“ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ”
ΦΥΛΛΑΔΙΟ IV
“Ακρότατα συναρτήσεων δύο μεταβλητών–Ακρότατα υπό συνθήκη και μέθοδος πολλαπλασιαστών Lagrange”

Διδάσκων: Γ. Σμυρλής

I. Κρίσιμα σημεία–Τοπικά μέγιστα και τοπικά ελάχιστα–Σαγματικά σημεία.

Ορισμός 1. Έστω $f(x,y)$ μιά συνάρτηση με συνεχείς μερικές παραγώγους στο ανοικτό σύνολο $D \subseteq \mathbb{R}^2$ και $(x_0,y_0) \in D$. Το σημείο (x_0,y_0) λέγεται **κρίσιμο σημείο** της f για το σύνολο D, εάν

$$f_x(x_0,y_0) = 0, \quad f_y(x_0,y_0) = 0.$$

Παράδειγμα: Να βρεθούν τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης $f(x,y) = (x+y)e^{-xy}$.
Λύση: Είναι

$$f_x = e^{-xy} + (x+y)e^{-xy}(-y) = e^{-xy}(1-xy-y^2), \quad f_y = \ldots e^{-xy}(1-xy-x^2).$$

Το σύστημα

$$f_x = 0, \quad f_y = 0$$

γράφεται ισοδύναμα

$$1 - xy = y^2, \quad 1 - xy = x^2,$$

απ' όπου παίρνουμε $y^2 = x^2 \Rightarrow y = \pm x$.

Έτσι για $y = x$ έχουμε $1 - x^2 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 1/\sqrt{2}$ και προκύπτουν τα κρίσιμα σημεία

$$(1/\sqrt{2}\,, 1/\sqrt{2}), \quad (-1/\sqrt{2}\,, -1/\sqrt{2}).$$

Για $y = -x$ προκύπτει η εξίσωση $1 + x^2 - x^2 = 0$ που είναι αδύνατη.

Ορισμός 2. Έστω $f(x,y)$ μιά συνάρτηση ορισμένη στο ανοικτό σύνολο $D \subseteq \mathbb{R}^2$ και $(x_0,y_0) \in D$. Θα λέμε ότι η f παρουσιάζει στο σημείο (x_0,y_0) **τοπικό μέγιστο** (αντ.**τοπικό ελάχιστο**) στο σύνολο D, εάν υπάρχει ένας ανοικτός κυκλικός δίσκος $B((x_0,y_0),\delta)$ κέντρου (x_0,y_0) και ακτίνας $\delta > 0$ που βρίσκεται εξ' ολοκλήρου μέσα στο D και τέτοιος ώστε:

για κάθε $(x,y) \in B((x_0,y_0),\delta)$, να ισχύει $f(x,y) \leq f(x_0,y_0)$ (αντ. $f(x,y) \geq f(x_0,y_0)$).

Ένα σημείο τοπικού μεγίστου ή τοπικού ελαχίστου λέγεται **τοπικό ακρότατο** της f στο σύνολο D.

Παρατήρηση 1: Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, για να έχει η f τοπικό ακρότατο στο (x_0, y_0), θα πρέπει η διαφορά $f(x,y) - f(x_0, y_0)$ να διατηρεί πρόσημο πάνω σε κάποιον ανοικτό κυκλικό δίσκο με κέντρο το (x_0, y_0).

Πρόταση 1. Έστω $f(x,y)$ μιά συνάρτηση με συνεχείς μερικές παραγώγους στο ανοικτό σύνολο $D \subseteq \mathbb{R}^2$ και $(x_0, y_0) \in D$. Εάν η f παρουσιάζει στο (x_0, y_0) τοπικό ακρότατο, τότε το (x_0, y_0) είναι κρίσιμο σημείο της f.

Παρατήρηση 2: Η πρόταση 1 μας λέει ότι τα τοπικά ακρότατα μιας συνάρτησης $f(x,y)$ σε ένα ανοικτό σύνολο D τα αναζητούμε ανάμεσα στα κρίσιμα σημεία της f. Δηλ. τα κρίσιμα σημεία της f είναι ''υποψήφια'' τοπικά ακρότατα. Υπάρχει περίπτωση όμως κάποιο κρίσιμο σημείο να μην είναι τοπικό ακρότατο.

