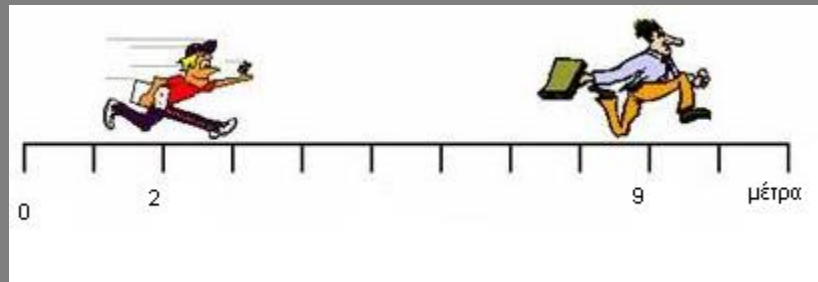


•Πόσο απέχουν;



•Πόση είναι η μετατόπιση του καθενός;

Διανυσματικό μέγεθος

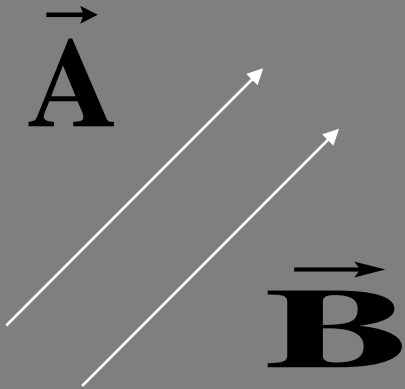
- Μέτρο
- Διεύθυνση
- Φορά



Σύμβολο μέτρου διανύσματος

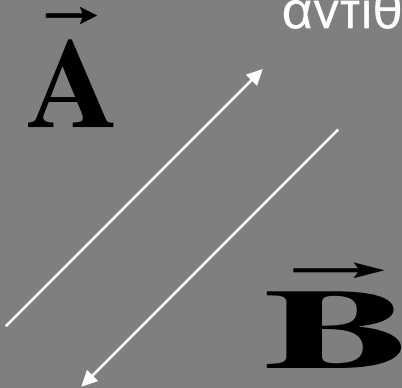
$$|\vec{A}|$$

Δύο διανύσματα είναι ίσα αν έχουν ίδιο μέτρο και ίδια φορά.

