''ΑΝΩΤΕΡΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ''
ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ Σ.Δ.Ε. Β′ ΤΑΞΗΣ

Διδάσκων : Δρ. Γ. Σμυρλής - Επίκ. Καθηγητής

Άσκηση 1: Να βρεθεί η γενική λύση των παρακάτω διαφορικών εξισώσεων αν είναι γνωστή μια λύση τους $y_1(x)$:

(i) $(2x - x^2)y'' + 2(x-1)y' - 2y = 0, \qquad y_1(x) = x - 1.$

(ii) $y'' + \dfrac{1}{x}y' - \dfrac{1}{x^2}y = 0, \qquad y_1(x) = x.$

(iii) $x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 0, \qquad y_1(x) = x.$

(iv) $xy'' - (1+x)y' + y = 0, \qquad y_1(x) = e^x.$

(v) $x^2y'' + xy' + \left(x^2 + \frac{1}{4}\right)y = 0, \qquad y_1(x) = x^{-1/2}\cos x.$

Άσκηση 2: Να βρεθεί η γενική λύση των παρακάτω Δ. Ε. :

(i) $y'' - 6y' + 9y = 0$ (ii) $y'' - y' + y = 0$ (iii) $y'' - 4y' + 3y = 0$

Άσκηση 3: Να βρεθεί η γενική λύση των παρακάτω Δ. Ε. (σε κάθε περίπτωση δίνεται η μορφή της ειδικής λύσης $y_m(x)$) :

(i) $y'' + 2y' + 3y = x^2 + 2x - 1, \qquad y_m(x) = Ax^2 + Bx + C.$

(ii) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}, \qquad y_m(x) = Ax^2e^{2x}.$

(iii) $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}(x^2+1), \qquad y_m(x) = (Ax^4 + Bx^3 + Cx^2)e^{3x}.$

(iv) $y'' + y = \cos x, \qquad y_m(x) = x(A\cos x + B\sin x).$

(v) $y'' + 9y = \sin(2x), \qquad y_m(x) = A\cos(2x) + B\sin(2x).$

(vi) $y'' - y = e^{-x}, \qquad y_m(x) = Axe^{-x}.$

(vii) $y'' - 3y' + 2y = xe^{3x}, \qquad y_m(x) = (Ax+B)e^{3x}.$

(viii) $y'' + y = e^x\cos x, \qquad y_m(x) = e^x(A\cos x + B\sin x).$

Άσκηση 4: Να βρεθεί η γενική λύση των παρακάτω Δ. Ε. :

(i) $y'' + 2y' + y = e^{-x} \ln x$ (ii) $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x^2+1}$

(iii) $y'' + y = \tan x$ (iv) $y'' + y = \dfrac{1}{\cos^3 x}$

(v) $y'' - 4y' + 3y = \dfrac{e^x}{1+e^{-2x}}$ (vi) $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$

(*Υπόδειξη :* Για την εύρεση ειδικής λύσης να χρησιμοποιήσετε τη μέθοδο μεταβολής των παραμέτρων (μέθοδος Lagrange)).

Άσκηση 5: Να βρείτε τη γενική λύση της Δ. Ε.

$$y'' + py' + qy = h(x) \quad (\, p, q \text{ σταθερές}, \;\; h(x) \text{ συνεχής συνάρτηση}),$$

εάν δίνεται ότι οι συναρτήσεις $y_1(x) = \cos x,\; y_2(x) = \cos x + e^x,\; y_3(x) = \cos x + xe^x$ είναι 3 λύσεις της.