M1

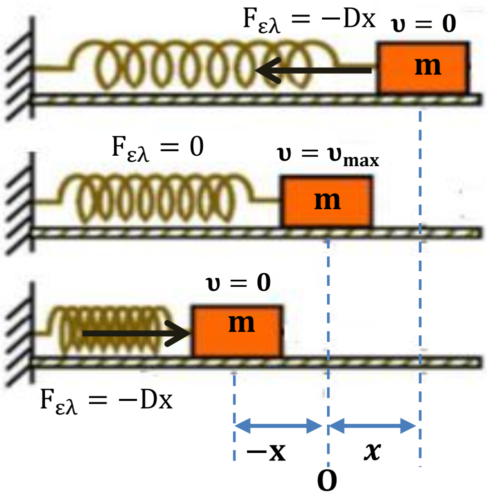
Θεωρία ταλαντώσεων (Συνοπτική περιγραφή).

1 Θεωρία

1.1 Αρμονική ταλάντωση

Μία κίνηση σώματος που επαναλαμβάνεται σε ίσα χρονικά διαστήματα καλείται περιοδική κίνηση. Τέτοιες κινήσεις είναι η ομαλή κυκλική κίνηση και η αρμονική ταλάντωση. Γραμμική αρμονική ταλάντωση ονομάζεται η παλινδρομική κίνηση σώματος σε ευθύγραμμη τροχιά γύρω από ένα σημείο που θεωρείται το κέντρο της (θέση ισορροπίας) ενώ η δύναμη που την προκαλεί είναι ανάλογη κάθε στιγμή της απομάκρυνσης του σώματος από το κέντρο αυτό.

Ένα από τα απλούστερα συστήματα που εκτελούν απλή αρμονική ταλάντωση είναι ένα σώμα με μάζα m που κινείται χωρίς τριβές σε οριζόντιο επίπεδο και είναι συνδεδεμένο στην άκρη ελατηρίου σταθεράς k που υπακούει στο νόμο του Hooke (Σχήμα 1).



Σχήμα 1. Ταλάντωση σώματος συνδεμένου στην άκρη ελατηρίου πού κινείται σε οριζόντιο επίπεδο χωρίς τριβές.

Η δύναμη F του ελατηρίου που ασκείται στο σώμα τείνει να το επαναφέρει στη θέση ισορροπίας και καλείται δύναμη επαναφοράς. Η δύναμη F και η μετατόπιση x έχουν πάντα αντίθετα πρόσημα, ανεξάρτητα εάν το σώμα βρίσκεται αριστερά ή δεξιά από την θέσης ισορροπίας.

Παρακάτω αναφέρονται μερικοί όροι που χρησιμοποιούνται ευρύτατα στη μελέτη των αρμονικών ταλαντώσεων.

1. Το πλάτος A της ταλάντωσης είναι η μέγιστη απομάκρυνση από την θέση ισορροπίας σε απόλυτη τιμή. Μια πλήρης ταλάντωση θεωρείται η συνολική κίνηση που εκτελεί ένα σώμα διερχόμενο διαδοχικά από το ίδιο σημείο.

2. Η περίοδος T είναι ο χρόνος πού απαιτείται για μία πλήρη ταλάντωση και συνήθως μετριέται σε sec.

3. Η συχνότητα f είναι ο αριθμός των επαναλήψεων των ταλαντώσεων στη μονάδα του χρόνου και μετριέται σε Hz (Hertz), μάλιστα ισχύει:

$$1\ \mathrm{Hz} = \frac{1\mathrm{c}}{\sec} = \sec^{-1}$$

4. Η γωνιακή συχνότητα ω είναι το γινόμενο της συχνότητας f επί το 2π δηλαδή: $\omega = 2\pi f$. Η γωνιακή συχνότητα ω εκφράζει τον ρυθμό μεταβολής ενός γωνιακού μεγέθους και μετριέται σε $\mathrm{rad/sec}$ Από τον ορισμό της περιόδου T και της συχνότητας f εύκολα προκύπτει η σχέση:

$$T = \frac{1}{f} \text{ και επομένως: } \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

1.2 Μελέτη αρμονικής ταλάντωσης.