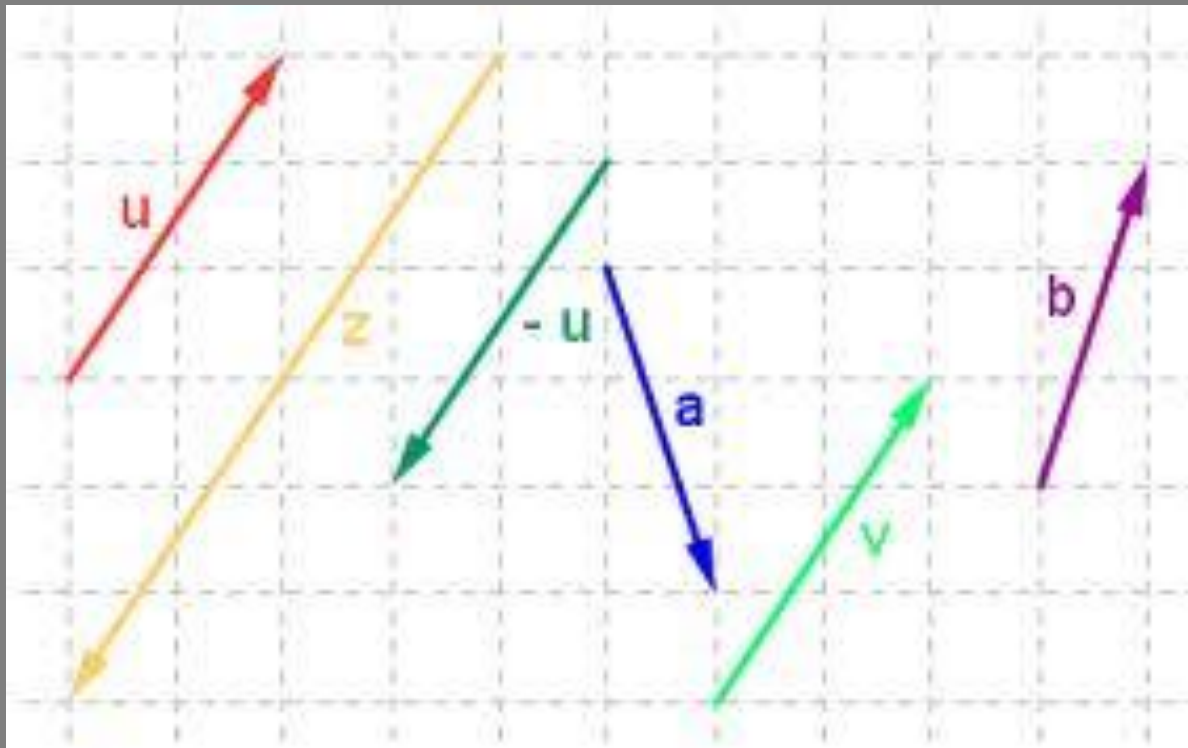


$$\vec{A} = \vec{B}$$

Δύο διανύσματα είναι αντίθετα αν έχουν ίδιο μέτρο και αντίθετη φορά.

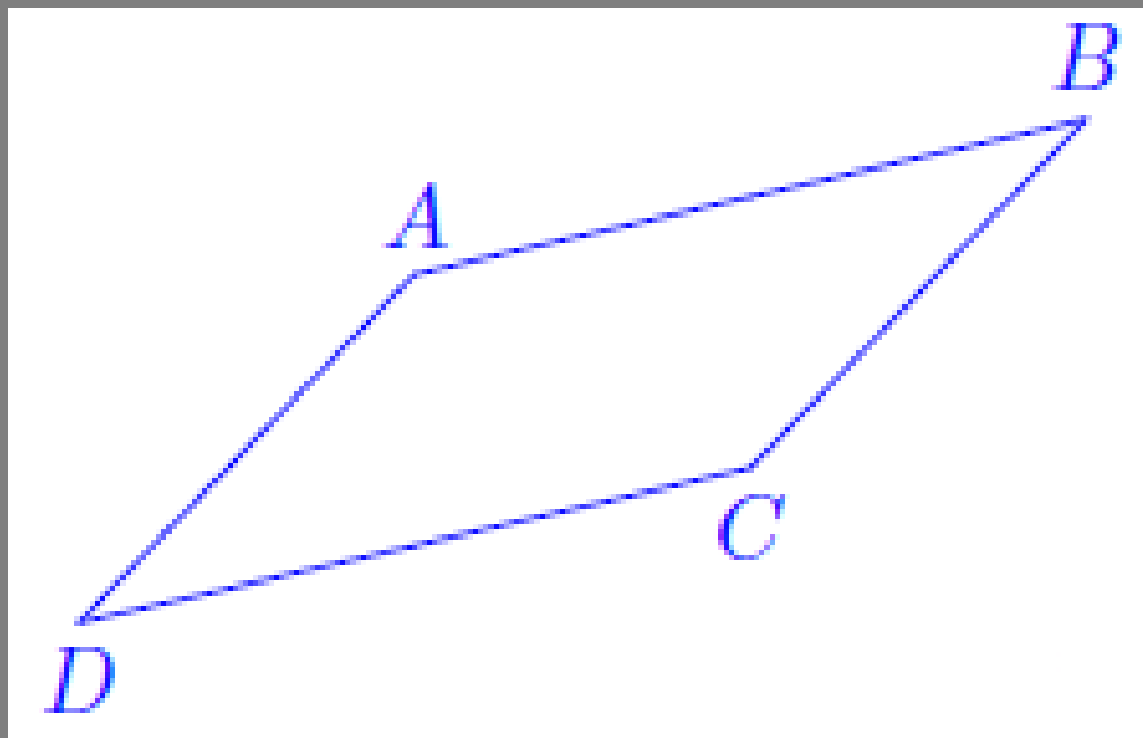


$$\vec{A} = -\vec{B}$$



Υπάρχουν ίσα διανύσματα στο διάγραμμα; Αν ναι ποιιά;

