“ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ”
ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΙΙΙ
“Καμπύλες στο επίπεδο και στο χώρο —Επιφάνειες στο χώρο και εφαπτόμενα επίπεδα”

Διδάσκων: Γ. Σμυρλής

Ι. Καμπύλες στο επίπεδο.

Μια καμπύλη στο επίπεδο μπορεί να παρασταθεί με δύο τρόπους:

Α. Με καρτεσιανή εξίσωση της μορφής

$$f(x, y) = 0, \tag{1}$$

όπου $f(x, y)$ συνάρτηση δύο μεταβλητών.

Παραδείγματα:

(i) Το γράφημα $y = f(x)$ μιας συνάρτησης $f(x)$ είναι προφανώς μια καμπύλη στο επίπεδο. Η εξίσωση $y = f(x) \Leftrightarrow y - f(x) = 0$ είναι της μορφής (1) (αρκεί να θέσουμε $f(x, y) = y - f(x)$). Π.χ. η εξίσωση $y = x^2$ παριστάνει στο επίπεδο παραβολή με άξονα συμμετρίας τον άξονα Oy.

(ii) Η εξίσωση $x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 1 = 0$ είναι της μορφής (1) (εδώ $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$) και παριστάνει στο επίπεδο το μοναδιαίο κύκλο, δηλ. τον κύκλο με κέντρο το $O(0, 0)$ και ακτίνα 1.

(iii) Η εξίσωση $y^2 = x \Leftrightarrow y^2 - x = 0$ είναι της μορφής (1) (εδώ $f(x, y) = y^2 - x$) και παριστάνει στο επίπεδο παραβολή με άξονα συμμετρίας τον άξονα Ox.

(iv) Η εξίσωση $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1 \Leftrightarrow x^2/a^2 + y^2/b^2 - 1 = 0$ είναι της μορφής (1) (εδώ $f(x, y) = x^2/a^2 + y^2/b^2 - 1$) και παριστάνει στο επίπεδο έλλειψη με κέντρο το $O(0, 0)$.

(v) Η εξίσωση $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ είναι της μορφής (1) (εδώ $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$) και παριστάνει στο επίπεδο μια καμπύλη που λέγεται *φύλλο του Καρτέσιου.* Στη σημείο $O(0, 0)$ η καμπύλη τέμνει τον εαυτό της.

Β. Με παραμετρικές εξισώσεις της μορφής

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in I, \tag{2}$$

όπου I διάστημα στην πραγματική ευθεία.

Η μεταβλητή t λέγεται **παράμετρος** και σε κάθε τιμή της παραμέτρου μέσα από το I αντιστοιχεί ένα συγκεκριμένο σημείο της καμπύλης $M(x(t), y(t))$. Καθώς το t διατρέχει το διάστημα I, το σημείο $M(x(t), y(t))$ κινείται πάνω στην καμπύλη και με αυτόν τον τρόπο καλύπτονται όλα τα σημεία της.

Από φυσικής άποψης, οι εξισώσεις (2) εκφράζουν τη θέση ενός κινητού σε συνάρτηση με το χρόνο t, όταν αυτό κινείται κατά μήκος της καμπύλης.

Τονίζουμε ότι η αναπαράσταση μιας καμπύλης στο επίπεδο με παραμετρικές εξισώσεις **δεν είναι μοναδική**.

Σημειώνουμε τέλος ότι η μετάβαση από τις παραμετρικές εξισώσεις (2) στην καρτεσιανή εξίσωση (1) μπορεί να γίνει με απαλοιφή του t, πράγμα όχι πάντα εύκολο στην πράξη. Αλλά και για την αντίστροφη πορεία, δηλ. για την εύρεση παραμετρικών εξισώσεων όταν μας δίνεται η καρτεσιανή εξίσωση, δεν υπάρχει γενική μέθοδος (βλ. παραδείγματα παρακάτω).

Παραδείγματα:

(i) Οι εξισώσεις
$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad t \in [0, 2\pi],$$
αποτελούν παραμετρικές εξισώσεις του μοναδιαίου κύκλου. Εδώ η παράμετρος t είναι η γωνία που σχηματίζει η διανυσματική ακτίνα OM ενός σημείου M του κύκλου με τον θετικό ημιάξονα Ox.

Απαλοίφοντας το t από τις παραπάνω εξισώσεις παίρνουμε τη γνωστή καρτεσιανή εξίσωση $x^2 + y^2 = 1$ του μοναδιαίου κύκλου.

Όπως ήδη αναφέραμε, η αναπαράσταση μιας καμπύλης στο επίπεδο με παραμετρικές εξισώσεις δεν είναι μοναδική. Έτσι, για το μοναδιαίο κύκλο έχουμε π.χ. και τις παραμετρικές εξισώσεις
$$x = \cos(2t), \quad y = \sin(2t), \quad t \in [0, \pi].$$

(ii) Οι εξισώσεις
$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t, \quad t \in [0, 2\pi], \quad a > 0,\ b > 0,$$
αποτελούν παραμετρικές εξισώσεις έλλειψης.Με απαλοιφή του t παίρνουμε τη γνωστή καρτεσιανή εξίσωση $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

(iii) Οι εξισώσεις
$$x = \frac{3t}{1+t^3}, \quad y = \frac{3t^2}{1+t^3},$$

αποτελούν παραμετρικές εξισώσεις του φύλλου του Καρτέσιου. Προκύπτουν θέτοντας $y = tx$ στην καρτεσιανή εξίσωση $x^3 + y^3 = 3xy$.

