"ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ"
ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΙΙ
Μερικές παράγωγοι – Κανόνας της αλυσίδας

Διδάσκων: Γ. Σμυρλής

Μερικές παράγωγοι μιας συνάρτησης f δύο ή περισσοτέρων μεταβλητών είναι αυτές που παίρνουμε διατηρώντας όλες τις μεταβλητές σταθερές, εκτός από μία ως προς την οποία παραγωγίζουμε την f.

Έστω $z = f(x,y)$ συνάρτηση ορισμένη στο ανοικτό σύνολο D και $(x_0\ ,y_0) \in D$. Κινούμενοι πάνω στην ευθεία $y = y_0$, η συνάρτηση f γίνεται μιας μεταβλητής $z = f(x, y_0)$ και η παράγωγός της στο x_0 ορίζεται όπως συνήθως:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x - x_0},$$

με δεδομένο βέβαια ότι το παραπάνω όριο είναι πραγματικός αριθμός. Σε αυτή την περίπτωση το παραπάνω όριο λέγεται **μερική παράγωγος της f ως προς x στο σημείο** $(x_0\ ,y_0)$ και συμβολίζεται με

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0\ ,y_0)$$

ή με

$$f_x(x_0\ ,y_0).$$

Κινούμενοι τώρα πάνω στην ευθεία $x = x_0$, η συνάρτηση f γίνεται πάλι μιας μεταβλητής $z = f(x_0, y)$ και η παράγωγός της στο y_0 ορίζεται όπως συνήθως:

$$\lim_{y\to y_0} \frac{f(x_0,y) - f(x_0,y_0)}{y - y_0},$$

με δεδομένο βέβαια ότι το παραπάνω όριο είναι πραγματικός αριθμός. Σε αυτή την περίπτωση το παραπάνω όριο λέγεται **μερική παράγωγος της f ως προς y στο σημείο** $(x_0\ ,y_0)$ και συμβολίζεται με

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0\ ,y_0)$$

ή με

$$f_y(x_0\ ,y_0).$$

Ανάλογα ορίζονται και οι μερικές παράγωγοι ως προς x, y, z μιας συνάρτησης τριών μεταβλητών $f(x,y,z)$ στο σημείο $(x_0\ ,y_0\ ,z_0)$:

$$f_x(x_0\ ,y_0,z_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0\ ,y_0\ ,z_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0,z_0)-f(x_0,y_0,z_0)}{x-x_0},$$

$$f_y(x_0\ ,y_0,z_0)=\frac{\partial f}{\partial y}(x_0\ ,y_0\ ,z_0)=\lim_{y\to y_0}\frac{f(x_0,y,z_0)-f(x_0,y_0,z_0)}{y-y_0},$$

$$f_z(x_0\ ,y_0,z_0)=\frac{\partial f}{\partial z}(x_0\ ,y_0\ ,z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(x_0,y_0,z)-f(x_0,y_0,z_0)}{z-z_0}.$$

Σχόλιο: Η ύπαρξη των μερικών παραγώγων σε κάποιο σημείο δεν εξασφαλίζει τη συνέχεια της f στο σημείο αυτό (βλ. παράδειγμα (i) παρακάτω).

Παραδείγματα :
(i) Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\[2ex] 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}.$$

Να υπολογίσετε τις μερικές παραγώγους $f_x(0\ ,0)$, $f_y(0\ ,0)$ (εάν υπάρχουν). Είναι η f συνεχής στο $(0,0)$;

Λύση: Έχουμε

$$\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\frac{\frac{x\cdot 0}{x^2+0^2}}{x}=0,\quad \text{για }\ x\neq 0,$$

οπότε

$$\lim_{x\to 0}=\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=0$$

και άρα $f_x(0\ ,0)=0$.

Επιπλέον,

$$\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=\frac{\frac{0\cdot y}{0^2+y^2}}{y}=0,\quad \text{για }\ y\neq 0,$$

οπότε

$$\lim_{y\to 0}=\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=0$$

και άρα $f_y(0\ ,0)=0$.

Η f δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$. Για την ακρίβεια, δεν υπάρχει το όριο της f στο $(0,0)$.

Πράγματι,

- κατά μήκος του δρόμου $y=0$ έχουμε $f(x,y)=0\to 0$, καθώς $x\to 0$.
- κατά μήκος του δρόμου $y=x$ έχουμε $f(x,y)=\dfrac{x^2}{x^2+x^2}=1/2\to 1/2$, καθώς $x\to 0$.

Βρήκαμε δύο διαφορετικές οριακές τιμές και άρα το όριο δεν υπάρχει.