Παράδειγμα 3. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x,y) = x^2 - y^2$. Εύκολα βρίσκουμε ότι η f έχει ένα και μοναδικό κρίσιμο σημείο, το $(0,0)$.

Ας εξετάσουμε το πρόσημο της διαφοράς $f(x,y) - f(0,0) = x^2 - y^2$ πάνω σε ανοικτούς δίσκους με κέντρο το $(0,0)$.

Ένας τυχαίος ανοικτός δίσκος B με κέντρο το $(0,0)$ περιέχει σημεία και των δύο αξόνων (εκτός του $(0,0)$), δηλ. σημεία της μορφής $(x,0),\ x \neq 0$ αλλά και σημεία της μορφής $(0,y),\ y \neq 0$. Για $x \neq 0,\ y \neq 0$ έχουμε

$$f(x,0) - f(0,0) = x^2 > 0, \quad f(0,y) - f(0,0) = -y^2 < 0$$

και άρα η διαφορά $f(x,y) - f(0,0)$ δεν διατηρεί πρόσημο πάνω στον B.

Έπεται ότι το κρίσιμο σημείο $(0,0)$ δεν είναι σημείο τοπικού ακροτάτου για την f.

Ορισμός 3. Ένα κρίσιμο σημείο της f που δεν είναι τοπικό ακρότατο λέγεται **σαγματικό σημείο** ή **σημείο σέλλας** της f.

Στο παράδειγμα 3, το σημείο $(0,0)$ είναι σαγματικό σημείο για τη συνάρτηση f.

Για να χαρακτηρίσουμε τα κρίσιμα σημεία μιας συνάρτησης f (δηλ. να βρούμε ποιά από αυτά είναι τοπικά ακρότατα και ποιά σαγματικά σημεία) διαθέτουμε το παρακάτω κριτήριο που είναι γνωστό σαν **κριτήριο της δεύτερης παραγώγου**:

Θεώρημα 1: Έστω $f(x,y)$ μιά συνάρτηση με συνεχείς μερικές παραγώγους μέχρι και δεύτερης τάξης στο ανοικτό σύνολο $D \subseteq \mathbb{R}^2$ και $(x_0, y_0) \in D$ ένα κρίσιμο σημείο της f. Θεωρούμε τη *διακρίνουσα*

$$\Delta(x,y) = f_{xx} \cdot f_{yy} \ - \ f_{xy}^2.$$

(i) Εάν $\Delta(x_0, y_0) > 0$ και $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$, τότε η f παρουσιάζει στο (x_0, y_0) τοπικό ελάχιστο.

(ii) Εάν $\Delta(x_0, y_0) > 0$ και $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$, τότε η f παρουσιάζει στο (x_0, y_0) τοπικό μέγιστο.

(iii) Εάν $\Delta(x_0, y_0) < 0$, τότε το (x_0, y_0) είναι σαγματικό σημείο της f.

(iv) Εάν $\Delta(x_0, y_0) = 0$, το κριτήριο δεν αποφαίνεται. Σε αυτή την περίπτωση εξετάζουμε το πρόσημο της διαφοράς $f(x, y) - f(x_0, y_0)$ πάνω σε ανοικτούς δίσκους με κέντρο το (x_0, y_0).

Λυμένα παραδείγματα:

1. *Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα και τα σαγματικά σημεία της συνάρτησης* $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 3x^2 - 3y^2 + 4$.

Λύση: Προσδιορίζουμε πρώτα τα κρίσιμα σημεία της f λύνοντας το σύστημα

$$\left.\begin{array}{l} f_x = 0 \\ \\ f_y = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x^2 + 3y^2 - 6x = 0 \\ \\ 6xy - 6y = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2 + y^2 - 2x = 0 \\ \\ y(x-1) = 0 \end{array}\right.$$

Η δεύτερη εξίσωση δίνει $y = 0$ ή $x = 1$.