Η καμπύλη έχει ένα διπλό σημείο στο $O(0,0)$ (δηλ. περνάει δύο φορές από αυτό) που αντιστοιχεί στις τιμές $t = 0$ και $t = \infty$.

(iv) Οι εξισώσεις

$$x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t,$$

αποτελούν παραμετρικές εξισώσεις μιας καμπύλης του επιπέδου που λέγεται *κυκλοειδής*.

Η κυκλοειδής είναι η καμπύλη που διαγράφει ένα συγκεκριμένο σημείο της περιφέρειας κυκλικού τροχού ακτίνας 1, όταν αυτός κυλά (χωρίς να ολισθαίνει) κατά μήκος μιας οριζόντιας ευθείας γραμμής. Με άλλα λόγια, είναι η τροχιά που διαγράφει ένα καρφί σε ένα περιστρεφόμενο λάστιχο αυτοκινήτου ακτίνας 1.

Εφαπτόμενο διάνυσμα – Εξίσωση εφαπτομένης καμπύλης.

Όταν μελετάμε την κίνηση ενός σωματιδίου κατά μήκος μιας καμπύλης στο επίπεδο, θέλουμε το διάνυσμα της ταχύτητας του σωματιδίου να είναι εφαπτόμενο στην καμπύλη (π.χ. η περίπτωση της κυκλικής κίνησης).

Με βάση αυτό το σκεπτικό μπορούμε να προσδιορίσουμε ένα εφαπτόμενο διάνυσμα (και άρα την εξίσωσης της εφαπτομένης) σε σημείο καμπύλης του επιπέδου, όταν αυτή αναπαριστάται με παραμετρικές εξισώσεις.

Συγκεκριμένα, έστω η καμπύλη γ με παραμετρικές εξισώσεις

$$\gamma : x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in I,$$

όπου οι συναρτήσεις $x(t)$, $y(t)$ είναι παραγωγίσιμες στο διάστημα I με συνεχή παράγωγο. Τότε, το διάνυσμα

$$(x'(t), y'(t)) = \left(\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} \right)$$

είναι **εφαπτόμενο** της καμπύλης γ στο σημείο $(x(t), y(t))$ και εκφράζει το διάνυσμα της **ταχύτητας** του σωματιδίου που κινείται πάνω στην γ.

Παράδειγμα: Δίνεται η καμπύλη

$$\gamma : x = e^t, \quad y = \ln(1+t), \quad t > 0.$$

Να βρείτε το διάνυσμα της ταχύτητας και την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο $M(1,0)$.

Λύση: Το σημείο $M(1,0)$ αντιστοιχεί στην τιμή $t=0$ της παραμέτρου.

Είναι $x'(t)=e^t,\ y'(t)=1/(1+t)$, οπότε το διάνυσμα της ταχύτητας στο σημείο M είναι το

$$(x'(0),y'(0))=(1,1).$$

Η εφαπτομένη της καμπύλης στο $M(1,0)$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα της ταχύτητας και άρα έχει παραμετρικές εξισώσεις

$$x=1+t, \quad y=t.$$

Με απαλοιφή του t παίρνουμε την καρτεσιανή της εξίσωση $y=x-1$.

Το πρόβλημα που τίθεται φυσιολογικά είναι η εύρεση της εξίσωσης της εφαπτομένης σε σημείο καμπύλης του επιπέδου, όταν δίνεται η καρτεσιανή της εξίσωση. Σε αυτό δίνει λύση η παρακάτω

Πρόταση: Δίνεται η καμπύλη

$$\gamma : f(x,y)=0, \tag{3}$$

όπου η συνάρτηση $f(x,y)$ έχει συνεχείς μερικές παραγώγους f_x , f_y. Εάν $M_0(x_0,y_0)$ σημείο της γ, τότε:

(i) το διάνυσμα

$$(f_x(x_0,y_0),\ f_y(x_0,y_0))$$

είναι κάθετο στην εφαπτομένη της γ στο M_0.

(ii) η καρτεσιανή εξίσωση της εφαπτομένης της γ στο M_0 είναι

$$f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)=0.$$

Απόδειξη: Η καμπύλη γ έχει κάποιες παραμετρικές εξισώσεις

$$x=x(t), \quad y=y(t) \quad t\in I. \tag{4}$$

Επειδή οι (3), (4) αναπαριστούν την ίδια καμπύλη, έχουμε

$$f(x(t),y(t))=0, \quad \forall t\in I.$$

Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της παραπάνω ως προς t και εφαρμόζοντας τον **κανόνα της αλυσίδας** παίρνουμε

$$\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}=0, \quad \forall t\in I$$

και ισοδύναμα

$$(f_x \ , f_y) \cdot (x'(t), y'(t)) = 0, \quad \forall t \in I.$$

Η τελευταία μας δίνει ότι σε κάθε σημείο $M_0(x_0, y_0)$ της καμπύλης γ, το διάνυσμα

$$(f_x(x_0, y_0) \ , f_y(x_0, y_0))$$

είναι κάθετο στο διάνυσμα της ταχύτητας και άρα κάθετο στην εφαπτομένη (ε) της γ στο M_0.