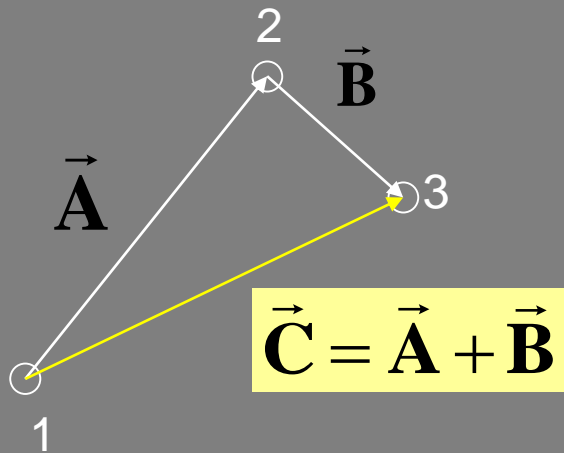
Τα διανύσματα τα σχεδιάζουμε υπό κλίμακα όσο αφορά το μέτρο τους.



(a) $\vec{DA} = \vec{BC}$, (b) $\vec{AD} = -\vec{CB}$, (c) $\vec{AD} = \vec{CB}$, (d) $\vec{DA} = -\vec{CB}$.

Ποια από τις παραπάνω ισότητες ισχύει;