(ii) Να υπολογίσετε τις μερικές παραγώγους f_x , f_y της συνάρτησης $f(x,y)=x^2y+\sin(xy)$.

Λύση: Για τον υπολογισμό της f_x θεωρούμε το y σαν σταθερά και παραγωγίζουμε ως προς x, εφαρμόζοντας τους γνωστούς κανόνες παραγώγισης για συναρτήσεις μιας μεταβλητής. Έτσι έχουμε

$$f_x=\frac{\partial}{\partial x}[x^2y+\sin(xy)]=\frac{\partial}{\partial x}(x^2y)+\frac{\partial}{\partial x}[\sin(xy)]=2xy+y\cos(xy).$$

Ανάλογα,

$$f_y=\frac{\partial}{\partial y}[x^2y+\sin(xy)]=\frac{\partial}{\partial y}(x^2y)+\frac{\partial}{\partial y}[\sin(xy)]=x^2+x\cos(xy).$$

(iii) Να υπολογίσετε τις μερικές παραγώγους f_x , f_y της συνάρτησης $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$, σε κάθε σημείο $(x,y)\neq(0,0)$.

Λύση: Για $(x,y)\neq(0,0)$ έχουμε

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{xy}{x^2+y^2}\right]=y\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{x}{x^2+y^2}\right]=y\frac{\frac{\partial}{\partial x}(x)(x^2+y^2)-x\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}\\ &= y\frac{x^2+y^2-x\cdot(2x)}{(x^2+y^2)^2}=y\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} f_y &= \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{xy}{x^2+y^2}\right]=x\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{y}{x^2+y^2}\right]=x\frac{\frac{\partial}{\partial y}(y)(x^2+y^2)-y\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}\\ &= x\frac{x^2+y^2-y\cdot(2y)}{(x^2+y^2)^2}=x\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\ .\end{aligned}$$

(iv) Να υπολογίσετε τις μερικές παραγώγους f_x , f_y , f_z της συνάρτησης $f(x,y,z) = e^x \ln(x^2+y^2+z^2)$ σε κάθε σημείο $(x,y,z) \neq (0,0,0)$.

Λύση :

Για $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ έχουμε

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{\partial}{\partial x}(e^x)\ln(x^2+y^2+z^2) + e^x\frac{\partial}{\partial x}[\ln(x^2+y^2+z^2)] \\ &= e^x\ln(x^2+y^2+z^2) + e^x\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2) = e^x\ln(x^2+y^2+z^2) + e^x\frac{2x}{x^2+y^2+z^2}, \end{aligned}$$

$$f_y = e^x\frac{\partial}{\partial y}\ln(x^2+y^2+z^2) = e^x\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2+z^2) = e^x\frac{2y}{x^2+y^2+z^2}$$

και

$$f_z = e^x\frac{\partial}{\partial z}\ln(x^2+y^2+z^2) = e^x\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\frac{\partial}{\partial z}(x^2+y^2+z^2) = e^x\frac{2z}{x^2+y^2+z^2}$$

Κανόνας της αλυσίδας

Για συναρτήσεις μιας μεταβλητής υπενθυμίζουμε τον κανόνα παραγώγισης σύνθετης συνάρτησης: εάν $y = f(x)$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση μιας μεταβλητής x και η μεταβλητή x είναι με τη σειρά της παραγωγίσιμη συνάρτηση της μεταβλητής t, τότε η προς t παράγωγος της συνάρτησης $y(t) = f(x(t))$ ισούται με

$$\frac{dy}{dt} = \frac{df}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} \quad .$$

Ο παραπάνω κανόνας επεκτείνεται με κατάλληλο τρόπο και σε συναρτήσεις δύο ή περισσοτέρων μεταβλητών, όπως περιγράφεται στις παρακάτω περιπτώσεις:

I. Συνάρτηση δύο μεταβλητών $z = f(x,y)$ με συνεχείς μερικές παραγώγους f_x , f_y και οι $x = x(t),\ y = y(t)$ είναι παραγωγίσιμες ως προς t.

Σε αυτή την περίπτωση η συνάρτηση $z(t) = f(x(t), y(t))$ είναι παραγωγίσιμη ως προς t και ισχύει

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} \quad .$$

II. Συνάρτηση τριών μεταβλητών $w = f(x,y,z)$ με συνεχείς μερικές παραγώγους f_x , f_y , f_z, όπου οι $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$ είναι παραγωγίσιμες ως προς t.