Με αυτόν τον τρόπο αποδεικνύεται το σκέλος (i) της πρότασης.

Για το σκέλος (ii), θεωρούμε ένα τυχαίο σημείο $M(x, y)$ της (ε).

Τα σημεία M_0 , M ανήκουν πάνω στην εφαπτομένη (ε) οπότε, σύμφωνα με τα παραπάνω, το διάνυσμα $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$ θα είναι κάθετο στο διάνυσμα $(f_x(x_0, y_0) \ , f_y(x_0, y_0))$. Ισοδύναμα,

$$(f_x(x_0, y_0) \ , f_y(x_0, y_0)) \cdot (x - x_0 \ , y - y_0) = 0 \Leftrightarrow f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$$

κι έτσι προκύπτει η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $M_0(x_0, y_0)$. □

Ορισμός: Το διάνυσμα

$$(f_x(x_0, y_0) \ , f_y(x_0, y_0))$$

που εμφανίζεται στην παραπάνω πρόταση ονομάζεται **κλίση (gradient)** της συνάρτησης $f(x, y)$ στο σημείο $M_0(x_0, y_0)$ και συμβολίζεται με

$$\vec{\nabla} f(M_0) \ .$$

Σύμφωνα με την πρόταση, το διάνυσμα $\vec{\nabla} f(M_0)$ είναι **κάθετο** στην καμπύλη $\gamma : f(x, y) = 0$ στο M_0, δηλ. είναι κάθετο στην εφαπτομένη της γ στο M_0.

Παράδειγμα: Να βρείτε ένα κάθετο διάνυσμα καθώς και την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης $x^2 + xy + y^2 = 7$ στο σημείο $M_0(1, 2)$.

Λύση: Θέτουμε $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 7$. Είναι

$$f_x = 2x + y, \quad f_y = 2y + x$$

και ειδικότερα στο σημείο $M_0(1, 2)$,

$$f_x(M_0) = 2 \cdot 1 + 2 = 4, \quad f_y(M_0) = 2 \cdot 2 + 1 = 5.$$

Ένα διάνυσμα κάθετο στην καμπύλη στο σημείο $M_0(1,2)$ είναι η κλίση

$$\vec{\nabla} f(M_0) = (f_x(M_0),\ f_y(M_0)) = (4,5)$$

και η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης στο $M_0(1,2)$ είναι

$$4(x-1) + 5(y-2) = 0 \Leftrightarrow 4x + 5y = 14.$$

II. Στοιχειώδες υπόβαθρο Αναλυτικής Γεωμετρίας του χώρου.

Α. Εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων.

Έστω $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ διανύσματα στον $\mathbb{R}^3$.

- **γωνία** $\varphi = (\widehat{\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}})$ των $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ είναι η κυρτή γωνία κατά την οποία πρέπει να στραφεί το διάνυσμα $\overrightarrow{u}$, πάνω στο επίπεδο των $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, ώστε να γίνει ομόρροπο με το $\overrightarrow{v}$.

  Από τον ορισμό προκύπτει ότι $(\widehat{\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}}) = (\widehat{\overrightarrow{v},\ \overrightarrow{u}})$ (στο επίπεδο αυτές οι δύο γωνίες είναι αντίθετες!)

  Επιπλέον $0 \leq \varphi \leq \pi$ και $\varphi = 0$ (αντ. π) αν $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ ομόρροπα (αντ. αντίρροπα).

- **εσωτερικό γινόμενο** των $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ είναι ο πραγματικός αριθμός

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u}||\ ||\overrightarrow{v}|| \cos\varphi,$$

  όπου $||\overrightarrow{u}||$, $||\overrightarrow{v}||$ τα μέτρα των $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ και φ η γωνία των $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$.

  Από τον ορισμό προκύπτουν οι παρακάτω ιδιότητες:

  (i) $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$

  (ii) $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = ||\overrightarrow{u}||^2$

  (iii) $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0 \Leftrightarrow$ (τα $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ είναι κάθετα).

  (iv) $(\lambda\overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{v} = \lambda(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u} \cdot (\lambda\overrightarrow{v})$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

  Υπολογισμός εσωτερικού γινομένου. Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων υπολογίζεται εύκολα όταν γνωρίζουμε τις συντεταγμένες τους. Συγκεκριμένα, αν $\overrightarrow{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\overrightarrow{v} = (x_2, y_2, z_2)$, τότε

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2\ .$$

  Από την παραπάνω προκύπτει ότι εάν $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ τρία διανύσματα του $\mathbb{R}^3$ ισχύει

$$\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}.$$

Β. Εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων.

Έστω $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ διανύσματα στον $\mathbb{R}^3$.