Ένα σώμα μάζας m συνδεδεμένο με ένα ελατήριο σταθεράς D πάνω σε οριζόντιο επίπεδο, όταν κινείται χωρίς τριβές, εκτελεί γραμμική αρμονική ταλάντωση εάν απομακρυνθεί από την θέση ισορροπίας του. Η σχέση μεταξύ της επιτάχυνσης και της θέσης του σώματος με την χρησιμοποίηση του $2^{ου}$ νόμου του Νεύτωνα θα είναι :

$$F = -Dx = m\alpha = m\frac{d^2x}{dt^2} \quad \text{και τελικά:} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{D}{m}\right)x = 0$$

Άρα ένα σώμα θα εκτελεί αρμονική ταλάντωση εάν η απομάκρυνση του x ικανοποιεί την προηγούμενη εξίσωση. Μια λύση της διαφορικής αυτής εξίσωσης αποδεικνύεται ότι είναι η:

$$x = A\eta\mu\left(\sqrt{\frac{D}{m}}\,t + \varphi_0\right) \quad (1)$$

Η σταθερά φ_0 ονομάζεται αρχική φάση και δείχνει από ποιό σημείο του κύκλου της ταλάντωσης άρχισε η κίνηση την χρονική στιγμή $t = 0$. Η τιμή του ημίτονου κυμαίνεται οριακά μεταξύ των τιμών -1 και +1 άρα η απομάκρυνση x θα βρίσκεται πάντοτε μεταξύ του -A και του +A. Επομένως το A θα είναι το πλάτος της ταλάντωσης.

Η περίοδος T είναι ο χρόνος που απαιτείται για μια πλήρη ταλάντωση. Η συνάρτηση του ημίτονου επαναλαμβάνεται και έτσι η ποσότητα μέσα στην παρένθεση της εξίσωσης (1) θα αυξάνει κατά τον παράγοντα 2π σε μια πλήρη επανάληψη, δηλαδή σε χρόνο μιας περιόδου T. Επομένως αντικαθιστώντας το t με Τα ισχύει:

$$\sqrt{\frac{D}{m}}\,T = 2\pi \text{ ή } \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{D}{m}} \quad (2)$$

Η σχέση (1) λόγω της (2) γράφεται: $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$.

Η ταχύτητα ενός σώματος που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση μεταβάλλεται με τον χρόνο t και δίνεται από την σχέση:

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} \text{ και επομένως } \upsilon = \omega A\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0)$$

ενώ η επιτάχυνση: $\alpha = \dfrac{d\upsilon}{dt}$ και επομένως $\alpha = -\omega^2 A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$

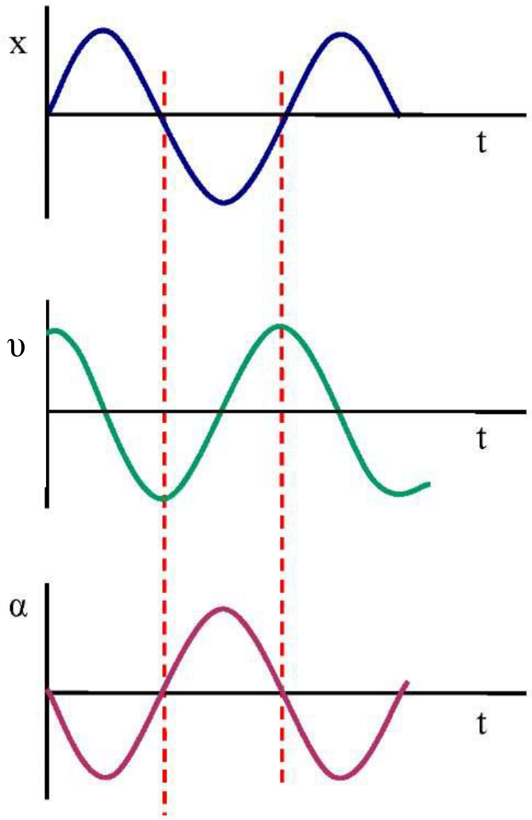
Από τις προηγούμενες σχέσεις παρατηρείται ότι η ταχύτητα «προηγείται» της απομάκρυνσης κατά $\pi/2$ ενώ η επιτάχυνση κατά π. Εάν η αρχική φάση φ_0 είναι μηδέν τότε οι σχέσεις απομάκρυνσης, ταχύτητας και επιτάχυνσης σε συνάρτηση με τον χρόνο θα είναι οι εξής:

$x = A\eta\mu\omega t$

$\upsilon = \omega A\sigma\upsilon\nu\omega t$ και

$\alpha = -\omega^2 A\eta\mu\omega t$

Στο Σχήμα 2 δίνονται οι αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις των προηγουμένων μεγεθών.