–Για $y = 0$, η πρώτη εξίσωση δίνει $x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 2$. Έτσι λαμβάνουμε τα κρίσιμα σημεία $(0, 0)$, $(2, 0)$.

–Για $x = 1$, η πρώτη εξίσωση δίνει $y^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow y = 1$ ή $y = -1$. Έτσι λαμβάνουμε τα κρίσιμα σημεία $(1, 1)$, $(1, -1)$.

Στη συνέχεια θεωρούμε τη διακρίνουσα

$$\Delta(x, y) = f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 = (6x - 6)(6x - 6) - 36y^2 = 36[(x-1)^2 - y^2].$$

- $\Delta(0, 0) = 36 > 0$, $f_{xx}(0, 0) = -6 < 0$, οπότε η f παρουσιάζει στο $(0, 0)$ τοπικό μέγιστο.
- $\Delta(2, 0) = 36 > 0$, $f_{xx}(2, 0) = 6 > 0$, οπότε η f παρουσιάζει στο $(2, 0)$ τοπικό ελάχιστο.
- $\Delta(1, \pm 1) = -36 < 0$, οπότε τα $(1, 1)$, $(1, -1)$ είναι σαγματικά σημεία.

2. *Ίδιο ερώτημα με την άσκ. 1 για τη συνάρτηση* $f(x, y) = x^4 + y^3 - 6x^2y$.

Λύση. Προσδιορίζουμε πρώτα τα κρίσιμα σημεία της f λύνοντας το σύστημα

$$\left.\begin{array}{l} f_x = 0 \\ \\ f_y = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 4x^3 - 12xy = 0 \\ \\ 3y^2 - 6x^2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x(x^2 - 3y) = 0 \\ \\ y^2 - 2x^2 = 0 \end{array}\right.$$

Η πρώτη εξίσωση δίνει $x = 0$ ή $x^2 = 3y$.
–Για $x = 0$, η δεύτερη εξίσωση δίνει $y = 0$ κι έτσι λαμβάνουμε το κρίσιμο σημείο $(0, 0)$.
–Για $x^2 = 3y \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3y}$ η δεύτερη εξίσωση δίνει $y^2 - 6y = 0 \Leftrightarrow y = 0$ ή $y = 6$.
Έτσι, λαμβάνουμε τα κρίσιμα σημεία $(0, 0)$ (το έχουμε βρει ήδη) και $(3\sqrt{2}, 6)$, $(-3\sqrt{2}, 6)$.
Συνεπώς, τα κρίσιμα σημεία είναι

$$O(0,0), \quad P(3\sqrt{2}, 6), \quad Q(-3\sqrt{2}, 6).$$

Στη συνέχεια θεωρούμε τη διακρίνουσα

$$\Delta(x, y) = f_{xx} \cdot f_{yy} \; - \; f_{xy}^2 = (12x^2 - 12y)6y - 144x^2 = 72(x^2y - y^2 - 2x^2).$$

Για $x^2 = 3y$ (η εξίσωση αυτή ικανοποιείται από τα σημεία P, Q) έχουμε

$$\Delta = 72(3y^2 - y^2 - 6y) = 144(y^2 - 3y), \quad f_{xx} = 24y,$$

οπότε

$$\Delta(\pm 3\sqrt{2}, 6) = 144 \cdot 18 > 0, \quad f_{xx}(\pm 3\sqrt{2}, 6) = 24 \cdot 6 > 0$$

και άρα η f παρουσιάζει στα σημεία $P(3\sqrt{2}, 6)$, $\quad Q(-3\sqrt{2}, 6)$ τοπικό ελάχιστο.

Όσον αφορά το κρίσιμο σημείο O παρατηρούμε ότι $\Delta(0, 0) = 0$ και συνεπώς το κριτήριο της δεύτερης παραγώγου δεν αποφαίνεται. Θα πρέπει λοιπόν να μελετήσουμε το πρόσημο της διαφοράς $f(x, y) - f(0, 0) = x^4 + y^3 - 6x^2y$ πάνω σε ανοικτούς δίσκους με κέντρο το $(0, 0)$.