Εξωτερικό γινόμενο των $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ είναι το διάνυσμα $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ που έχει

- μέτρο ίσο με $||\overrightarrow{u}||||\overrightarrow{v}|| \sin\varphi$, όπου φ η γωνία των $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$.
- διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο που ορίζουν οι φορείς των $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$.
- φορά τη φορά κίνησης δεξιόστροφου κοχλία όταν αυτός στραφεί από το $\overrightarrow{u}$ προς το $\overrightarrow{v}$.

Ιδιότητες: Έστω $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ διανύσματα στον $\mathbb{R}^3$ και λ, $\mu \in \mathbb{R}$. Τότε:

(i) $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = -(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u})$.

(ii) $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ παράλληλα).

(iii) $\overrightarrow{u} \times (\lambda\overrightarrow{v} + \mu\overrightarrow{w}) = \lambda(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) + \mu(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w})$.

Υπολογισμός εξωτερικού γινομένου.

Έστω $\overrightarrow{i} = (1,0,0)$, $\overrightarrow{j} = (0,1,0)$, $\overrightarrow{k} = (0,0,1)$ τα μοναδιαία διανύσματα των αξόνων.

Εάν $\overrightarrow{u} = x_1\overrightarrow{i} + y_1\overrightarrow{j} + z_1\overrightarrow{k} = (x_1, y_1, z_1)$, $\overrightarrow{v} = x_2\overrightarrow{i} + y_2\overrightarrow{j} + z_2\overrightarrow{k} = (x_2, y_2, z_2)$, τότε

$$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \overrightarrow{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \overrightarrow{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \overrightarrow{k}.$$

Παράδειγμα: Να βρείτε ένα διάνυσμα κάθετο στα διανύσματα

$$\overrightarrow{u} = (1,2,3), \quad \overrightarrow{v} = (2,3,1)\ .$$

Λύση: Ένα τέτοιο διάνυσμα είναι το εξωτερικό γινόμενο των $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$, δηλ. το

$$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \overrightarrow{i} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \overrightarrow{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \overrightarrow{k}$$

$$= -7\overrightarrow{i} + 5\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k} = (-7, 5, -1).$$

Γ. Παραμετρικές εξισώσεις ευθείας στο χώρο.

Θεωρούμε στον $\mathbb{R}^3$ ένα σταθερό σημείο $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ και ένα σταθερό διάνυσμα $\overrightarrow{u} = (a, b, c)$.

Οι παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας (ε) που διέρχεται από το σημείο $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\overrightarrow{u}$ είναι οι παρακάτω:

$$\begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \\ z = z_0 + tc \end{cases}$$

ή σε πινακοποιημένη μορφή

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix},$$

όπου t παράμετρος με αυθαίρετες τιμές στο $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα: Να γράψετε τις παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $M_0(1, 2, 3)$ και είναι παράλληλο στο διάνυσμα $\overrightarrow{u} = (0, 1, 4)$.

Λύση: Σύμφωνα με τα παραπάνω οι ζητούμενες παραμετρικές εξισώσεις είναι

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

ή

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = 2 + t \\ z = 3 + 4t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Δ. Καρτεσιανή εξίσωση επιπέδου στο χώρο.

Θεωρούμε στον $\mathbb{R}^3$ ένα σταθερό σημείο $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ και ένα σταθερό διάνυσμα $\overrightarrow{n} = (n_1, n_2, n_3)$. Η καρτεσιανή εξίσωση του επιπέδου (π) που είναι κάθετο στο διάνυσμα $\overrightarrow{n}$ και διέρχεται από το σημείο M_0 είναι

$$(\pi) : n_1(x - x_0) + n_2(y - y_0) + n_3(z - z_0) = 0.$$

Παράδειγμα: Να γράψετε την καρτεσιανή εξίσωση του επιπέδου που είναι κάθετο στο διάνυσμα $\overrightarrow{n} = (2, -1, 3)$ και διέρχεται από το σημείο $M_0(0, 1, 4)$.

Λύση: Η ζητούμενη εξίσωση είναι

$$2(x - 0) - (y - 1) + 3(z - 4) = 0 \Leftrightarrow 2x - y + 3z = 11.$$

Σημαντική παρατήρηση: Η γενική μορφή καρτεσιανής εξίσωσης επιπέδου στο χώρο είναι

$$Ax + By + Cz = D,$$

όπου $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ και τα A, B, C δεν είναι όλα 0.

Εάν (π) το επίπεδο που έχει την παραπάνω εξίσωση, τότε ένα διάνυσμα κάθετο προς το (π) είναι το $\overrightarrow{n} = (A, B, C)$.

