Μάθημα 9

ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΣΥΝΗΘΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ - ΜΕΡΟΣ I

Είναι ήδη γνωστό στον αναγνώστη ότι η επίλυση των περισσότερων προβλημάτων των θετικών επιστημών οδηγεί στη λύση μιας διαφορικής εξίσωσης ή ενός συστήματος διαφορικών εξισώσεων. Η λύση αυτή είναι δυνατόν να υπολογιστεί θεωρητικά μόνον σε ορισμένες περιπτώσεις, ενώ στα περισσότερα των προβλημάτων η λύση γίνεται μόνον προσεγγιστικά, δηλαδή με αριθμητικές μεθόδους, οι οποίες πολλές φορές εξακολουθούν να χρησιμοποιούνται και όταν ακόμα είναι γνωστή η θεωρητική λύση.[1]

Οι διαφορικές εξισώσεις είναι δυνατόν να χωριστούν στις παρακάτω δύο βασικές κατηγορίες:

- τις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις ή **ODE's** (ordinary differential equations), όταν η άγνωστη συνάρτηση εξαρτάται από μία μεταβλητή, και

- τις διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους ή **PDE's**, όταν εξαρτάται από περισσότερες της μιας μεταβλητές.

[1] Ο αναγνώστης για μια εκτενέστερη μελέτη παραπέμπεται στη βιβλιογραφία και στο βιβλίο Α. Μπράτσος [2] Κεφ. 10.

Στο μάθημα αυτό, που εξετάζεται η προσεγγιστική λύση των συνήθων διαφορικών εξισώσεων 1ης τάξης, γίνεται αρχικά μια αναφορά στην ύπαρξη λύσης και στη συνέχεια δίνονται οι κυριότερες μέθοδοι προσέγγισης των λύσεων, που βασίζονται στον τύπο του Taylor. Στο εξής για ευκολία θα χρησιμοποιείται ο όρος διαφορική εξίσωση, αντί του όρου συνήθης διαφορική εξίσωση.

9.1 Εισαγωγικές έννοιες

Στην παράγραφο αυτή θα δοθούν ορισμένοι χρήσιμοι ορισμοί και θεωρήματα από την Ανάλυση, που εξασφαλίζουν την ύπαρξη και το μονοσήμαντο της λύσης των διαφορικών εξισώσεων 1ης τάξης.

9.1.1 Ορισμοί

Κρίνεται σκόπιμο στο σημείο αυτό να δοθούν οι βασικότεροι ορισμοί. Ο αναγνώστης για μια εκτενέστερη θεωρητική μελέτη των συνήθων διαφορικών εξισώσεων ο αναγνώστης παραπέμπεται στη διεύθυνση:

```
https://eclass.teiath.gr/modules/document
/document.php?course=TOP112
Εγγραφα -> ΠΑΡΑΔΟΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ
```

Ορισμός 9.1.1 - 1. *Η γενική μορφή μιας διαφορικής εξίσωσης 1ης τάξης είναι*

$$F\left(t, y, y'\right) = 0 \tag{9.1.1 - 1}$$

όπου η άγνωστη συνάρτηση $y = y(t)$ ορίζεται σε ένα διάστημα της μορφής $(a, b) \subseteq \Re$ και υπάρχει η $y'(t)$ για κάθε $t \in (a, b)$.

Τότε η λύση $y(t)$, εφόσον είναι δυνατόν να προσδιοριστεί, θα ορίζει τη λύση της $(9.1.1 - 1)$.

Ορισμός 9.1.1 - 2. *Μια διαφορική εξίσωση 1ης τάξης της μορφής* $(9.1.1-1)$ *θα λέγεται ότι γράφεται σε* **λυμένη** *(explicit) μορφή, όταν*

$$y' = f(t, y). \tag{9.1.1 - 2}$$

Σε κάθε άλλη περίπτωση η $(9.1.1-1)$ θα λέγεται ότι ορίζεται με **πεπλεγμένη** (implicit) μορφή.