Ένας τυχαίος ανοικτός δίσκος B με κέντρο το $(0, 0)$ περιέχει σημεία της μορφής $(x, 0)$, $x \neq 0$ αλλά και σημεία της μορφής $(0, y)$, $y < 0$. Για $x \neq 0$, $y < 0$ έχουμε

$$f(x, 0) - f(0, 0) = x^4 > 0, \quad f(0, y) - f(0, 0) = y^3 < 0$$

και άρα η διαφορά $f(x, y) - f(0, 0)$ δεν διατηρεί πρόσημο πάνω στον B.

Έπεται ότι το κρίσιμο σημείο $(0, 0)$ είναι σαγματικό σημείο.

3. *Ίδιο ερώτημα με την άσκ. 1 για τη συνάρτηση* $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$.
Λύση. Προσδιορίζουμε πρώτα τα κρίσιμα σημεία της f λύνοντας το σύστημα

$$\left.\begin{matrix} f_x = 0 \\ \\ f_y = 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} 4x^3 - 4x + 4y = 0 \\ \\ 4y^3 + 4x - 4y = 0 \end{matrix}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x^3 - x + y = 0 \\ \\ y^3 + x - y = 0 \end{matrix}\right.$$

Με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε $x^3+y^3=0 \Rightarrow y^3=-x^3 \Rightarrow y=-x$. Η πρώτη από τις αρχικές εξισώσεις τώρα γίνεται $x^3-2x=0 \Leftrightarrow x(x^2-2)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=\pm\sqrt{2}$. Έτσι, προκύπτουν τα κρίσιμα σημεία

$$O(0,0), \quad P(\sqrt{2},-\sqrt{2}), \quad Q(-\sqrt{2},\sqrt{2}).$$

Στη συνέχεια θεωρούμε τη διακρίνουσα

$$\Delta(x,y)=f_{xx}\cdot f_{yy} \;-\; f_{xy}^2=(12x^2-4)(12y^2-4)-16=16[(3x^2-1)(3y^2-1)-1].$$

Είναι

$$\Delta(\pm\sqrt{2},\mp\sqrt{2})=16\cdot 24>0, \quad f_{xx}(\pm\sqrt{2},\mp\sqrt{2})=20>0$$

και άρα η f παρουσιάζει στα σημεία P, Q τοπικό ελάχιστο.

Όσον αφορά το κρίσιμο σημείο O παρατηρούμε ότι $\Delta(0,0)=0$ και συνεπώς το κριτήριο της δεύτερης παραγώγου δεν αποφαίνεται. Θα πρέπει λοιπόν να μελετήσουμε το πρόσημο της διαφοράς $f(x,y)-f(0,0)=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$ πάνω σε ανοικτούς δίσκους με κέντρο το $(0,0)$.

Έστω B τυχαίος ανοικτός δίσκος με κέντρο το $(0,0)$.

Ο B περιέχει σημεία της μορφής $(x,0)$, $x\neq 0$ με το x να είναι αυθαίρετα ‘‘κοντά’’ στο 0. Για $x\neq 0$ έχουμε

$$f(x,0)-f(0,0)=x^4-2x^2=x^2(x^2-2)$$

και εάν το x επιλεγεί ώστε $0<x<\sqrt{2}$, παίρνουμε

$$f(x,0)-f(0,0)<0.$$

Επιπλέον, ο B περιέχει σημεία της ευθείας $y=x$ διαφορετικά της αρχής, δηλ. περιέχει σημεία της μορφής (x,x), $x\neq 0$. Για $x\neq 0$ έχουμε

$$f(x,x)-f(0,0)=2x^4>0.$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι η διαφορά $f(x,y)-f(0,0)$ δεν διατηρεί πρόσημο πάνω στον τυχαίο δίσκο B κέντρου $(0,0)$. Έπεται ότι το κρίσιμο σημείο $(0,0)$ είναι σαγματικό σημείο.