Δύο χαρακτηριστικές ασκήσεις:

1) Να βρείτε την καρτεσιανή εξισωση του επιπέδου που διέρχεται από τα σημεία

$$M_1(1, 0, 2),\ M_2(2, 1, 2),\ M_3(1, 1, 3).$$

Λύση: Ένα διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο είναι το

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3}.$$

Είναι

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (1, 1, 0), \quad \overrightarrow{M_1M_3} = (0, 1, 1),$$

οπότε

$$\overrightarrow{n} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \overrightarrow{i} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \overrightarrow{j} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \overrightarrow{k}$$

$$= \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k} = (1, -1, 1).$$

Ένα σημείο του επιπέδου είναι π.χ. το $M_1(1,0,2)$, οπότε η ζητούμενη εξίσωση είναι

$$1\cdot(x-1)-1\cdot(y-0)+1\cdot(z-2)=0 \Leftrightarrow x-y+z=3.$$

2) Να βρείτε τις παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας (ε) που είναι η τομή των επιπέδων

$$(\pi_1): 3x-6y-2z=7, \quad (\pi_2): 2x+y-2z=5.$$

Λύση: Ένα διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο (π_1) είναι το $\overrightarrow{n}_1=(3,-6,-2)$ και ένα διάνυσμα κάθετο στο (π_2) είναι το $\overrightarrow{n}_2=(2,1,-2)$. Έπεται ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{n}_1$, $\overrightarrow{n}_2$ είναι και τα δύο κάθετα στην ευθεία (ε), αφού η (ε) ανήκει και στα δύο παραπάνω επίπεδα. Συνεπώς, η (ε) θα είναι παράλληλη στο εξωτερικό γινόμενο των $\overrightarrow{n}_1$, $\overrightarrow{n}_2$, δηλ. στο

$$\overrightarrow{n}_1\times\overrightarrow{n}_2=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 3 & -6 & -2\\ 2 & 1 & -2\end{vmatrix}=\ldots=(14,2,15).$$

Για να βρούμε και ένα σημείο της (ε), βρίσκουμε ένα κοινό σημείο των δύο επιπέδων. Θέτοντας $z=0$ στις εξισώσεις των επιπέδων και λύνοντας το σύστημα που προκύπτει ως προς x,y παίρνουμε το σημείο $(37/15,1/15,0)$.

Από τα παραπάνω έπεται ότι οι παραμετρικές εξισώσεις της (ε) είναι

$$\begin{cases} x=37/15+14t,\\ y=1/15+2t \quad , \quad t\in\mathbb{R}.\\ z=15t\end{cases}$$

III. Καμπύλες στο χώρο.

Μία καμπύλη στον τρισδιάστατο χώρο $\mathbb{R}^3$ αναπαριστάται συνήθως με παραμετρικές εξισώσεις της μορφής

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad t \in I, \tag{5}$$

όπου I διάστημα στην πραγματική ευθεία.

Η μεταβλητή t λέγεται **παράμετρος** και σε κάθε τιμή της παραμέτρου μέσα από το I αντιστοιχεί ένα συγκεκριμένο σημείο της καμπύλης $M(x(t), y(t), z(t))$. Καθώς το t διατρέχει το διάστημα I, το σημείο $M(x(t), y(t), z(t))$ κινείται πάνω στην καμπύλη και με αυτόν τον τρόπο καλύπτονται όλα τα σημεία της.

Από φυσικής άποψης, οι εξισώσεις (5) εκφράζουν τη θέση ενός κινητού σε συνάρτηση με το χρόνο t, όταν αυτό κινείται στο χώρο και κατά μήκος της καμπύλης.

Τονίζουμε ότι (όπως και στο επίπεδο) η αναπαράσταση μιας καμπύλης στο χώρο με παραμετρικές εξισώσεις **δεν είναι μοναδική**.

Παραδείγματα:

(i) Οι

$$x = 1 + t, \quad y = 2t, \quad z = 2 + 3t, \quad t \in \mathbb{R},$$

αποτελούν παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $(1, 0, 2)$ και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $(1, 2, 3)$.

(ii) Οι

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = 1, \quad t \in [0, 2\pi],$$

αποτελούν παραμετρικές εξισώσεις του κύκλου που βρίσκεται πάνω στο επίπεδο $z = 1$ και έχει κέντρο το $O(0, 0, 1)$ και ακτίνα 1.

Σημ. ότι το επίπεδο $z = 1$ είναι παράλληλο προς το επίπεδο xOy και ότι η προβολή του παραπάνω κύκλου πάνω σε αυτό είναι ο μοναδιαίος κύκλος του επιπέδου xOy.

(iii) Οι

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = t, \quad t \in [0, +\infty),$$

αποτελούν παραμετρικές εξισώσεις *κυκλικής έλικας*.

Καθώς το t αυξάνει από το 0, η προβολή του σημείου $M(x(t), y(t), z(t))$ πάνω στο επίπεδο xOy κινείται πάνω στο μοναδιαίο κύκλο και ταυτόχρονα η απόστασή του t από το επίπεδο xOy αυξάνει σταθερά (και άρα το M απομακρύνεται από το επίπεδο xOy).

Εφαπτόμενο διάνυσμα καμπύλης.

Έστω η καμπύλη γ στο χώρο με παραμετρικές εξισώσεις

$$\gamma : x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad t \in I,$$

όπου οι συναρτήσεις $x(t),\ y(t),\ z(t)$ είναι παραγωγίσιμες στο διάστημα I με συνεχή παράγωγο. Σε αναλογία με τις καμπύλες του επιπέδου , το διάνυσμα

$$(x'(t), y'(t), z'(t)) = \left(\frac{dx}{dt}\,, \quad \frac{dy}{dt}\,, \quad \frac{dz}{dt} \right)$$

είναι **εφαπτόμενο** της καμπύλης γ στο σημείο $(x(t), y(t), z(t))$ και εκφράζει το διάνυσμα της **ταχύτητας** ενός σωματιδίου που κινείται πάνω στην γ.