Ορισμός 9.1.1 - 3. *Μια λυμένη διαφορική εξίσωση 1ης τάξης θα λέγεται ότι ορίζει ένα* **πρόβλημα αρχικής τιμής** *(initial value problem ή IVP), όταν η λύση της επαληθεύει μια αρχική τιμή, δηλαδή*

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(t, y(t)) \quad \textit{με πεδίο ορισμού} \quad D \subset \Re \times \Re = \Re^2 \\ &\textit{και} \quad y_0 = y\left(t_0\right), \quad \textit{όταν} \quad \left(t_0, y_0\right) \in D. \end{aligned} \tag{9.1.1 - 3}$$

Ορισμός 9.1.1 - 4. *Μια συνάρτηση $f(t, y(t))$ με πεδίο ορισμού, έστω D όπου $D \subseteq \Re^2$, λέγεται ότι ικανοποιεί μία* **συνθήκη του Lipschitz** *ως προς τη μεταβλητή y, όταν υπάρχει μία σταθερά L τέτοια, ώστε*

$$\left|f\left(t, y_1\right)-f\left(t, y_2\right)\right| \leq L\left|y_1-y_2\right| \tag{9.1.1 - 4}$$

για κάθε $\left(t, y_1\right),\left(t, y_2\right) \in D$.

Τότε η σταθερά L θα λέγεται και σταθερά του Lipschitz για την f.

Παράδειγμα 9.1.1 - 1

Έστω η συνάρτηση $f(t, y)=t|y|$ με πεδίο ορισμού

$$D=\{(t, y) \mid 1 \leq t \leq 2, \ -3 \leq y \leq 4\} .$$

Τότε για κάθε $\left(t, y_1\right),\ \left(t, y_2\right) \in D$ έχουμε

$$\begin{aligned} \left|f\left(t, y_1\right)-f\left(t, y_2\right)\right| &= \left|t\left|y_1\right|-t\left|y_2\right|\right|=|t|\left|\left|y_1\right|-\left|y_2\right|\right| \\ &\leq 2\left|y_1-y_2\right|, \end{aligned}$$

οπότε η σταθερά L του Lipschitz για τη συνάρτηση f θα είναι $L=2$, επειδή εύκολα αποδεικνύεται ότι

$$|f(2,1)-f(2,0)|=|2-0|=2|1-0|=2.$$

9.1.2 Θεμελιώδες θεώρημα

Το παρακάτω θεώρημα, που απεδείχθη από τον Henrici ([8], σελίδα 328), θεωρείται θεμελιώδες, επειδή δίνει τις συνθήκες, που πρέπει να πληροί μια συνάρτηση $f(t, y(t))$, έτσι ώστε μία 1ης τάξης λυμένη διαφορική εξίσωση να έχει μία και μοναδική λύση.

Θεώρημα 9.1.2 - 1 (Henrici για ODE's). *Έστω ότι η $f(t, y(t))$ είναι μια συνεχής συνάρτηση στο D, όπου*

$$D = \{(t, y) | \quad a \leq t \leq b, \quad y \in \Re\}.$$

Τότε, αν η f ικανοποιεί μία συνθήκη του Lipschitz ως προς τη μεταβλητή y, το πρόβλημα αρχικής τιμής

$$\begin{aligned} y' &= f(t, y); \quad t \in [a, b] \quad \textit{με} \\ y_0 &= y(t_0), \quad \textit{όταν} \quad (t_0, y_0) \in [a, b] \end{aligned} \tag{9.1.2 - 1}$$

έχει ακριβώς μία λύση για κάθε $t \in [a, b]$.

Παρατήρηση 9.1.2 - 1

Στο εξής στις ασκήσεις του μαθήματος θα είναι $t_0 = a$, οπότε η αρχική τιμή y_0 θα ισούται με $y_0 = y(t_0) = y(a)$.

Παράδειγμα 9.1.2 - 1

Έστω το πρόβλημα αρχικής τιμής

$$y' = 1 + t \sin(ty) \quad \text{όπου } 0 \leq t \leq 2 \text{ και } y(0) = 0.$$

Τότε θεωρώντας το t σταθερό από το Θεώρημα της Μέσης Τιμής για τη συνάρτηση $f(t, y) = 1 + t \sin(ty)$, προκύπτει ότι για κάθε $y_1 < y_2$ υπάρχει $\xi \in (y_1, y_2)$, έτσι ώστε

$$t^2 \cos(\xi t) = \frac{\partial f(t, y)}{\partial y} = \frac{f(t, y_2) - f(t, y_1)}{y_2 - y_1}.$$

Άρα

$$|f(t, y_2) - f(t, y_1)| = |y_2 - y_1| \left| t^2 \cos(\xi t) \right| \leq 4 |y_2 - y_1|,$$

δηλαδή η συνάρτηση f ικανοποιεί μία συνθήκη του Lipschitz ως προς τη μεταβλητή y με σταθερά του Lipschitz $L = 4$ και, επειδή προφανώς η f είναι συνεχής για κάθε $t \in [a, b]$ και $y \in \Re$, σύμφωνα με το Θεώρημα 9.1.2 - 1 θα υπάρχει ακριβώς μία λύση για το παραπάνω πρόβλημα αρχικής τιμής.

