Παράγωγος - Ολοκλήρωμα στην κίνηση σε 1 διάσταση

Ι. Καλατζής
Α. Σκουρολιάκου

Παράγωγος
και γραφική παράσταση μεταβλητής

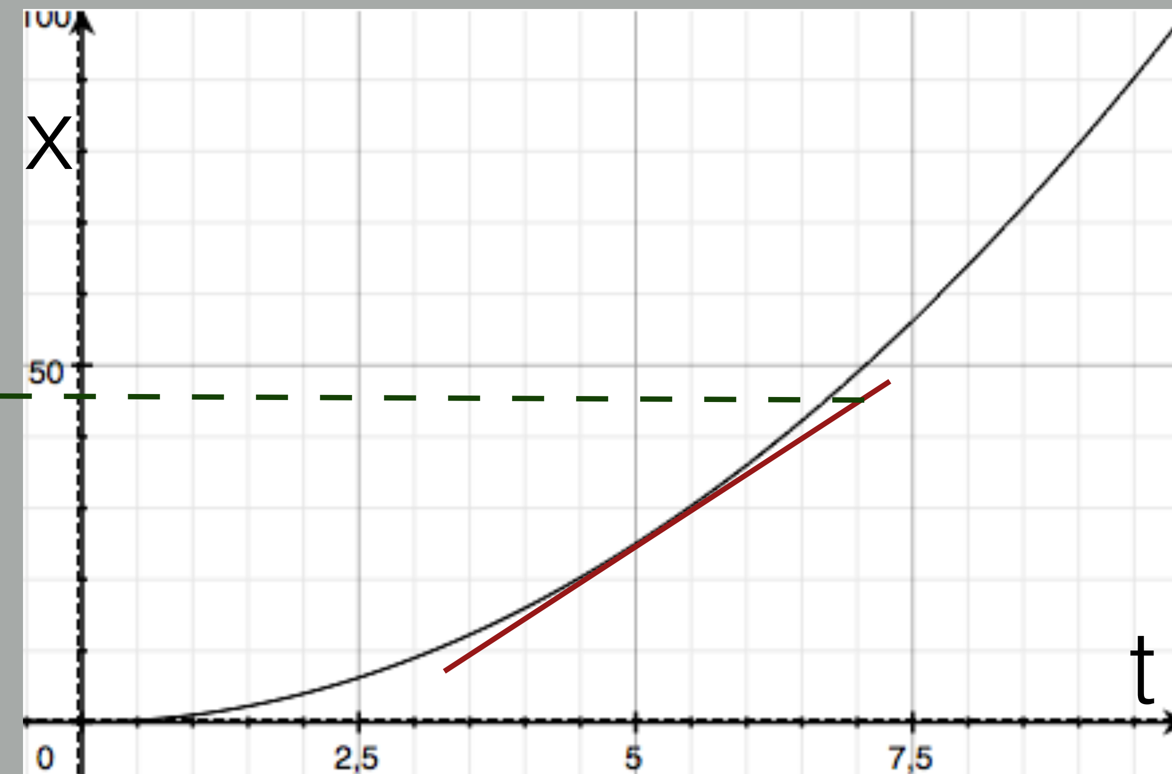
- Παράγωγος είναι ο ρυθμός μεταβολής της μιας μεταβλητής σε σχέση με την άλλη.

- Επίσης η παράγωγος είναι η κλίση της εφαπτομένης σε ένα σημείο μιας γραφικής παράστασης που συνδέει δύο μεταβλητές.

Η κλίση της εφαπτομένης σε κάποιο σημείο της γραφικής παράστασης

$$x = f(t)$$

είναι ίση με



$$\lambda = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

Αν υπολογίσουμε την κλίση της καμπύλης σε όλα τα σημεία προκύπτει μια καινούρια συνάρτηση: η παράγωγος της αρχικής

$$f'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

Πιο απλά χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $x'(t) = \frac{dx(t)}{dt}$