4. *Να βρεθεί η ελάχιστη απόσταση της κωνικής επιφάνειας $z^2=(x-1)^2+(y-1)^2$ από την αρχή των αξόνων $O(0,0,0)$.*

Λύση: Η απόσταση ενός τυχαίου σημείου (x,y,z) της δοσμένης επιφάνειας από την αρχή των αξόνων ισούται με

$$d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{x^2+y^2+(x-1)^2+(y-1)^2}.$$

Θα πρέπει λοιπόν να ελαχιστοποιήσουμε την παραπάνω απόσταση. Για να αποφύγουμε το ριζικό, παρατηρούμε ότι αρκεί να ελαχιστοποιήσουμε το τετράγωνο της απόστασης d , δηλ. τη συνάρτηση

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2.$$

Προσδιορίζουμε πρώτα τα κρίσιμα σημεία της f λύνοντας το σύστημα

$$\left.\begin{array}{l} f_x = 0 \\ \\ f_y = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x + 2(x-1) = 0 \\ \\ 2y + 2(y-1) = 0 \end{array}\right.$$

απ' όπου προκύπτει ένα και μοναδικό κρίσιμο σημείο $(1/2,\ 1/2)$.

Η διακρίνουσα Δ ισούται με $f_{xx} \cdot f_{yy} \ - \ f_{xy}^2 = 4 \cdot 4 - 0^2 = 16 > 0$, ενώ $f_{xx} = 4 > 0$. Έπεται ότι η f παρουσιάζει στο $(1/2,\ 1/2)$ τοπικό ελάχιστο ίσο με $f(1/2, 1/2) = \ldots 1$. Επειδή η f παριστάνει τετράγωνο απόστασης, το σημείο αυτό θα είναι και ολικό ελάχιστο.

Συνεπώς, η ελάχιστη απόσταση των σημείων της επιφάνειας από την αρχή των αξόνων ισούται με $\sqrt{1} = 1$ και λαμβάνεται στα σημεία $(1/2, 1/2, z_0)$ της επιφάνειας, όπου $z_0^2 = (1/2-1)^2 + (1/2-1)^2 = 1/2 \Rightarrow z_0 = \pm 1/\sqrt{2}$. Δηλ. η ελάχιστη απόσταση λαμβάνεται στα σημεία

$$(1/2, 1/2, 1/\sqrt{2}), \quad (1/2, 1/2, -1/\sqrt{2})$$

της επιφάνειας.

Προτεινόμενες ασκήσεις για λύση.

1. Για τη συνάρτηση $f(x,y)$ να προσδιορίσετε τα τοπικά ακρότατα και τα σαγματικά σημεία, όπου

(i) $f(x,y) = 2x^2 + 2xy + y^2 + 6x + 6y + 3$.
(ii) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$
(iii) $f(x,y) = x^3 + y^2 - 3x$
(iv) $f(x,y) = x^4 - y^4$
(v) $f(x,y) = 4x^2y + x^4 + y^3 + 4y^2$
(vi) $f(x,y) = y^2 - y^4 - x^4$

2. Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση της αρχής $O(0,0,0)$ από την επιφάνεια $z^2 = xy + 4$.

3. Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση της αρχής $O(0,0,0)$ από το επίπεδο $2x + 3y - z = 1$.

4. Από όλα τα ορθογώνια παραλληλεπίπεδα με σταθερό άθροισμα διαστάσεων (δηλ. μήκους, πλάτους και ύψους) ίσο με k, να βρεθεί αυτό που έχει το μέγιστο όγκο.

5. Η θερμοκρασία T στα σημεία ενός χώρου είναι $T(x,y,z) = 400xyz^2$. Βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη θερμοκρασία πάνω στη σφαίρα $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

ΙΙ. Ακρότατα υπό συνθήκη –Πολλαπλασιαστές Lagrange.

Τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x,y)$ που μελετήσαμε στην παράγραφο Ι είναι ''ελεύθερα'' με την έννοια ότι οι μεταβλητές x, y ήταν ανεξάρτητες. Συχνά όμως παρουσιάζονται προβλήματα εύρεσης των ακροτάτων της $f(x,y)$ όταν οι μεταβλητές σχετίζονται μεταξύ τους μέσω μιας συνθήκης

$$g(x,y) = 0. \tag{1}$$

Η παραπάνω εξίσωση παριστάνει μια καμπύλη στο επίπεδο. Η εύρεση των ακροτάτων της f υπό τη συνθήκη (1) ισοδυναμεί με την εύρεση των ακροτάτων του περιορισμού της f πάνω στην καμπύλη (1). Πρέπει να σημειώσουμε ότι στην περίπτωση αυτή **δεν** μπορούμε να εφαρμόσουμε τη μέθοδο που περιγράφεται στο θεώρημα 1 της παραγράφου Ι. Το θεώρημα 1 εφαρμόζεται μόνο στην περίπτωση που οι μεταβλητές x, y είναι **ανεξάρτητες μεταξύ τους**.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η (1) μπορεί να λυθεί ως προς τη μία μεταβλητή, π.χ. την $y = \varphi(x)$. Τότε, ο περιορισμός της f πάνω στην καμπύλη (1) είναι η συνάρτηση $f(x, \varphi(x))$ που είναι μιας μεταβλητής. Θεωρητικά λοιπόν θα μπορούσαμε βρούμε τα ακρότατα της $f(x, \varphi(x))$ με χρήση του κλασικού λογισμού για συναρτήσεις μιας μεταβλητής (μονοτονία ή κριτήριο δεύτερης παραγώγου). Αυτός ο τρόπος όμως παρουσιάζει στην πράξη δύο μειονεκτήματα.

α. Πολλές φορές είναι δύσκολο να λυθεί η (1) ως προς μία από τις δύο μεταβλητές.

β. Ακόμα και στην περίπτωση που καταφέρουμε να λύσουμε την (1) π.χ. ως προς $y = \varphi(x)$, η συνάρτηση $f(x, \varphi(x))$ που προκύπτει συχνά είναι περίπλοκη και καθιστά επίπονη τη διαδικασία εύρεσης ακροτάτων με χρήση του κλασικού λογισμού για συναρτήσεις μιας μεταβλητής.

Μια εναλλακτική μέθοδος για την εύρεση των κρίσιμων σημείων της $f(x,y)$ υπό τη συνθήκη (1) είναι η μέθοδος των *πολλαπλασιαστών Lagrange* που περιγράφεται στο παρακάτω

Θεώρημα 2: Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις $f(x,y)$, $g(x,y)$ έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους στο ανοικτό σύνολο D. Τότε, τα κρίσιμα σημεία της $f(x,y)$ υπό τη συνθήκη $g(x,y) = 0$ προκύπτουν από την επίλυση του συστήματος

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \lambda \vec{\nabla} g(x,y), \quad g(x,y) = 0, \quad (x,y) \in D.$$

Η μεταβλητή λ λέγεται **πολλαπλασιαστής Lagrange**.

Λυμένα παραδείγματα.

1. *Να βρεθεί η μέγιστη τιμή της συνάρτησης* $f(x,y)=xy$, *υπό τη συνθήκη*

$$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1.$$

Λύση: Έχουμε

$$\vec{\nabla} f(x,y)=(f_x\ ,f_y)=(y,x).$$

Επιπλέον θέτουμε

$$g(x,y)=\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}-1$$

και έχουμε

$$\vec{\nabla} g(x,y)=(g_x\ ,g_y)=(x/4\ ,y).$$

Επιλύουμε το σύστημα

$$\left.\begin{array}{l} \vec{\nabla} f(x,y)=\lambda\vec{\nabla} g(x,y) \\ \\ g(x,y)=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (y,x)=\lambda(x/4\ ,y) \\ \\ \dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda x=4y \\ \\ \lambda y=x \\ \\ \dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1 \end{array}\right.$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της πρώτης με y και της δεύτερης με x παίρνουμε

$$\lambda xy=4y^2,\quad \lambda yx=x^2$$

και συνεπώς

$$x^2=4y^2\Leftrightarrow x=\pm 2y.$$

Η $g(x,y)=0$ τώρα δίνει $\dfrac{4y^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1\Leftrightarrow y^2=1\Leftrightarrow y=\pm 1.$

Από τα παραπάνω προκύπτουν τέσσερα κρίσιμα σημεία:

$$(2,1),\quad (-2,1),\quad (2,-1),\quad (-2,-1).$$

Είναι $f(2,1)=f(-2,-1)=2,\quad f(2,-1)=f(-2,1)=-2$, οπότε η μέγιστη τιμή της $f(x,y)=xy$ υπό τη συνθήκη $g(x,y)=0$ είναι ίση με 2 και λαμβάνεται στα σημεία $(2,1)$, $(-2,-1)$.