9.1.3 Συμβολισμοί

Έστω ότι το πρόβλημα αρχικής τιμής

$$y' = f(t, y)\,; \quad t \in [a, b] \quad \text{με} \quad y_0 = y\,(a) \qquad (9.1.3 - 1)$$

επαληθεύει τις υποθέσεις του Θεωρήματος 9.1.2 - 1, οπότε υπάρχει ακριβώς μια λύση $y = y(t)$ για κάθε $t \in [a, b]$. Τότε, εφόσον υπάρχει η θεωρητική λύση του προβλήματος, η συνάρτηση $y(t)$ προσδιορίζεται εφαρμόζοντας μια κατάλληλη μέθοδο.

Στις περιπτώσεις όπου η θεωρητική λύση είναι άγνωστη, με τον όρο *προσέγγιση της λύσης* εννοείται ο υπολογισμός με κάποιο προσεγγιστικό τύπο, που ορίζεται κάθε φορά από την αντίστοιχη **αριθμητική μέθοδο**, των τιμών της λύσης αρχικά στα εσωτερικά σημεία του $[a, b]$ και τελικά της τιμής στο σημείο b, δηλαδή της $y(b)$.

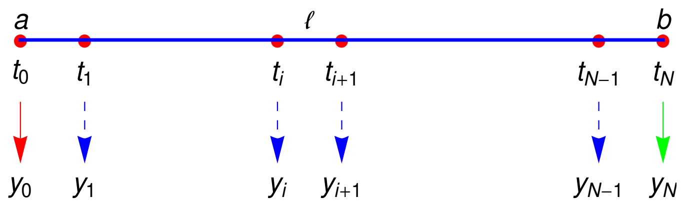
Για την προσεγγιστική λύση το διάστημα $[a, b]$ υποδιαιρείται σε N το πλήθος ίσα υποδιαστήματα από τα $N + 1$ σημεία[2]

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{N-1} < t_N = b$$

πλάτους $\ell = \dfrac{b-a}{N}$ (Σχ. 9.1.3 - 1). Τότε προφανώς είναι $t_i = a + i\,\ell$.

Εφόσον με $y(t)$ συμβολίζεται η θεωρητική λύση του προβλήματος αρχικής τιμής $(9.1.3 - 1)$, η τιμή της στο σημείο t_i είναι προφανώς η $y\,(t_i)$. Στην πραγματικότητα η χρήση της αριθμητικής μεθόδου δε θα δώσει τη θεωρητικά αναμενόμενη τιμή $y\,(t_i)$, αλλά κάποια άλλη προσεγγιστική που θα συμβολίζεται

[2] Στην περίπτωση όπου η μεταβλητή t συμβολίζει το χρόνο, το ℓ θα λέγεται **βήμα του χρόνου** (time step). Είναι ήδη γνωστές στον αναγνώστη ανάλογες διαμερίσεις της μεταβλητής x του διαστήματος (space step) από την προσέγγιση των παραγώγων (Μάθημα 6) και τους σύνθετους κανόνες ολοκλήρωσης (Μάθημα 8).



Σχήμα 9.1.3 - 1: η **διαμέριση** δ του διαστήματος $[a, b]$ από τα σημεία $t_i = a + i\,\ell$, όταν $\ell = t_{i+1} - t_i$ και οι αντίστοιχες προσεγγιστικές τιμές y_i; $i = 0,\, 1,\, \ldots,\, N$, όταν

στο εξής με y_i; $i = 1,\, 2,\, \ldots,\, N$. Τότε προφανώς υπάρχει ένα σφάλμα υπολογισμού της τιμής $y\,(t_i)$ από την y_i, που ισούται με $e = |y\,(t_i) - y_i|$ (**απόλυτο σφάλμα**).[3]

Στη διαδικασία της αριθμητικής λύσης της (9.1.3−1), η μέθοδος εφαρμόζεται διαδοχικά για $i = 1,\, 2, \ldots,\, N$ σε κάθε ένα από τα σημεία t_i της παραπάνω διαμέρισης δ - ακριβέστερα, όταν το t συμβολίζει το χρόνο, σε κάθε **επίπεδο χρόνου** (time level) - δίνοντας κάθε φορά την αντίστοιχη προσέγγιση y_i. Στη συνέχεια με γνωστή την προσέγγιση y_i υπολογίζεται από το επόμενο σημείο t_{i+1} η προσέγγιση y_{i+1} (όμοια Σχ. 9.1.3 - 1) και τελικά η τιμή $y_N = y\,(t_N) = y(b)$.