Παράδειγμα: Να βρείτε το διάνυσμα της ταχύτητας και τις παραμετρικές εξισώσεις της εφαπτομένης της κυκλικής έλικας

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = t, \quad t \in [0, +\infty),$$

στο σημείο $M(-1, 0, \pi)$.

Λύση: Το σημείο $M(-1, 0, \pi)$ αντιστοιχεί στην τιμή $t = \pi$ της παραμέτρου.

Είναι $x'(t) = -\sin t,\ y'(t) = \cos t,\ z'(t) = 1$ οπότε το διάνυσμα της ταχύτητας στο σημείο M είναι το

$$(x'(\pi),\ y'(\pi),\ z'(\pi)) = (0, -1, 1).$$

Η εφαπτομένη της καμπύλης στο $M(-1, 0, \pi)$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα της ταχύτητας και άρα έχει παραμετρικές εξισώσεις

$$x = -1, \quad y = -t, \quad z = \pi + t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

III. Επιφάνειες στο χώρο — Εφαπτόμενα επίπεδα.

Μια επιφάνεια S στον τρισδιάστατο χώρο $\mathbb{R}^3$ έχει εξίσωση της μορφής

$$S : F(x, y, z) = 0. \tag{6}$$

Παραδείγματα:

(i) Το γράφημα $z = f(x, y)$ μιας συνάρτησης δύο μεταβλητών $f(x, y)$ είναι μια επιφάνεια στο χώρο. Η εξίσωση $z = f(x, y)$ γράφεται $z - f(x, y) = 0$ και άρα είναι της μορφής (6) για $F(x, y, z) = z - f(x, y)$.

Π.χ. η εξίσωση $z = x^2 + y^2$ παριστάνει στο χώρο ένα *παραβολοειδές*. Η επιφάνεια βρίσκεται πάνω από το xy επίπεδο. Οι τομές αυτής της επιφάνειας με επίπεδα παράλληλα προς το xy επίπεδο είναι παράλληλοι κύκλοι ενώ οι τομές της με επίπεδα παράλληλα προς τα xz και yz επίπεδα είναι παραβολές.

(ii) Η εξίσωση $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ είναι της μορφής (6) για $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ και παριστάνει στο χώρο *σφαίρα* με κέντρο το $O(0, 0, 0)$ και ακτίνα 1.

(iii) Η εξίσωση $x^2 + y^2 = z^2$ είναι της μορφής (6) για $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ και παριστάνει στο χώρο *κυκλικό κώνο* με κορυφή το $O(0, 0, 0)$.

Η επιφάνεια είναι μη φραγμένη και είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων και τα τρία επίπεδα xOy, xOz, yOz.

Οι τομές της με επίπεδα παράλληλα προς το xy επίπεδο είναι παράλληλοι κύκλοι.

Οι τομές της με επίπεδα που δεν περιέχουν τον άξονα των z και είναι παράλληλα προς τα xz και yz επίπεδα είναι υπερβολές.

Η τομή της επιφάνειας με ένα επίπεδο που περιέχει τον z-άξονα είναι ζεύγος ευθειών.

Εφαπτόμενο επίπεδο

Κίνητρο για να δώσουμε τον αυστηρό ορισμό και την καρτεσιανή εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου σε σημείο επιφάνειας στο χώρο αποτελεί η παρακάτω

Πρόταση: Δίνεται η επιφάνεια

$$S : F(x, y, z) = 0, \tag{7}$$

όπου η συνάρτηση $F(x, y, z)$ έχει συνεχείς μερικές παραγώγους F_x , F_y, F_z. Έστω $M_0(x_0, y_0, z_0)$ σημείο της S και γ καμπύλη που διέρχεται από το M_0 και βρίσκεται ολόκληρη πάνω στην επιφάνεια S. Τότε, η εφαπτομένη της γ στο σημείο M_0 είναι κάθετη στο διάνυσμα

$$(F_x(M_0),\ F_y(M_0),\ F_z(M_0)).$$

Απόδειξη: Η καμπύλη γ έχει κάποιες παραμετρικές εξισώσεις

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad t \in I. \tag{8}$$

Επειδή η καμπύλη (8) βρίσκεται ολόκληρη πάνω στην επιφάνεια (7), έχουμε

$$F(x(t), y(t), z(t)) = 0, \quad \forall t \in I.$$

Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της παραπάνω ως προς t και εφαρμόζοντας τον **κανόνα της αλυσίδας** παίρνουμε

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} = 0, \quad \forall t \in I$$

και ισοδύναμα

$$(F_x\ , F_y\ , F_z) \cdot (x'(t), y'(t), z'(t)) = 0, \quad \forall t \in I.$$

Η τελευταία μας δίνει ότι σε κάθε σημείο $M_0(x_0, y_0, z_0)$ της καμπύλης γ, το διάνυσμα

$$(F_x(M_0)\ , F_y(M_0)\ , F_z(M_0))$$

είναι κάθετο στο διάνυσμα της ταχύτητας στο M_0 και άρα κάθετο στην εφαπτομένη της γ στο M_0. □