Κανόνες παραγώγισης

$$\frac{d}{dt}(cx(t)) = cx'(t)$$

$$\frac{d}{dt}(t^n) = nt^{n-1}$$

$$\frac{d}{dt}(c) = 0$$

$$(f(t) \pm g(t))' = f'(t) \pm g'(t)$$

$$(f(t)g(t))' = f(t)g'(t) + f'(t)g(t)$$

$$\frac{d}{dt}(sint) = cost$$

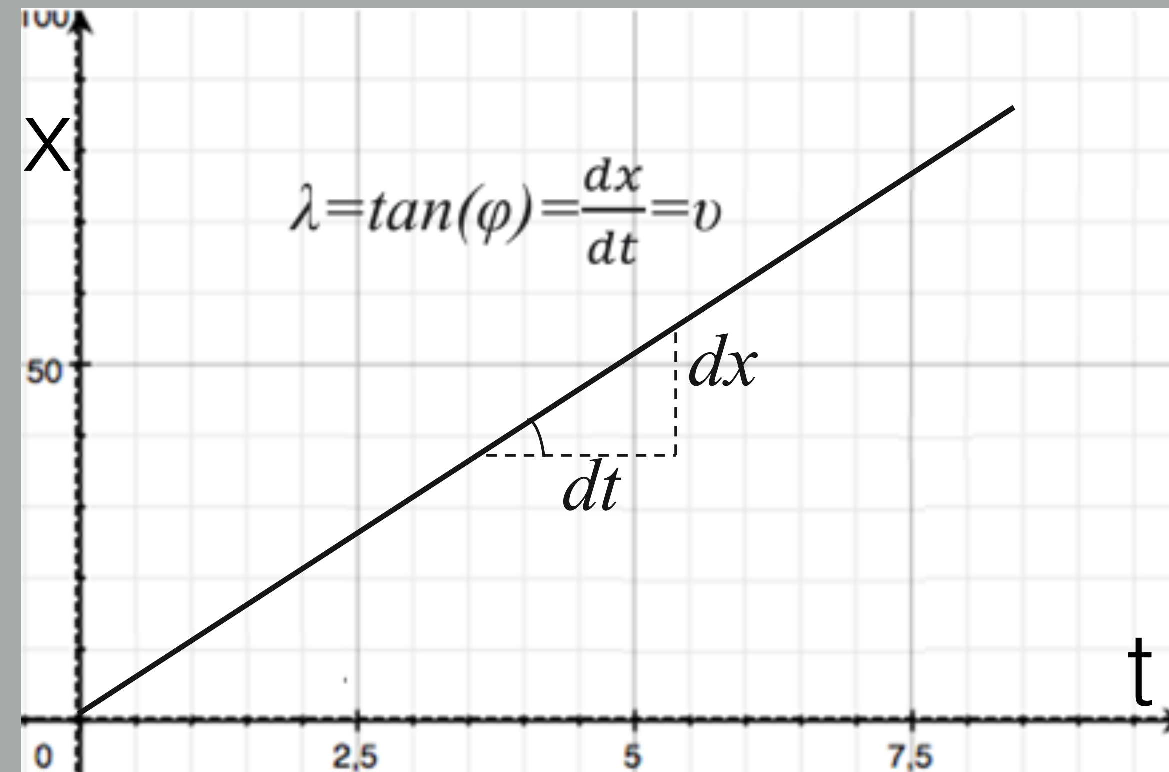
$$\frac{d}{dt}(cost) = -sint$$

$$\frac{d}{dt}(a^t) = a^t ln(a)$$

$$\frac{d}{dt}(ln(t)) = \frac{1}{t}, t > 0$$

$$\frac{d}{dt}(e^t) = e^t$$

Παράδειγμα 1: Έστω
$f(t) = \upsilon \cdot t$, όπου υ=σταθερά
Δηλ.
$x = \upsilon \cdot t$
(εξίσωση μετατόπισης Ε.Ο.Κ.)



$$\lambda = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\upsilon \cdot (t + \Delta t) - \upsilon \cdot t}{\Delta t}$$
$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\upsilon \cdot t + \upsilon \cdot \Delta t - \upsilon \cdot t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\upsilon \cdot \Delta t}{\Delta t} = \upsilon$$

Ή (χρησιμοποιώντας τους κανόνες παραγώγισης):

$$\lambda = \frac{dx}{dt} = \frac{d(\upsilon t)}{dt} = \frac{\upsilon dt}{dt} = \upsilon$$

Δηλ. η κλίση λ της γραφικής παράστασης x-t είναι η ταχύτητα, που εδώ είναι σταθερή.