Παρατήρηση 9.1.3 - 1

Συνήθως η αρχική προσεγγιστική τιμή y_0 ισούται με την αντίστοιχη θεωρητική $y\,(a)$. Αν αυτό δεν ισχύει ή στις περιπτώσεις που η θεωρητική λύση είναι άγνωστη, τότε υπάρχει ένα αρχικό σφάλμα στη λύση, που αυξάνει με τη διαδικασία εφαρμογής της αριθμητικής μεθόδου.

[3] Ο αναγνώστης για μια εκτενέστερη ανάλυση των διαφόρων σφαλμάτων που προκύπτουν στις περιπτώσεις αυτές, παραπέμπεται στο Μάθημα 1.

Άσκηση

Να εξεταστεί αν ισχύει το Θεώρημα 9.1.2 - 1 στα παρακάτω προβλήματα αρχικών τιμών

$i)\quad y' = y\cos t;\quad 0 \le t \le 1,\quad y(0) = 1,$

$ii)\quad y' = 2yt + t^2 e^t;\quad 1 \le t \le 2,\quad y(1) = 0,$

$iii)\quad y' = \dfrac{4t^3 y}{1+t^4};\quad 0 \le t \le 1,\quad y(0) = 1.$

9.2 Μέθοδοι που βασίζονται στη σειρά Taylor

9.2.1 Μέθοδος του Euler

Αν και η μέθοδος αυτή δεν έχει σήμερα μεγάλες πρακτικές εφαρμογές, εξακολουθεί να παρουσιάζει ενδιαφέρον στην αριθμητική λύση των συνήθων διαφορικών εξισώσεων, επειδή αποτελεί τη **γεννήτρια μέθοδο** (predictor method) πολλών άλλων ακριβέστερων μεθόδων.

Έστω ότι η συνάρτηση $y = y(t)$ είναι η λύση του προβλήματος αρχικής τιμής $(9.1.2 - 1)$, δηλαδή του

$$y' = f(t, y), \quad \text{όταν} \quad t \in [a, b] \quad \text{με} \quad y_0 = y(a) \qquad (9.2.1 - 1)$$

και ότι η y έχει παραγώγους τουλάχιστον μέχρι και 2ης τάξης συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα $[a, b]$, ενώ το $[a, b]$ έχει υποδιαιρεθεί σε N το πλήθος ίσα υποδιαστήματα από τα $N + 1$ σημεία (Σχ. 9.1.3 - 1)

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = b, \qquad (9.2.1 - 2)$$

όπου ℓ είναι το πλάτος κάθε υποδιαστήματος.

Είναι ήδη γνωστό ότι, αν $f \,|\, [a, b]$ είναι μια συνάρτηση έχει παραγώγους μέχρι και ν - τάξη στο $[a, b]$, τότε, αν $\xi \in [a, b]$, ισχύει ο παρακάτω τύπος του Taylor

$$f(t) \;\approx\; f(\xi) + \frac{f'(\xi)}{1\,!}(t-\xi) + \frac{f''(\xi)}{2\,!}(t-\xi)^2 + \ldots + \frac{f^{(\nu)}(\xi)}{\nu\,!}(t-\xi)^{\nu}.$$

Αν στον παραπάνω τύπο το t αντικατασταθεί από το $t+\ell$ με $\ell>0$ και το ξ από το t, τότε

$$f(t+\ell) \approx f(t)+\frac{\ell}{1\,!}f'(t)+\frac{\ell^2}{2\,!}f''(t)+\ldots+\frac{\ell^\nu}{\nu\,!}f^{(\nu)}(t),$$

