ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΕΠΙΚΑΜΠΥΛΙΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

1. Να υπολογίσετε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_\gamma \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r},$$

όπου:

(i) $\overrightarrow{F}(x,y) = (xy,\ 3x), \quad \gamma : x = t^2, \quad y = t, \quad t \in [0,\ 2]$

(ii)

$$\overrightarrow{F}(x,y) = \left(\frac{y}{x^2+y^2}\ ,\ \frac{x}{x^2+y^2}\right), \quad \gamma : x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad t \in [0,\ \pi/4]$$

[Θα χρειαστείτε την ταυτότητα $\cos^2 t - \sin^2 t = \cos(2t)$].

2. Έστω γ το σύνορο του ορθογωνίου παραλληλογράμμου με κορυφές τα σημεία Α$(-1,1)$, Β$(2,1)$, Γ$(2,3)$, Δ$(-1,3)$. Εάν η γ διαγράφεται αριστερόστροφα, δηλ. $A \to B \to \Gamma \to \Delta$, να υπολογίσετε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της $\overrightarrow{F}(x,y) = (x^2y,\ 3y+x)$ πάνω στη γ.

3. Δίνεται η διανυσματική συνάρτηση

$$\overrightarrow{F} = (P,\ Q), \quad P = y^3 + 2xy^2 + 3x^2y\ , \quad Q = x^3 + 3xy^2 + 2x^2y\ .$$

(i) Να δείξετε ότι $Q_x(x,y) = P_y(x,y)$, για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(ii) Να προσδιορίσετε μια βαθμωτή συνάρτηση $\varphi(x,y)$ τέτοια ώστε $\overrightarrow{F}(x,y) = \nabla\varphi(x,y)$, για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(iii) Να υπολογίσετε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της $\overrightarrow{F}$ κατά μήκος μιας τυχαίας καμπύλης που ξεκινά από το Α$(1,0)$ και καταλήγει στο Β$(1,1)$.

4. Δίνεται η διανυσματική συνάρτηση

$$\overrightarrow{F} = (P,\ Q), \quad P = \frac{x}{x^2+y^2}\ , \quad Q = \frac{y}{x^2+y^2}\ .$$

(i) Να δείξετε ότι $Q_x(x, y) = P_y(x, y)$, για κάθε $(x, y) \neq (0, 0)$.

(ii) Να προσδιορίσετε μια βαθμωτή συνάρτηση $\varphi(x, y)$ τέτοια ώστε $\overrightarrow{F}(x, y) = \nabla\varphi(x, y)$, για κάθε $(x, y) \neq (0, 0)$.

(iii) Να υπολογίσετε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της $\overrightarrow{F}$ κατά μήκος μιας τυχαίας καμπύλης που ξεκινά από το A$(1, 0)$ και καταλήγει στο B$(2, 3)$.

5. Δίνεται η διανυσματική συνάρτηση $\overrightarrow{F}(x, y) = (x, xy)$.

   (i) Να δείξετε ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της $\overrightarrow{F}$ κατά μήκος τυχαίου κύκλου με κέντρο το O$(0, 0)$ ισούται με 0. Ισχύει το ίδιο για μια τυχαία κλειστή καμπύλη; (Δοκιμάστε το σύνορο $O \to A \to B \to O$ του τριγώνου με κορυφές O$(0, 0)$, $A(1, 0)$ και B$(0, 1)$.)

   (iii) Να εξετάσετε αν υπάρχει ανοικτό σύνολο D και βαθμωτή συνάρτηση $\varphi(x, y)$ τέτοια ώστε $\overrightarrow{F}(x, y) = \nabla\varphi(x, y)$, για κάθε $(x, y) \in D$.