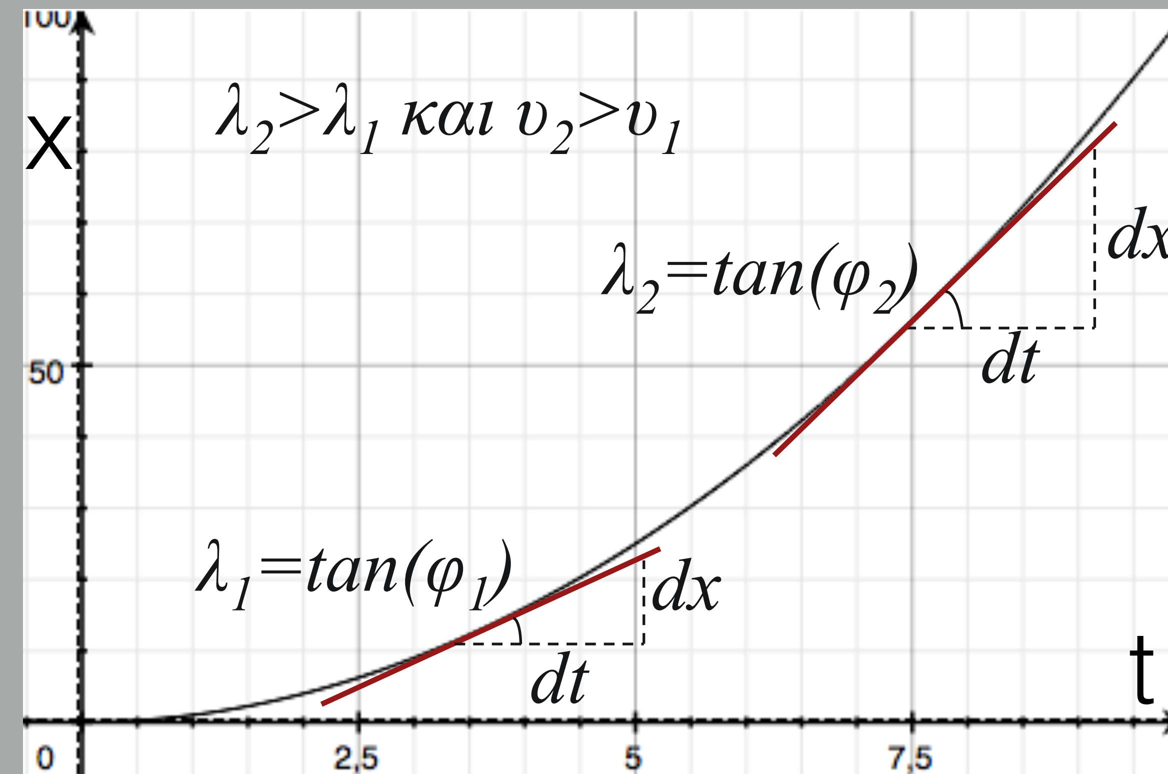
Παράδειγμα 2: Έστω

$f(t) = \upsilon_0 t + ½ at^2$,

όπου υ_0 και a σταθερές, δηλ.:

$x = \upsilon_0 + ½ at^2$

(εξίσωση μετατόπισης στην ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση)



Χρησιμοποιώντας τους κανόνες παραγώγισης:

$$\lambda = \frac{dx}{dt} = \frac{\mathrm{d}\left(\upsilon_0 \mathrm{t} + \frac{1}{2}\mathrm{at}^2\right)}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{d}\left(\upsilon_0 \mathrm{t} + \frac{1}{2}\mathrm{at}^2\right)}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{d}(\upsilon_0 \mathrm{t})}{\mathrm{dt}} + \frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}\mathrm{at}^2\right)}{\mathrm{dt}}$$

$$= \upsilon_0 \frac{\mathrm{dt}}{\mathrm{dt}} + \frac{1}{2}\mathrm{a}\frac{\mathrm{dt}^2}{\mathrm{dt}} = \upsilon_0 + \frac{1}{2}\mathrm{a}2\mathrm{t} = \upsilon_0 + \mathrm{at}$$

Δηλ. η κλίση λ της γραφικής παράστασης x-t είναι η ταχύτητα, η οποία εδώ αυξάνεται.