οπότε, αν $y(t)=f(t)$, τελικά έχουμε

$$\begin{aligned} y(t+\ell) &\approx y(t)+\frac{\ell}{1\,!}y'(t)+\frac{\ell^2}{2\,!}y''(t) \\ &\quad +\ldots+\frac{\ell^\nu}{\nu\,!}y^{(\nu)}(t). \end{aligned} \tag{9.2.1 - 3}$$

Παραλείποντας στην (9.2.1−3) όλους τους όρους του ℓ βαθμού μεγαλύτερου του 1ου προκύπτει ότι

$$y(t+\ell)\approx y(t)+\ell y'(t),$$

δηλαδή

$$y'(t)\approx\frac{y(t+\ell)-y(t)}{\ell}\,. \tag{9.2.1 - 4}$$

Αντικαθιστώντας την $(9.2.1-4)$ στην $(9.2.1-1)$ έχουμε

$$y(t+\ell)\approx y(t)+\ell f(t,y). \tag{9.2.1 - 5}$$

Η αριθμητική λύση της (9.2.1−1), δηλαδή η προσέγγιση της τιμής $y\left(t_N\right)=y(b)$, προκύπτει όταν η $(9.2.1-5)$ εφαρμοστεί στην $(9.2.1-1)$ σε κάθε ένα σημείο της διαμέρισης $(9.2.1-2)$.[4] Τότε, επειδή σύμφωνα με τους συμβολισμούς της Παραγράφου 9.1.3 είναι $y\left(t_i\right)=y_i$ και $y\left(t_{i+1}\right)=y_{i+1}$, έχουμε τελικά την παρακάτω αριθμητική μέθοδο

$$y_{i+1}=y_i+\ell f\left(t_i,y_i\right)\quad \text{για κάθε}\quad i=0,\,1,\,\ldots,\,N-1. \tag{9.2.1 - 6}$$

Η μέθοδος αυτή είναι γνωστή σαν **μέθοδος του Euler** (Euler's method), ενώ ο τύπος της σαν η **γεννήτρια σχέση** (predictor formula) του Euler, επειδή, όπως ήδη έχει γραφεί στην αρχή της παραγράφου αυτής, χρησιμοποιείται στη δημιουργία άλλων αριθμητικών μεθόδων. Η διαδικασία της μεθόδου του Euler περιγράφεται στον Αλγόριθμο 9.2.1 - 1.

[4] Βλέπε Σχ. 9.1.3 - 1 της Παραγράφου 9.1.3.

Αλγόριθμος 9.2.1 - 1 (μεθόδου του Euler)

Δεδομένα a, b, N και η αρχική συνθήκη y_0

Έστω $\ell = (b-a)/N$, $t = a$, $y = y_0$

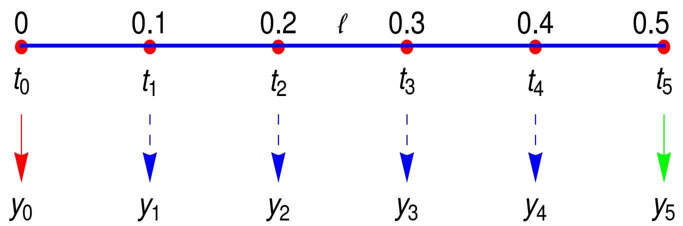
Για $i = 0, 1, \ldots, N-1$

  $y := y + \ell f\,(t, y)$

  $t := t + \ell$

  $y := y$

τέλος i



Σχήμα 9.2.1 - 1: η διαμέριση του Παραδείγματος 9.2.1 - 1, όταν $\ell = 0.1$ και οι αντίστοιχες τιμές y_i; $i = 0, 1, \ldots, 5$, όταν $t_i = i\,\ell$. Η αρχική τιμή είναι $y_0 = y\,(t_0) = y(0) = \left[t + e^{-t}\right]_{t=0} = 1$

Παράδειγμα 9.2.1 - 1

Να λυθεί με τη μέθοδο του Euler το πρόβλημα αρχικής τιμής

$$y'(t) = -y(t) + t + 1 \quad \text{με} \quad t \in [0, 0.5], \quad \text{όταν} \quad \ell = 0.1, \tag{9.2.1 - 7}$$

και να γίνει σύγκριση των αποτελεσμάτων με τη θεωρητική λύση

$$y(t) = t + e^{-t}.$$

Στη συνέχεια να λυθεί το πρόβλημα, όταν $\ell = 0.01$ και να συγκριθούν τα αποτελέσματα των προσεγγιστικών λύσεων για $\ell = 0.1$ και $\ell = 0.01$.