Ορισμός 1 : Το διάνυσμα

$$(F_x(M_0)\ , F_y(M_0)\ , F_z(M_0))$$

που εμφανίζεται στην παραπάνω πρόταση ονομάζεται **κλίση (gradient)** της συνάρτησης $F(x, y, z)$ στο σημείο $M_0(x_0, y_0, z_0)$ και συμβολίζεται με

$$\vec{\nabla} F(M_0)\ .$$

Το διάνυσμα $\vec{\nabla} F(M_0)$ εξαρτάται **μόνο** από την επιφάνεια S και από το σημείοM_0. Σύμφωνα με την πρόταση, είναι **κάθετο στην** S **στο σημείο** M_0, δηλ. είναι κάθετο σε **όλες** τις εφαπτομένες όλων των καμπυλών που διέρχονται από το σημείο M_0 και βρίσκονται ολόκληρες πάνω στην επιφάνεια S. Έπεται ότι όλες αυτές οι εφαπτομένες είναι συνεπίπεδες. Συγκεκριμένα, περιέχονται όλες στο επίπεδο που διέρχεται από το M_0 και είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{\nabla} F(M_0)$.

Διατυπώνουμε τώρα φυσιολογικά τον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός 2: Το επίπεδο που ορίζεται από τις εφαπτομένες όλων των καμπυλών που διέρχονται από το σημείο M_0 και βρίσκονται ολόκληρες πάνω στην επιφάνεια S, ονομάζεται **εφαπτόμενο επίπεδο** της επιφάνειας S στο σημείο M_0.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, η καρτεσιανή εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου της επιφάνειας S στο σημείο $M_0(x_0, y_0, z_0)$ είναι

$$F_x(M_0)(x - x_0) + F_y(M_0)(y - y_0) + F_z(M_0)(z - z_0) = 0.$$

Χαρακτηριστικές ασκήσεις στο εφαπτόμενο επίπεδο.

1. Να βρείτε ένα κάθετο διάνυσμα καθώς και την εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου της επιφάνειας S στο σημείο M_0, όπου

$$S : \cos(\pi x) - x^2 y + e^{xz} + yz = 4, \quad M_0(0, 1, 2).$$

Λύση: Θέτουμε $F(x, y, z) = \cos(\pi x) - x^2 y + e^{xz} + yz - 4$. Τότε,

$$F_x = -\pi \sin(\pi x) - 2xy + ze^{xz}, \quad F_y = -x^2 + z, \quad F_z = xe^{xz} + y$$

και

$$F_x(M_0) = 2, \quad F_y(M_0) = 2, \quad F_z(M_0) = 1.$$

Ένα διάνυσμα κάθετο στην S στο σημείο M_0 είναι η κλίση

$$\vec{\nabla} F(M_0) = (F_x(M_0)\ , F_y(M_0)\ , F_z(M_0)) = (2, 2, 1).$$

Η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου στο $M_0(0, 1, 2)$ είναι

$$2(x - 0) + 2(y - 1) + (z - 2) = 0 \Leftrightarrow 2x + 2y + z = 4.$$

2. Δίνονται στο χώρο οι καμπύλες

$$\gamma_1 : x = \ln t, \quad y = t \ln t, \quad z = t, \quad t > 0$$

και

$$\gamma_2 : x = t - 1, \quad y = \sin(\pi t), \quad z = 1, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(i) Να δείξετε ότι οι παραπάνω καμπύλες διέρχονται από το σημείο $M_0(0, 0, 1)$.

(ii) Εάν S μια επιφάνεια που περιέχει τις γ_1 , γ_2 , να βρείτε την καρτεσιανή εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου της S στο σημείο M_0.

Λύση:

(i) Θέτοντας $t = 1$ στις παραμετρικές εξισώσεις των γ_1 , γ_2 παίρνουμε και στις δύο περιπτώσεις το σημείο $M_0(0, 0, 1)$.

(ii) Τα διανύσματα της ταχύτητας u_1 , u_2 των γ_1 , γ_2 στο κοινό τους σημείο M_0 είναι παράλληλα στο εφαπτόμενο επίπεδο της S στο M_0. Συνεπώς, το εξωτερικό τους γινόμενο θα είναι κάθετο στο εφαπτόμενο επίπεδο.

Για το u_1 έχουμε

$$x'(t) = 1/t, \quad y'(t) = \ln t + 1, \quad z'(t) = 1,$$

οπότε

$$u_1 = (x'(1), y'(1), z'(1)) = (1, 1, 1).$$

Για το u_2 έχουμε

$$x'(t) = 1, \quad y'(t) = \pi \cos(\pi t), \quad z'(t) = 0,$$

οπότε

$$u_2 = (x'(1), y'(1), z'(1)) = (1, -\pi, 0).$$

Επομένως,

$$\vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\pi & 0 \end{vmatrix} = \ldots = (\pi, 1, -\pi - 1)$$

και η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου στο $M_0(0, 0, 1)$ είναι

$$\pi(x - 0) + (y - 0) - (\pi + 1)(z - 1) = 0 \Leftrightarrow \pi x + y - (\pi + 1)z = -(\pi + 1).$$

3. Οι επιφάνειες

$$S_1 : x^2 + y^2 - z^2 = 1, \quad S_2 : x + y + z = 5$$

τέμνονται κατά μήκος μιας καμπύλης γ. Να βρείτε τις παραμετρικές εξισώσεις της εφαπτομένης της γ στο σημείο $M_0(1,2,2)$.