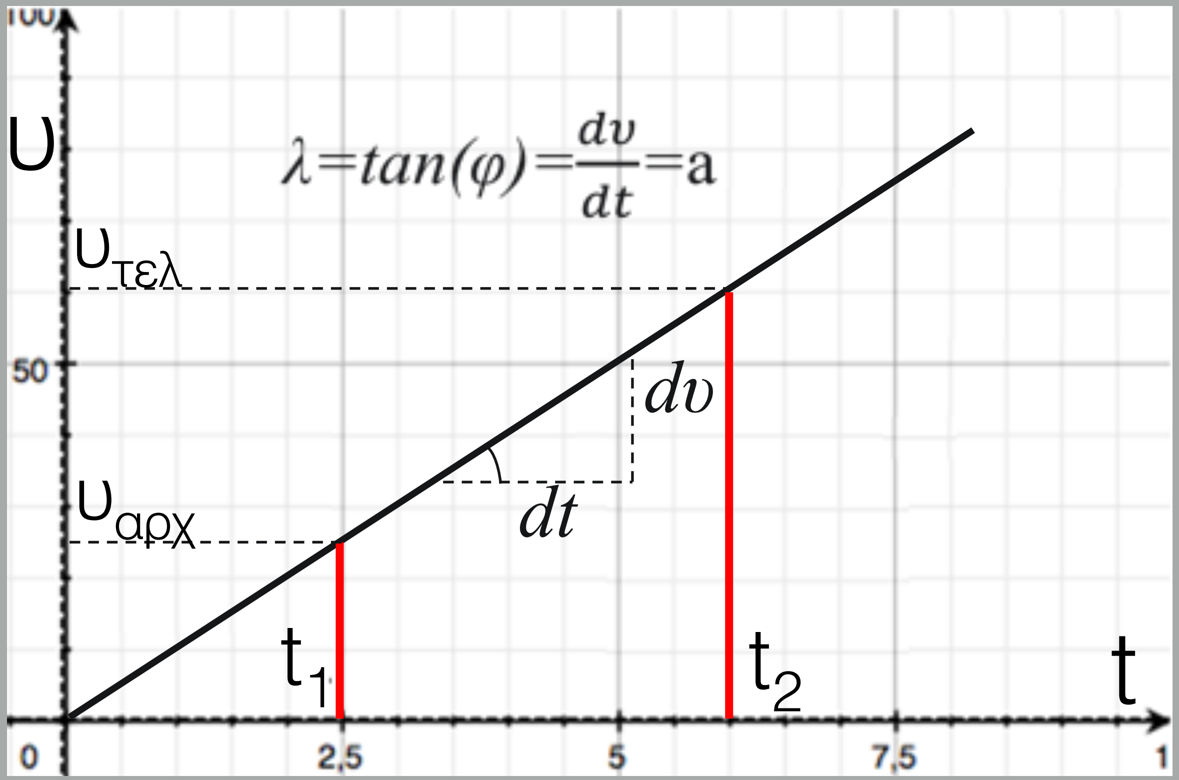
Παράδειγμα 3: Έστω

$f(t) = \upsilon_0 + a \cdot t$

όπου υ_0 και a σταθερές, δηλ.

$\upsilon = \upsilon_0 + a \cdot t$

(εξίσωση ταχύτητας στην ευθ. ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση)



Χρησιμοποιώντας τους κανόνες παραγώγισης:

$$\lambda = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{\mathrm{d}(\upsilon_0 + \mathrm{at})}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{d}\upsilon_0}{\mathrm{dt}} + \frac{\mathrm{d(at)}}{\mathrm{dt}} = 0 + \frac{\mathrm{adt}}{\mathrm{dt}} = \mathrm{a}$$