Λύση. Επειδή $\ell = 0.1$, το διάστημα ολοκλήρωσης $[0, 0.5]$ πρέπει να υποδιαιρεθεί σε $\frac{0.5-0}{0.1} = 5$ υποδιαστήματα. Άρα $N = 5$ (Σχ. 9.2.1 - 1).

Συγκρίνοντας την $(9.2.1 - 7)$ με το πρόβλημα αρχικής τιμής $y' = f(t, y)$ στη σχέση $(9.2.1{-}1)$ προκύπτει ότι για το συγκεκριμένο παράδειγμα η συνάρτηση $f(t, y)$ είναι

$$f(t, y) = -y + t + 1.$$

Άρα σύμφωνα με τον τύπο $(9.2.1 - 6)$ η μέθοδος του Euler γράφεται

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \ell\, f\,(t_i, y_i) \\ &= y_i + 0.1(-y_i + t_i + 1) \\ &= 0.9\, y_i + 0.1\, t_i + 0.1, \end{aligned} \tag{9.2.1 - 8}$$

όπου είναι $t \in [0, 0.5]$, οπότε $a = t_0 = 0$ και $t_i = a + i\,\ell = i\,\ell$.

Επειδή είναι γνωστή η θεωρητική λύση του προβλήματος, σύμφωνα και με την Παρατήρηση 9.1.3 - 1, είναι δυνατόν να θεωρηθεί σαν αρχική τιμή y_0 της λύσης η αντίστοιχη θεωρητική, δηλαδή

$$y_0 = y(0) = \left[t + e^{-t}\right]_{t=0} = 1.$$

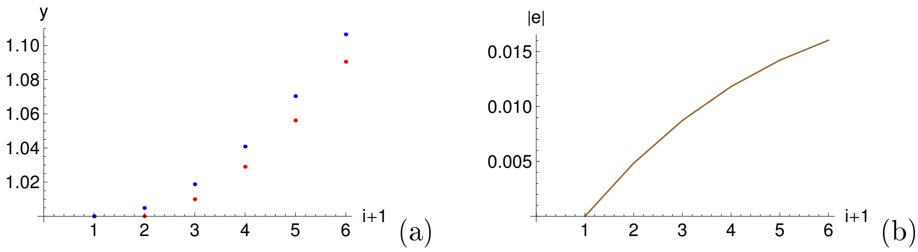
Πίνακας 9.2.1 - 1: Παράδειγμα 9.2.1 - 1: τα αποτελέσματα της μεθόδου του Euler, όταν $\ell = 0.1$

t_i	y_i	$y(t_i)$	$e_i = \lvert y_i - y(t_i) \rvert$
0.0	1.000 000	1.000 000	0.0
0.1	1.000 000	1.004 837	0.004 837
0.2	1.010 000	1.018 731	0.008 731
0.3	1.029 000	1.040 818	0.011 818
0.4	1.056 100	1.070 320	0.014 220
0.5	*1.090 490*	1.106 531	0.016 041

Εφαρμόζοντας την $(9.2.1 - 8)$ διαδοχικά για $i = 0,\ 1,\ \ldots,\ 4$ έχουμε:

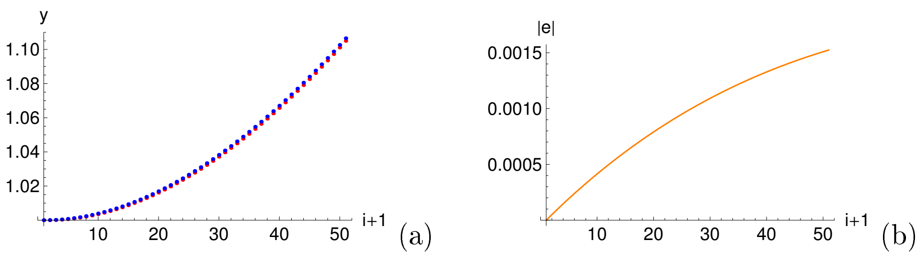
$$
\begin{aligned}
\text{για}\quad i = 0;\quad y_{0+1} = \quad & y_1 && = 0.9\, y_0 + 0.1\, t_0 + 0.1 \\
& && = 0.9 * 1 + 0.1 * 0 + 0.1 = 1, \quad \text{ενώ είναι} \\
y(t_1) = \quad & y(0.1) && = 0.1 + e^{-0.1} = 1.004\,837 \\
\hline
i = 1;\quad y_{1+1} = \quad & y_2 && = 0.9\, y_1 + 0.1\, t_1 + 0.1 \\
& && = 0.9 * 1 + 0.1 * 0.1 + 0.1 = 1.01, \quad \text{ενώ είναι} \\
y(t_2) = \quad & y(0.2) && = 0.2 + e^{-0.2} = 1.018\,731 \\
\hline
\vdots \quad \vdots \quad & && \vdots \\
i = 4;\quad y_{4+1} = \quad & y_5 && = \ldots = \mathit{1.090\ 490} \\
y(t_5) = \quad & y(0.5) && = 0.5 + e^{-0.5} = 1.106\,531.
\end{aligned}
$$