Σε αυτή την περίπτωση η συνάρτηση $w(t) = f(x(t), y(t), z(t))$ είναι παραγωγίσιμη ως προς t και ισχύει

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} \ .$$

III. Συνάρτηση δύο μεταβλητών $z = f(x,y)$ με συνεχείς μερικές παραγώγους f_x , f_y, όπου οι $x = x(u,v),\ y = y(u,v)$ έχουν μερικές παραγώγους ως προς τις μεταβλητές u, v.

Τότε και η συνάρτηση $z(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$ έχει μερικές παραγώγους ως προς u, v που δίνονται από τις σχέσεις:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} \ .$$

Ειδική περίπτωση: $y = f(x),\ x = x(u,v)$. Τότε,

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{df}{dx} \cdot \frac{\partial x}{\partial u}, \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{df}{dx} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} \ .$$

III. Συνάρτηση τριών μεταβλητών $w = f(x,y,z)$ με συνεχείς μερικές παραγώγους f_x , f_y , f_z, όπου οι $x = x(u,v),\ y = y(u,v),\ z = z(u,v)$ έχουν μερικές παραγώγους ως προς τις μεταβλητές u, v.

Τότε και η συνάρτηση $w(u,v) = f(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ έχει μερικές παραγώγους ως προς u, v που δίνονται από τις σχέσεις:

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial u},$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} \ .$$

Με βάση τα παραπάνω μπορούμε να επεκτείνουμε τον κανόνα της αλυσίδας και σε άλλες περιπτώσεις.

Π.χ.
IV. Εάν $z = f(x, y)$ και $x = x(u, v, s),\ y = y(u, v, s)$, έχουμε

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}$$

και

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} \ .$$

Παραδείγματα:

(i) Εάν $z = f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ και $x = e^t,\ y = \ln(1 + t)$, να υπολογίσετε την παράγωγο $\dfrac{dz}{dt}$ στη θέση $t = 0$.

Λύση: Εφαρμόζοντας την περίπτωση I του κανόνα της αλυσίδας έχουμε

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = (2x + y)e^t + (x + 2y)\frac{1}{1 + t}.$$

Για $t = 0$ είναι $x = 1,\ y = 0$, οπότε η παράγωγος $\dfrac{dz}{dt}$ στη θέση $t = 0$ ισούται με 3.

(ii) Εάν $w = f(x, y, z) = xy + yz + xz$ και $x = t\cos t,\ y = t\sin t,\ z = t$, να υπολογίσετε την παράγωγο $\dfrac{dw}{dt}$ στη θέση $t = \pi/2$.

Λύση: Εφαρμόζοντας την περίπτωση II του κανόνα της αλυσίδας έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} \\ &= (y + z)(\cos t - t\sin t) + (x + z)(\sin t + t\cos t) + (x + y). \end{aligned}$$

Για $t = \pi/2$, είναι $x = 0,\ y = z = \pi/2$ και η ζητούμενη παράγωγος ισούται με $(\pi/2 + \pi/2)(0 - \pi/2) + (0 + \pi/2)(1 + 0) + (0 + \pi/2) = \pi - \pi^2/2$.

(iii) Εάν $z = f(x, y)$ και $x = u - v,\ y = v - u$, να δείξετε ότι

$$\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = 0.$$

Λύση: Εφαρμόζοντας την περίπτωση III του κανόνα της αλυσίδας έχουμε

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot (-1),$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot (-1) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot 1$$

και προσθέτοντας παίρνουμε εύκολα την αποδεικτέα.

(iv) Εάν $z = f(x, y)$ και $x = u^2 + v^2,\ y = 2uv$, να δείξετε ότι

$$\left(\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = 4(x + y)\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\right)^2.$$

Λύση: Εφαρμόζοντας την περίπτωση III του κανόνα της αλυσίδας έχουμε

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot 2u + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot 2v,$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot 2v + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot 2u$$

και προσθέτοντας παίρνουμε

$$\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = 2(u + v)\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Επομένως,

$$\left(\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = 4(u + v)^2\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\right)^2$$

και επειδή $(u + v)^2 = u^2 + v^2 + 2uv = x + y$, έπεται η αποδεικτέα.