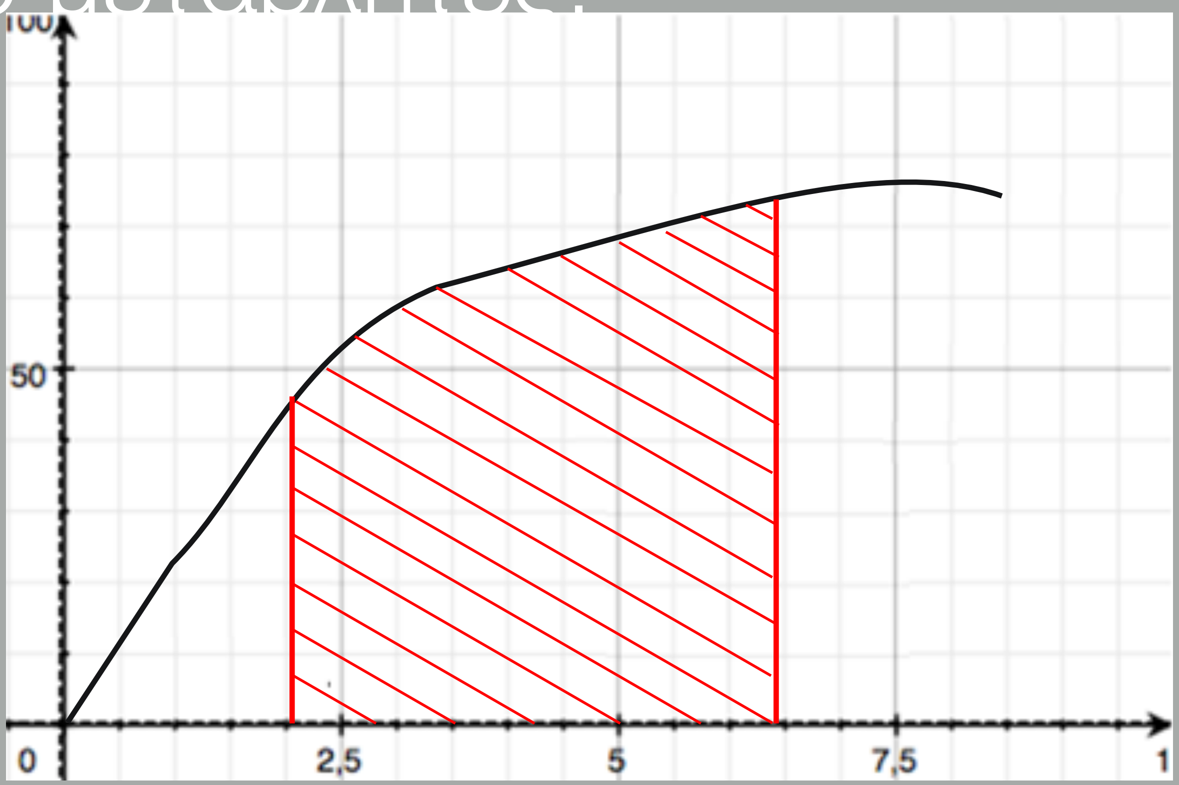
Δηλ. η κλίση λ της γραφικής παράστασης υ-t είναι η επιτάχυνση, που εδώ είναι σταθερή.

Για τις παρακάτω εξισώσεις κίνησης x(t) υπολογίστε τις αντίστοιχες εξισώσεις u(t) και α(t)