Πρόσθεση διανυσμάτων

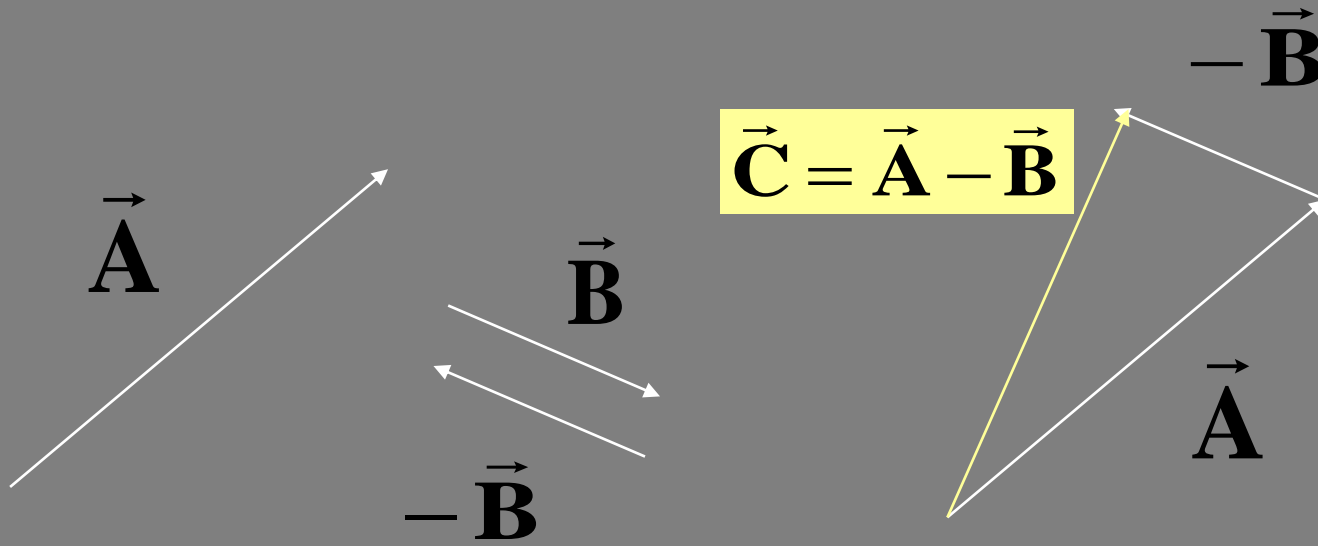


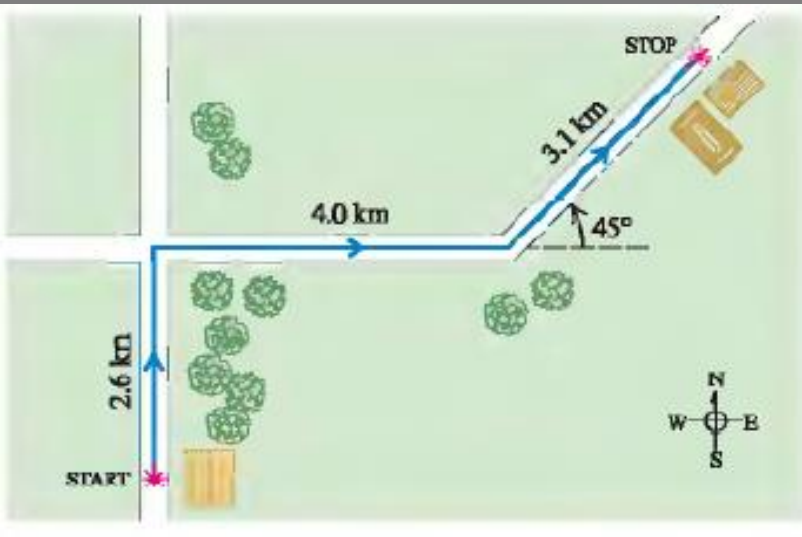
$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$$

Μηδενικό διάνυσμα:

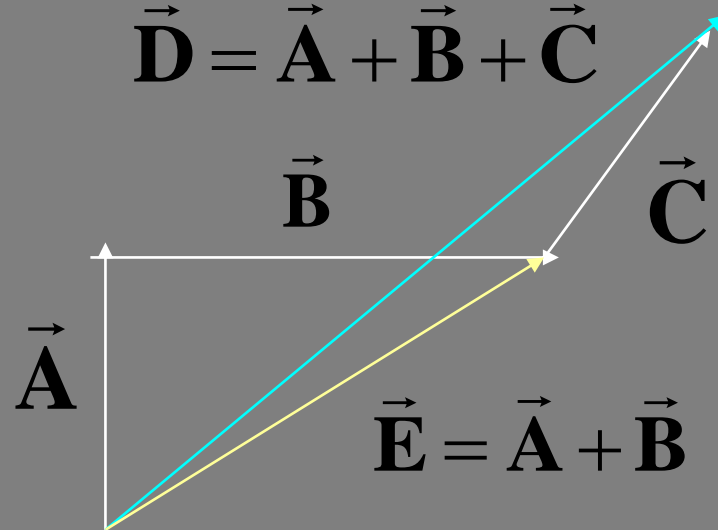
- Μηδενικό μέτρο
- Δεν έχει διεύθυνση

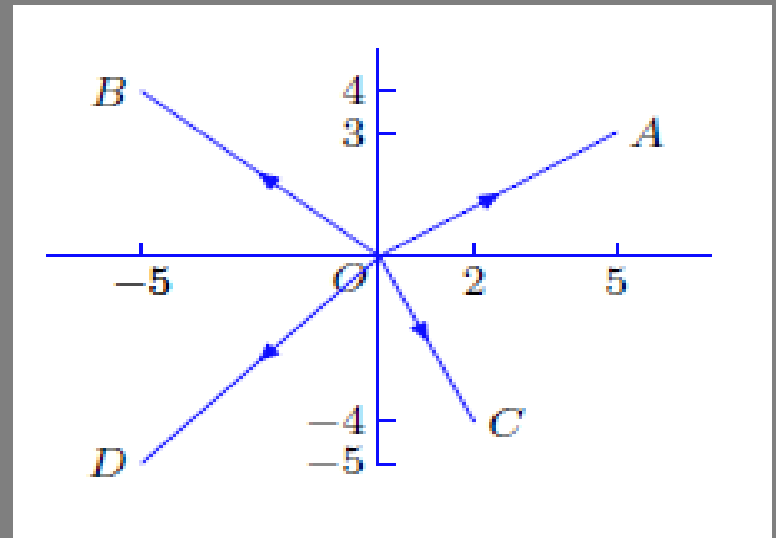
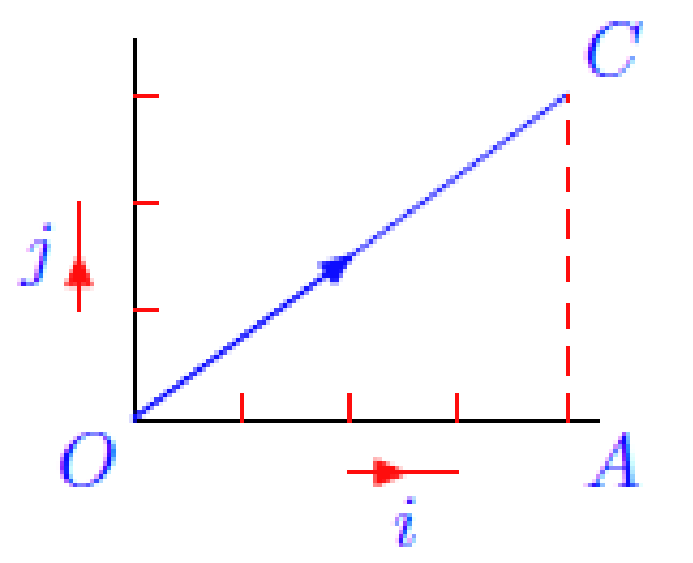
Αφαίρεση διανυσμάτων