(v) Εάν $w = f\left(\dfrac{y-x}{xy},\ \dfrac{z-x}{xz}\right)$, να δείξετε ότι

$$x^2\frac{\partial w}{\partial x} + y^2\frac{\partial w}{\partial y} + z^2\frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Λύση: Θέτουμε

$$u = \frac{y-x}{xy}\ , \qquad v = \frac{z-x}{xz}.$$

Εφαρμόζοντας τον κανόνα της αλυσίδας (περίπτωση IV) στη συνάρτηση $w = f(u,v)$ (με κατάλληλη προσαρμογή στο συμβολισμό) έχουμε

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}\ .$$

Είναι

$$u = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}\ , \quad v = \frac{1}{x} - \frac{1}{z}\ ,$$

οπότε

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{x^2}\ , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{y^2}\ , \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

και

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{x^2}\ , \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0\ , \quad \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{z^2}\ .$$

Συνεπώς,

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{f_u + f_v}{x^2},$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{1}{y^2} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot 0 = \frac{f_u}{y^2},$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot 0 + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{1}{z^2} = \frac{f_v}{z^2}$$

και άρα

$$x^2\frac{\partial w}{\partial x} + y^2\frac{\partial w}{\partial y} + z^2\frac{\partial w}{\partial z} = -(f_u + f_v) + f_u + f_v = 0.$$

Ασκήσεις.

1. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x,y) = \begin{cases} x\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

   Να υπολογίσετε τις μερικές παραγώγους $f_x(0\ ,0)$, $f_y(0\ ,0)$ (εάν υπάρχουν). Είναι η f συνεχής στο $(0,0)$;

2. Να βρείτε τις μερικές παραγώγους $f_x\ , f_y$ της συνάρτησης $f(x,y)$, όπου:

   (i) $f(x,y) = e^x \cos y + e^y \sin x$

   (ii) $f(x,y) = \ln(\ x + y + \sqrt{x^2+y^2}\ )\ , (x,y) \neq (0,0)$

   (iii) $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\ , (x,y) \neq (0,0)$

   (iv) $f(x,y) = yx^3 + x^4 + x^2 + y^2 + x + y$

   (v) $(x^2+y^2)e^{x^2+y^2}$

   (vi) $\sin^2(xy) + \cos^2(x^2-y^2)$

3. Να βρείτε τις μερικές παραγώγους $f_x\ , f_y\ , f_z$ της συνάρτησης $f(x,y,z)$, όπου:

   (i) $f(x,y,z) = x^2 e^{2y+3z} \cos z$

   (ii) $f(x,y,z) = \ln(x^2+y^2+z^2\ )\ , (x,y,z) \neq (0,0,0)$

   (iii) $f(x,y,z) = \dfrac{xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\ , (x,y,z) \neq (0,0,0)$

   (iv) $f(x,y,z) = x^3 e^{y\cos z} + y^3 e^{x\cos z}$

   (v) $f(x,y,z) = z\sin^2(xy) + y\cos^2(xz)$

4. Εάν $z = f(x,y) = e^{3x+2y}$ και $x = \cos t,\ y = t^2$, να υπολογίσετε την παράγωγο $\dfrac{dz}{dt}$ στη θέση $t = 0$.

5. Εάν $z = \sin(x-y),\ x = u \cdot v,\ y = u - v,$ να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι $\dfrac{\partial z}{\partial u}\ , \dfrac{\partial z}{\partial v}$ συναρτήσει των u, v.

6. Εάν $w = \ln(x^2 + y^2 + 2z),\ x = r + s,\ y = r - s,\ z = 2rs,$ να βρείτε τις παραγώγους $\dfrac{\partial w}{\partial r}, \dfrac{\partial w}{\partial s}$ στη θέση $(r, s) = (1, 1)$.

7. Εάν $z = f(x, y)$ και $x = u\cos a - v\sin a,\ y = u\sin a + v\cos a$ (a σταθερά), να δείξετε ότι

$$\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2.$$

8. Εάν $z = yf(u)$ και $u = xy$, να δείξετε ότι

$$y\frac{\partial z}{\partial y} - x\frac{\partial z}{\partial x} = z.$$

9. Εάν $z = f(u)$ και $u = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$, να δείξετε ότι

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

10. Εάν $z = f(x, y)$ και

$$x = \frac{u^2 + v^2}{uv}, \quad y = \frac{u^2 - v^2}{uv},$$

να δείξετε ότι

$$u\frac{\partial z}{\partial u} + v\frac{\partial z}{\partial v} = 0\ .$$

11. Εάν $w = x^3 f(u,\ v)$ και $u = \dfrac{y}{x}\ ,\ v = \dfrac{z}{x}$, να δείξετε ότι

$$x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} + z\frac{\partial w}{\partial z} = 3w.$$

12. Εάν $w = f(u,\ v,\ s)$ και $u = \dfrac{x - y}{xy},\ v = \dfrac{y - z}{yz},\ s = \dfrac{z - x}{xz}$, να δείξετε ότι

$$x^2\frac{\partial w}{\partial x} + y^2\frac{\partial w}{\partial y} + z^2\frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$