Λύση: Θέτουμε

$$F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 - 1, \quad G(x,y,z) = x + y + z - 5.$$

Είναι $F(1,2,2) = G(1,2,2) = 0$, οπότε το σημείο $M_0(1,2,2)$ όντως βρίσκεται πάνω στην τομή γ των S_1 , S_2.

Επειδή η καμπύλη γ βρίσκεται ολόκληρη πάνω στις επιφάνειες S_1 , S_2 , η εφαπτομένη της στο σημείο $M_0(1,2,2)$ θα είναι κάθετη στα διανύσματα

$$\vec{\nabla} F(M_0) = (F_x(M_0)\ , F_y(M_0)\ , F_z(M_0)), \quad \vec{\nabla} G(M_0) = (G_x(M_0)\ , G_y(M_0)\ , G_z(M_0))$$

και άρα παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\nabla} F(M_0) \times \vec{\nabla} G(M_0)$.

Είναι $F_x = 2x, \ \ F_y = 2y, \ \ F_z = -2z, \quad G_x = G_y = G_z = 1,$ οπότε

$$\vec{\nabla} F(M_0) = (2, 4, -4), \quad \vec{\nabla} G(M_0) = (1,1,1)$$

και συνεπώς,

$$\vec{\nabla} F(M_0) \times \vec{\nabla} G(M_0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 4 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \ldots = (8, -6, -2).$$

Οι παραμετρικές εξισώσεις της εφαπτομένης είναι

$$x = 1 + 8t, \quad y = 2 - 6t, \quad z = 2 - 2t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Άλυτες ασκήσεις.

1. Να βρείτε το διάνυσμα της ταχύτητας της καμπύλης γ τη χρονική στιγμή t_0 , όπου:

(i) $\gamma : x = e^t \cos t, \quad y = e^t \sin t, \quad t_0 = 0$

(ii) $\gamma : x = \cos(3t), \quad y = \sin(3t), \quad z = 3t, \quad t_0 = \pi/3$

(iii) $\gamma : x = e^t, \quad y = e^t \sin t, \quad z = e^t \cos t, \quad t_0 = 0$

2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της επίπεδης καμπύλης $f(x, y) = 0$ στο σημείο M_0, όπου:

(i) $f(x, y) = x^5 + 4xy^3 - 3y^5 - 2, \quad M_0(1, 1).$

(ii) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 2xy, \quad M_0(1, 1).$

3. Να βρείτε ένα κάθετο διάνυσμα καθώς και την εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου της επιφάνειας S στο σημείο M_0, όπου

(i) $S : x^2 + y^2 + z^2 = 9, \quad M_0(1, 2, 2).$

(ii) $S : z = \ln(x^2 + y^2), \quad M_0(1, 0, 0).$

(iii) $S : z = \sin x + \sin y + \sin(x + y), \quad M_0(0, 0, 0).$

4. Δύο επιφάνειες S_1, S_2 τέμνονται κατά μήκος μιας καμπύλης γ. Να βρείτε τις παραμετρικές εξισώσεις της εφαπτομένης της γ στο σημείο M_0, όπου:

(i) $S_1 : xyz = 1, \quad S_2 : x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6, \quad M_0(1, 1, 1).$

(ii) $S_1 : x^3 + 3x^2y^2 + y^3 + 4xy = z^2, \quad S_2 : x^2 + y^2 + z^2 = 11, \quad M_0(1, 1, 3).$

5. Μια επιφάνεια S περιέχει τις καμπύλες

$$\gamma_1 : \quad x = \cos t, \quad y = 2 \sin t, \quad z = t^2/2 + 1,$$

$$\gamma_2 : \quad x = e^t, \quad y = te^t, \quad z = t^3/3 + 1 \ .$$

Να βρείτε την εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου της S στο κοινό σημείο $M_0(1, 0, 1)$ των γ_1 , γ_2.

6. Μια καμπύλη γ είναι *εφαπτόμενη* σε μια επιφάνεια S στο σημείο M_0, εάν η εφαπτομένη της γ στο σημείο M_0 βρίσκεται πάνω στο εφαπτόμενο επίπεδο της S στο M_0.

Με βάση αυτό τον ορισμό να δείξετε ότι

(i) η καμπύλη

$$x = \ln t, \quad y = t\ln t, \quad z = t$$

εφάπτεται στην επιφάνεια

$$xz^2 - yz + \cos(xy) = 1$$

στο σημείο $M_0(0, 0, 1)$.

(ii) η καμπύλη

$$x = t^3/4 - 2, \quad y = 4/t - 3, \quad z = \cos(t - 2)$$

εφάπτεται στην επιφάνεια

$$x^3 + y^3 + z^3 - xyz = 0$$

στο σημείο $M_0(0, -1, 1)$.