2. *Να βρεθούν η ελάχιστη και η μέγιστη απόσταση της καμπύλης* $5x^2+6xy+5y^2=8$ *από την αρχή* $O(0,0)$.

Λύση: Το τετράγωνο της απόστασης ενός σημείου (x, y) από την αρχή ισούται με $x^2 + y^2$. Έχουμε λοιπόν να βρούμε το μέγιστο και το ελάχιστο της συνάρτησης

$$f(x, y = x^2 + y^2$$

υπό τη συνθήκη

$$g(x, y) = 5x^2 + 6xy + 5y^2 - 8 = 0.$$

Έχουμε

$$\vec{\nabla} f(x, y) = (f_x\ , f_y) = (2x, 2y)$$

και

$$\vec{\nabla} g(x, y) = (g_x\ , g_y) = (10x + 6y\ , 6x + 10y).$$

Επιλύουμε το σύστημα

$$\left.\begin{array}{l} \vec{\nabla} f(x, y) = \lambda \vec{\nabla} g(x, y) \\ \\ g(x, y) = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (2x, 2y) = \lambda(10x + 6y\ , 6x + 10y) \\ \\ 5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \lambda(5x + 3y) \\ \\ y = \lambda(3x + 5y) \\ \\ 5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8 \end{array}\right.$$

Από τις παραπάνω εξισώσεις προκύπτει εύκολα ότι $\lambda \neq 0$. (Αν ήταν $\lambda = 0$, από τις δύο πρώτες θα παίρναμε $x = y = 0$, γεγονός που αντιφάσκει με την τρίτη εξίσωση).

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της πρώτης με y και της δεύτερης με x παίρνουμε

$$xy = \lambda(5xy + 3y^2), \quad yx = \lambda(3x^2 + 5yx)$$

και αφαιρώντας κατά μέλη

$$3\lambda(y^2 - x^2) = 0 \Leftrightarrow y = \pm x.$$

–Για $y = x$, η $g(x, y) = 0$ δίνει $5x^2 + 6x^2 + 5x^2 = 8 \Leftrightarrow x^2 = 1/2 \Leftrightarrow x = \pm 1/\sqrt{2}$ και παίρνουμε τα κρίσιμα σημεία

$$(1/\sqrt{2}\ , 1/\sqrt{2}),\ (-1/\sqrt{2}\ , -1/\sqrt{2}).$$

–Για $y = -x$, η $g(x, y) = 0$ δίνει $5x^2 - 6x^2 + 5x^2 = 8 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$ και παίρνουμε τα κρίσιμα σημεία

$$(\sqrt{2}\ , -\sqrt{2}),\ (-\sqrt{2}\ , \sqrt{2}).$$

Είναι

$$f(1/\sqrt{2}\ , 1/\sqrt{2}) = f(-1/\sqrt{2}\ , -1/\sqrt{2}) = 1, \quad f(\sqrt{2}\ , -\sqrt{2}) = f(\sqrt{2}\ , -\sqrt{2}) = 4,$$

οπότε η ελάχιστη (αντ. η μέγιστη) απόσταση της καμπύλης από την αρχή ισούται με 1 (αντ. 2) και λαμβάνεται στη σημεία $(1/\sqrt{2}\,, 1/\sqrt{2})$, $(-1/\sqrt{2}\,, -1/\sqrt{2})$ (αντ. στα σημεία $(\sqrt{2}\,, -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}\,, \sqrt{2})$).