$$\vec{D} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$$





i, j : μοναδιαία διανύσματα

με **φορά** τη θετική των x και y αξόνων αντίστοιχα,

και **μέτρο** ίσο με μια μονάδα.

Πώς εκφράζονται τα παραπάνω διανύσματα με τη χρήση συνιστωσών;

$$\overrightarrow{OC} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} \quad \text{Αν} \quad \vec{A} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j},$$

$$|\vec{A}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\mathbf{a} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$$

$$\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$$

$$(a) \mathbf{a} + \mathbf{b},$$

$$(b) \mathbf{b} + \mathbf{c},$$

$$(c) \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c},$$

$$(d) \mathbf{a} + 2\mathbf{b},$$

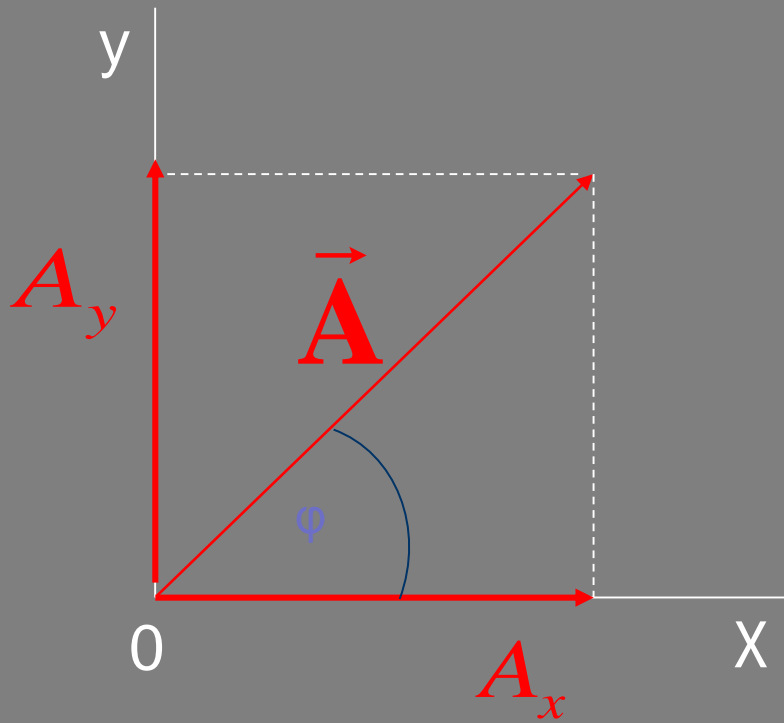
$$(e) 2\mathbf{b} - 3\mathbf{a},$$

$$(f) |\mathbf{a}|,$$

$$(g) |\mathbf{a} + \mathbf{b}|,$$

$$(h) |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|,$$

$$(i) |2\mathbf{a} - \mathbf{b}|,$$



$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2},$$

$$\cos \varphi = \frac{A_x}{A} \Leftrightarrow A_x = A \cos \varphi,$$

$$\sin \varphi = \frac{A_y}{A} \Rightarrow A_y = A \sin \varphi$$

Πολλαπλασιασμός διανύσματος με αριθμό: Πολλαπλασιάζεται το μέτρο του διανύσματος με τον αριθμό, η φορά παραμένει η ίδια.

Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων: Το αποτέλεσμα είναι **βαθμωτό μέγεθος**.
(φ η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων)

Παράδειγμα: έργο δύναμης F για μετατόπιση χ .

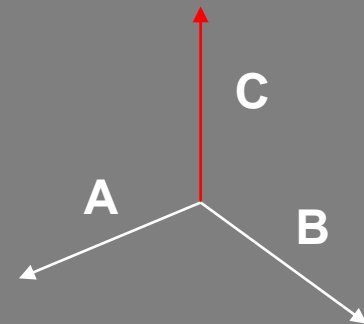
$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \varphi$$

Εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων: Το αποτέλεσμα είναι **διάνυσμα**.

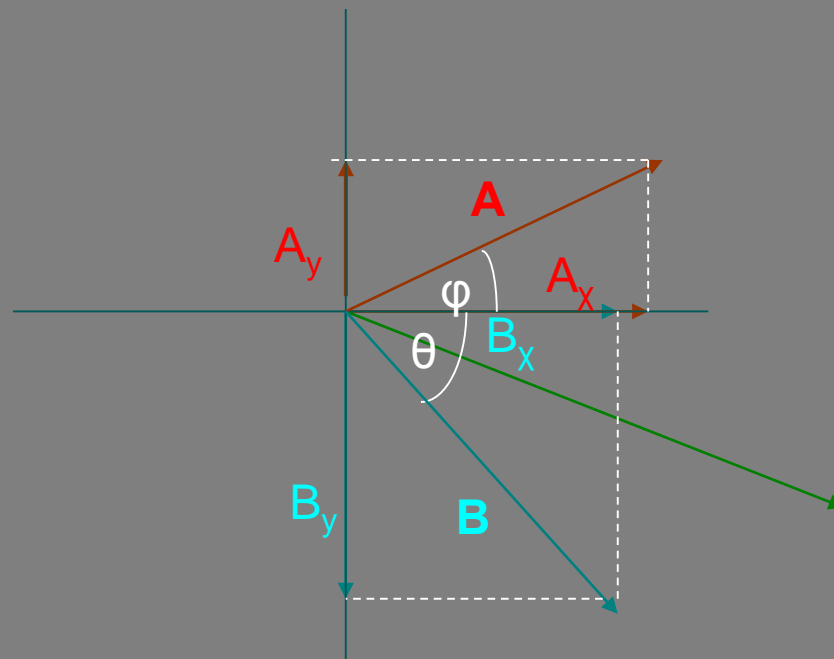
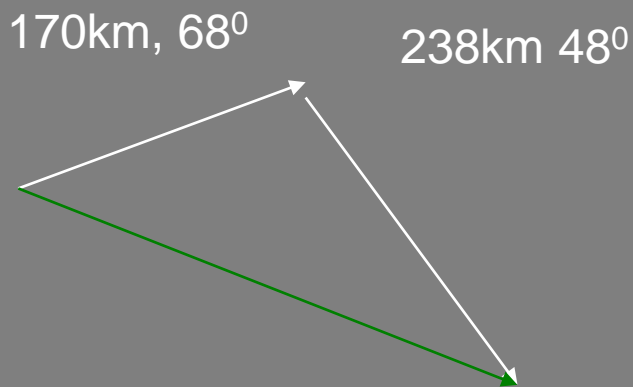
$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B},$$

$$|\vec{C}| = |\vec{A}| |\vec{B}| \sin \varphi$$

Το διάνυσμα C έχει κατεύθυνση κάθετη στο επίπεδο που σχηματίζουν τα διανύσματα A, B



