

“ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ”
ΦΥΛΛΑΔΙΟ VI
“Διπλά ολοκληρώματα ”

Διδάσκων: Γ. Σμυρλής

Προτεινόμενες ασκήσεις για λύση.

1. Να υπολογισθεί το διπλό ολοκλήρωμα $\int \int_D f(x, y) dx dy$, όπου:

(i) $f(x, y) = \cos y$ και D το τρίγωνο με κορυφές $O(0, 0)$, $A(-\pi/2, \pi/2)$, $B(\pi/2, \pi/2)$.

(ii) $f(x, y) = x - y$ και D το τρίγωνο με κορυφές $O(0, 0)$, $A(1, 0)$, $B(2, 1)$.

(iii) $f(x, y) = x + y$ και D το τραπέζιο που περικλείεται από τις ευθείες

$$y = x, \quad y = -x, \quad x = 1, \quad x = 2.$$

(iv) $f(x, y) = y$ και D το χωρίο που περικλείεται από την παραβολή $y = x^2$ και τις ευθείες $y = -x$, $y = 3$.

(v) $f(x, y) = xy$ και D το παραλληλόγραμμο με εξισώσεις πλευρών

$$y = x, \quad x - y = 2, \quad y = -x, \quad x + y = 2.$$

(vi) $f(x, y) = xy$ και D το χωρίο που περικλείεται από την υπερβολή $xy = 2$, την παραβολή $4y = x^2$ και την ευθεία $y = 4$.

(vii) $f(x, y) = x$ και D το χωρίο που βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο και περικλείεται από τις ευθείες $y = 0$, $y = x$ και το ημικύκλιο $y = \sqrt{1 - x^2}$.

(viii) $f(x, y) = x$ και D το χωρίο που βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο και περικλείεται από τις ευθείες $y = 0$, $y = x$, $y = 1$ και το ημικύκλιο $y = \sqrt{4 - x^2}$.

2. Να υπολογίσετε με διπλή ολοκλήρωση το εμβαδό του επίπεδου χωρίου D που περικλείεται από:

(i) τις παραβολές $y = x^2$, $x = y^2$.

(ii) την παραβολή $x = y^2$ και τις ευθείες $y = 1$, $x = 0$.

(iii) την παραβολή $y = x^2$ και την ευθεία $y = x + 2$.

(iv) τις παραβολές

$$y = x^2, \quad y = -x^2$$

και τις κατακόρυφες ευθείες $x = 1$, $x = -1$.