3. *Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση μεταξύ της ευθείας $x + y = 4$ και της έλλειψης $x^2 + 4y^2 = 4$. Δίνεται ότι η έλλειψη βρίσκεται ολόκληση "αριστερά" της ευθείας.*

Λύση. Η απόσταση ενός σημείου (x, y) της έλλειψης από την ευθεία είναι

$$d(x, y) = \frac{|x + y - 4|}{\sqrt{2}}.$$

Επειδή όμως το (x, y) βρίσκεται "αριστερά" της ευθείας $x + y = 4$, ισχύει $x + y - 4 < 0$, οπότε

$$d(x, y) = \frac{4 - x - y}{\sqrt{2}}\ .$$

Πρέπει λοιπόν να ελαχιστοποιήσουμε τη συνάρτηση $d(x, y)$ υπό τη συνθήκη $g(x, y) = x^2 + 4y^2 - 4 = 0$.

Έχουμε

$$\vec{\nabla} d(x, y) = (d_x\ , d_y) = (-1/\sqrt{2},\ -1/\sqrt{2})$$

και

$$\vec{\nabla} g(x, y) = (g_x\ , g_y) = (2x\ , 8y).$$

Επιλύουμε το σύστημα

$$\left.\begin{array}{l} \vec{\nabla} d(x, y) = \lambda \vec{\nabla} g(x, y) \\ \\ g(x, y) = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (-1/\sqrt{2},\ -1/\sqrt{2}) = \lambda(2x\ , 8y) \\ \\ x^2 + 4y^2 = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2\lambda x = -1/\sqrt{2} \\ \\ 8\lambda y = -1/\sqrt{2} \\ \\ x^2 + 4y^2 = 4 \end{array}\right.$$

Απαλοίφοντας το λ από τις δύο πρώτες εξισώσεις παίρνουμε

$$x = 4y$$

οπότε η τρίτη εξίσωση δίνει

$$16y^2 + 4y^2 = 4 \Leftrightarrow y^2 = 1/5 \Leftrightarrow y = \pm 1/\sqrt{5}.$$

Έτσι, προκύπτουν τα κρίσιμα σημεία

$$(4/\sqrt{5}\,, 1/\sqrt{5}), \quad (-4/\sqrt{5}\,, -1/\sqrt{5}).$$

Αντικαθιστώντας στην $d(x,y)$ βρίσκουμε εύκολα ότι η ελάχιστη απόσταση λαμβάνεται στο πρώτο σημείο και ισούται με
$$\frac{4\sqrt{5}-5}{\sqrt{10}}.$$

Προτεινόμενες ασκήσεις για λύση.

1. Να βρείτε το μέγιστο και το ελάχιστο της συνάρτησης $f(x,y)$ υπό τη συνθήκη $g(x,y)=0$, όπου
(i) $f(x,y)=x+y, \quad g(x,y)=x^2+y^2-1.$
(ii) $f(x,y)=x^2+y^2, \quad g(x,y)=x+y-1.$
(iii) $f(x,y)=x^3-3xy^2+18y, \quad g(x,y)=3x^2-y^3-6x.$
(iv) $f(x,y)=xy, \quad g(x,y)=x^2+2y^2-1.$

2. Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη απόσταση της καμπύλης $g(x,y)=0$ από την αρχή $O(0,0)$, όπου
(i) $g(x,y)=x^2-2x+y^2-4y$
(ii) $g(x,y)=x^2+xy+y^2-1$
(iii) $g(x,y)=x^4+y^4+3xy-2$

3. Η θερμοκρασία σε ένα σημείο (x,y) μιας επίπεδης μεταλλικής πλάκας είναι $T(x,y)=4x^2-4xy+y^2$. Ένα μυρμήγκι κινείται πάνω στη μεταλλική πλάκα σε κυκλική τροχιά κέντρου $O(0,0)$ και ακτίνας 1. Ποιά είναι η χαμηλότερη και ποιά η υψηλότερη θερμοκρασία που αντιλαμβάνεται το μυρμήγκι;

4. Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση μεταξύ της ευθείας $y=x+1$ και της παραβολής $y^2=x$.