Σχήμα 2. Γραφικές παραστάσεις $x = f(t)$, $\upsilon = f(t)$ και $\alpha = f(t)$ σώματος πού εκτελεί γραμμική αρμονική ταλάντωση.

1.3 Φθίνουσα αρμονική ταλάντωση (Ταλάντωση με απόσβεση).

Όταν ένα σώμα εκτελεί ταλάντωση το πλάτος της πρακτικά παρατηρείται να ελαττώνεται και τελικά αυτό μηδενίζεται με το σώμα να ακινητοποιείται . Στην περίπτωση αυτή η ταλάντωση λέγεται φθίνουσα (ή ταλάντωση με απόσβεση). Στην φθίνουσα ταλάντωση εκτός από την δύναμη $F = -Dy$ ασκείται και μια άλλη δύναμη F' (αντίσταση του αέρα ή τριβή) που συνήθως είναι, κάθε στιγμή, ανάλογη της ταχύτητας του σώματος και αντίθετη αυτής δηλαδή ισχύει: $F' = -\lambda\upsilon$. Η σταθερά λ λέγεται σταθερά αποσβέσεως και εξαρτάται από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του σώματος που εκτελεί ταλάντωση καθώς και από την φύση του μέσου εντός του οποίου κινείται το σώμα. Η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο σώμα είναι:

$$\Sigma F = F + F' = -Dy - \lambda\upsilon \text{ και επειδή } \Sigma F = m\alpha \text{ θα ισχύει: } Dy + \lambda\upsilon + m\alpha = 0$$

Αν ληφθεί υπόψη ότι: $\alpha = \dfrac{d^2y}{dt^2}$ η προηγούμενη σχέση γράφεται: $m\dfrac{d^2y}{dt^2} + Dy + \lambda\upsilon = 0$

Η λύση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης αποδεικνύεται ότι είναι της μορφής:

$$y = A\eta\mu(\omega' t + \varphi_0)$$

Το πλάτος Α στη φθίνουσα ταλάντωση δίνεται από τη σχέση:

$$A = A_0 e^{-\left(\frac{\lambda t}{2m}\right)}$$

Όπου A_0 το πλάτος της ελεύθερης, αμείωτης ταλάντωσης και m η μάζα του ταλαντωτή. Από την προηγούμενη σχέση παρατηρείται ότι το πλάτος Α στην φθίνουσα ταλάντωση ελαττώνεται εκθετικά με τον χρόνο και γίνεται ακριβώς ίσο με το πλάτος της αμείωτης ταλάντωσης όταν ισχύει λ=0 δηλαδή όταν δεν υπάρχουν τριβές (ή αντιστάσεις). Η κυκλική συχνότητα ω' της φθίνουσας ταλάντωσης θα δίνεται από την σχέση:

$$\omega' = \sqrt{\left(\frac{D}{m}\right) - \left(\frac{\lambda}{2m}\right)^2} \text{ όπου } \sqrt{\left(\frac{D}{m}\right)} = \omega_0$$

δηλαδή πρόκειται για την κυκλική συχνότητα στην αμείωτη ταλάντωση.

$$\text{Επομένως ισχύει: } \omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\lambda}{2m}\right)^2}$$

Από την προηγούμενη σχέση προκύπτει ότι η κυκλική συχνότητα ω' της φθίνουσας ταλάντωσης είναι μικρότερη της συχνότητας ωο της αμείωτης ταλάντωσης. Έτσι προκύπτει ότι στην φθίνουσα ταλάντωση η περίοδος Τ' είναι μεγαλύτερη από την τιμή της περιόδου Τ της αμείωτης ταλάντωσης.

Εάν ο συντελεστής απόσβεσης είναι τόσο μεγάλος ώστε: $(\lambda/2m) > \omega_0^2$ τότε το ω' δεν μπορεί να είναι πραγματικός αριθμός. Σε αυτή τη περίπτωση δεν έχουμε ταλάντωση αλλά ο ταλαντωτής ξαναγυρίζει στην θέση ισορροπίας χωρίς να «προλάβει» να κάνει ούτε μια πλήρη ταλάντωση.

Η κίνηση αυτή καλείται απεριοδική π.χ. κίνηση ενός εκκρεμούς μέσα σε πυκνόρρευστο υγρό (π.χ. μέλι).