Αεροπλάνο απογειώνεται και πετάει για 170km, 68° ανατολικά του Βορρά. Αλλάζει κατεύθυνση και πετάει 238km 48° νότια της Ανατολής. Λόγω βλάβης κάνει αναγκαστική προσγείωση. Σε ποια κατεύθυνση και σε πόση απόσταση από την αφετηρία του βρίσκεται;



$$A_x = A \cos \phi = 170 \cos 22 = 158,1km$$

$$A_y = A \sin \phi = 170 \sin 22 = 63,7km$$

$$B_x = B \cos \theta = 238 \cos 48 = 159km$$

$$B_y = B \sin \theta = 238 \sin 48 = 131km$$

$$C_x = 158 + 159 = 317km$$

$$C_y = 131 - 63,7 = 67,3km$$

$$C = \sqrt{C_x^2 + C_y^2} = 324km$$

$$\cos \omega = \frac{C_x}{C} = 0,98 \Rightarrow \omega = 11,5$$

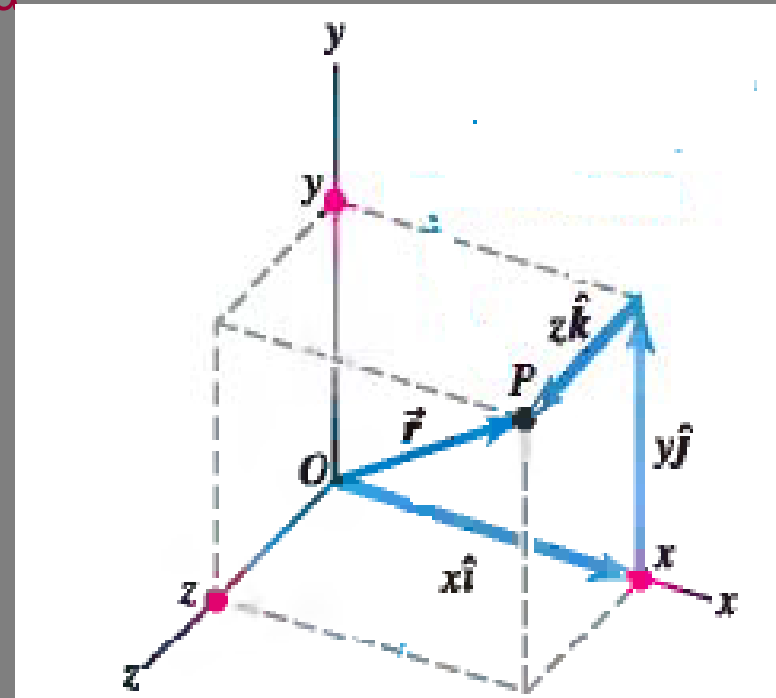
- Ιστιοπλοϊκό ταξιδεύει με ταχύτητα 10km/hr βόρεια. Η ταχύτητα του αέρα είναι 25km/hr , με κατεύθυνση 30° ανατολικά τού βορά. Πόση είναι η ταχύτητα του αέρα σε σχέση με το σκάφος;
- Ο βραχίονας ασθενούς που κάνει φυσιοθεραπεία ζυγίζει $20,5\text{N}$ και σηκώνει βάρος 112N . Και οι δύο δυνάμεις έχουν κατεύθυνση κάθετη. Ο δικέφαλος μυς ασκεί δύναμη 232 N κάθετη στο βραχίονα όταν αυτός βρίσκεται σε γωνία 43° πάνω από το οριζόντιο επίπεδο. Πόση είναι η δύναμη που ασκεί ο αγκώνας στο βραχίονα;

- Διάνυσμα θέσης \vec{r}

- Το κινούμενο σώμα βρίσκεται στη θέση P.
Το διάνυσμα θέσης έχει αρχή την αρχή των καρτεσιανών αξονων και τέλος το σημείο P.

- Αν οι καρτεσιανές συντεταγμένες του σημείου P είναι οι x, y, z , τότε το διάνυσμα θέσης είναι:

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$



- Το σώμα μέσα σε χρονικό διάστημα Δt μετακινείται από το σημείο P_1 (όπου το διάνυσμα θέσης είναι το \vec{r}_1), στο σημείο P_2 όπου το διάνυσμα θέσης είναι το \vec{r}_2 .
- Η μετατόπιση στο χρονικό διάστημα Δt

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