$$x(t) = 5t$$
$$x(t) = 3t + 2$$
$$x(t) = 5t^2$$
$$x(t) = 6t^2 - 3t - 10$$

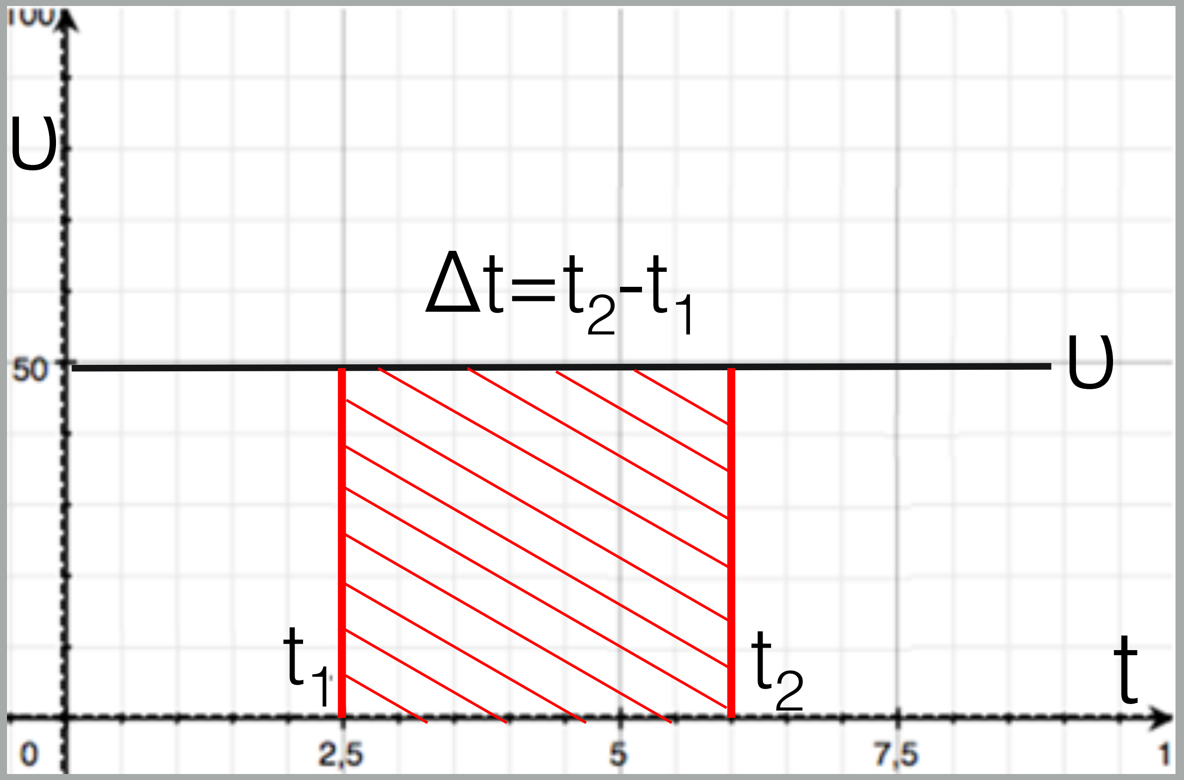
Ολοκλήρωμα και γραφική παράσταση μεταβλητής

- Το ολοκλήρωμα μιας μεταβλητής που εξαρτάται από μία άλλη είναι το εμβαδόν της γραφικής παράστασης που συνδέει τις δύο μεταβλητές.



- Στην περίπτωση αυτή μας ενδιαφέρει η γραφική παράσταση ταχύτητας-χρόνου, $\upsilon = f(t)$

Παράδειγμα 1: Έστω
$\upsilon(t) = \sigma\tau\alpha\theta.$
(εξίσωση ταχύτητας Ε.Ο.Κ.)



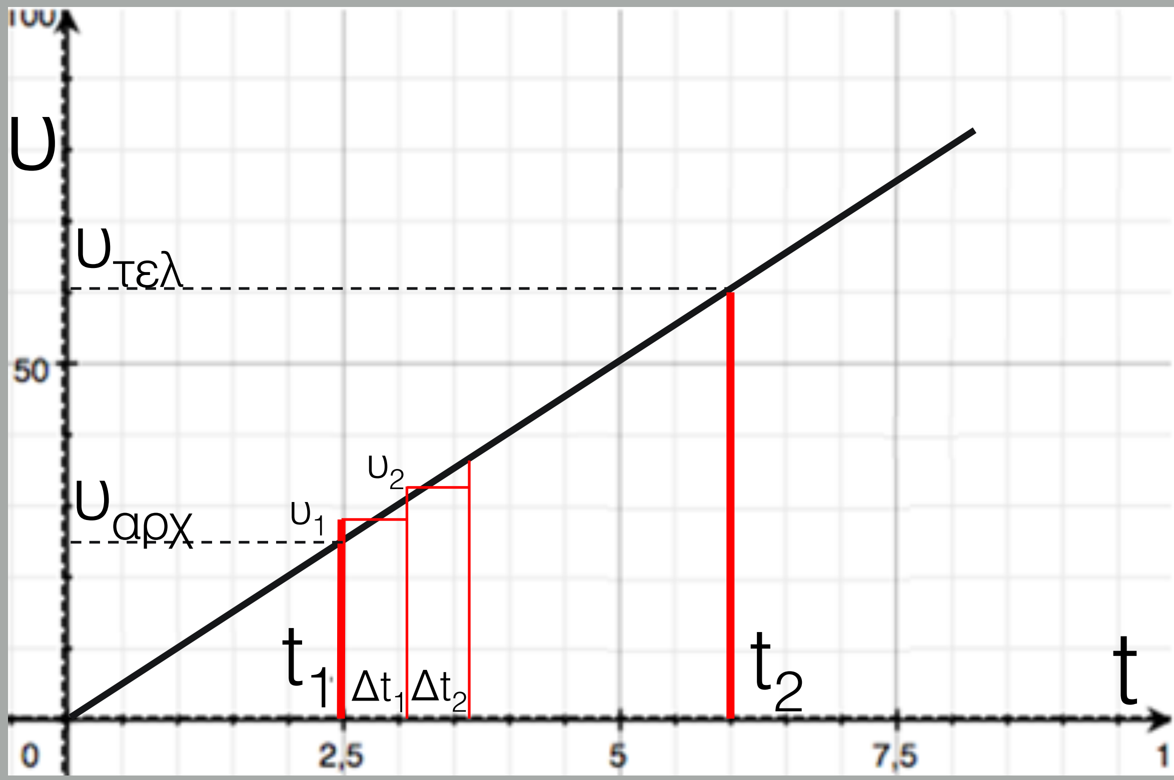
Εμβαδόν $= u(t_2 - t_1) = u\Delta t = \Delta x$

Δηλ. το εμβαδόν της γραφικής παράστασης υ-t είναι η μετατόπιση.

Παράδειγμα 2: Έστω

$v(t) = \upsilon_0 + a \cdot t$

(εξίσωση ταχύτητας στην ευθ. ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση)



Υπολογισμός εμβαδού:

Το χρονικό διάστημα $t_1 \rightarrow t_2$ διαιρείται σε μικρά χρονικά διαστήματα Δt_1, Δt_2,..., Δt_n .

Όταν $n \rightarrow \infty$, τα διαστήματα είναι απείρως μικρά και η ταχύτητα σε καθένα από αυτά τείνει να είναι σταθερή (υ_1, υ_2, …, υ_n).

Τότε το άθροισμα των μικρών παραλληλογράμμων που σχηματίζονται:

$\upsilon_1 \Delta t_1 + \upsilon_2 \Delta t_2 + \ldots + \upsilon_n \Delta t_n$

τείνει προς το συνολικό εμβαδόν κάτω από τη γραφική παράσταση, ενώ επίσης είναι ίσο με τη συνολική μετατόπιση $\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \ldots \Delta x_n$, άρα Δx = Εμβαδόν υ(t).

Άρα: Δx = Εμβαδόν γραφικής παράστασης από t_1 έως t_2 = (εμβαδόν τραπεζίου) =

$$\frac{1}{2}(\upsilon_{\tau\varepsilon\lambda} + \upsilon_{\alpha\rho\chi}) \cdot \Delta t = \frac{1}{2}(\upsilon_{\alpha\rho\chi} + a\Delta t + \upsilon_{\alpha\rho\chi})\Delta t = \frac{1}{2}(2\upsilon_{\alpha\rho\chi} + a\Delta t)\Delta t = \upsilon_{\alpha\rho\chi} + \frac{1}{2}a\Delta t^2$$

Bugatti Chiron Vs Koenigsegg Agera RS ▶ 0-400-0 Km/h Battle

https://youtu.be/S_3R-THET3I

0-400 km/h – 26.88 sec – 1958 m

400-0 km/h – 9.56 sec – 483 m

0-400-0 km/h – 36.44 sec – 2441 m

Υπολογείστε κατά προσέγγιση, από τη γραφική παράσταση: (α) την μέση επιτάχυνση από 0 έως 10s, (β) τη μέση επιβράδυνση, (γ) τη μετατόπιση όταν η ταχύτητα είναι μέγιστη και τη συνολική μετατόπιση (συγκρίνετε με τα παρεχόμενα στοιχεία).