Τα αποτελέσματα δίνονται στον Πίνακα 9.2.1 - 1 και η γραφική των παράσταση στο Σχ. 9.2.1 - 2. Όπως προκύπτει από τα αποτελέσματα, υπάρχει μια αύξηση του σφάλματος e, καθώς ο χρόνος πλησιάζει προς τη χρονική στιγμή $t = 0.5$.



Σχήμα 9.2.1 - 2: Παράδειγμα 9.2.1 - 1, όταν $\ell = 0.1$. (a) Τα μπλε σημεία ορίζουν τις θεωρητικές τιμές $y(t_i)$; $i = 0, 1, \ldots, 4$ και τα κόκκινα τις αριθμητικές y_i. (b) Η γραφική παράσταση των αντίστοιχων σφαλμάτων e_i

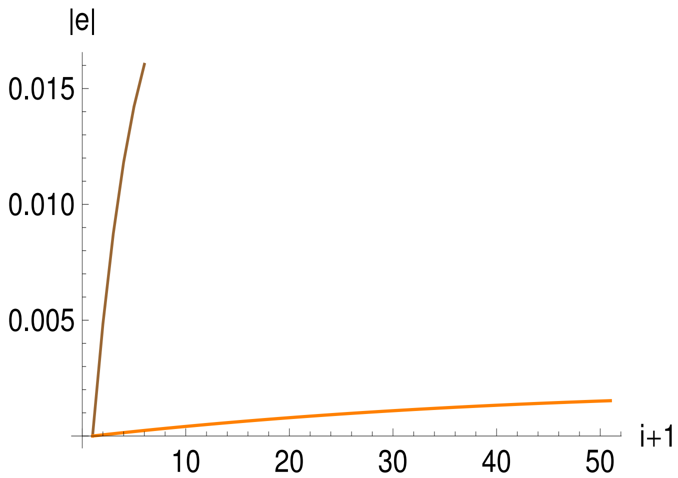
Η παραπάνω λύση υπολογίστηκε επίσης με βήμα χρόνου $\ell = 0.01$, οπότε το διάστημα ολοκλήρωσης $[0, 0.5]$ υποδιαιρείται στην περίπτωση αυτή σε $\frac{0.5-0}{0.01} = 50$ υποδιαστήματα. Άρα $N = 50$, ενώ είναι δυνατόν να γίνει υποδιαίρεση ανάλογη του Σχ. 9.2.1 - 1 θέτοντας στη συντεταγμένη 0.5 τα t_{50} και y_{50} αντί των t_5 και y_5. Τα αποτελέσματα δίνονται στον Πίνακα 9.2.1 - 2 και η γραφική των παράσταση στο Σχ. 9.2.1 - 3. Άμεσα τότε προκύπτει ότι ενώ τα αποτελέσματα σε σύγκριση με τα αντίστοιχα του Πίνακα 9.2.1 - 1 είναι ακριβέστερα, όμως και στην περίπτωση αυτή εξακολουθεί να υπάρχει μια αύξηση του σφάλματος με την πάροδο του χρόνου. Η σύγκριση των σφαλμάτων που προκύπτουν από την εφαρμογή της μεθόδου, όταν $\ell = 0.01$ και $\ell = 0.01$, δίνεται στο Σχ. 9.2.1 - 4.



Σχήμα 9.2.1 - 3: Παράδειγμα 9.2.1 - 1, όταν $\ell = 0.01$. (a) Τα μπλε σημεία ορίζουν τις θεωρητικές τιμές $y(t_i)$; $i = 0, 1, \ldots, 50$ και τα κόκκινα τις αριθμητικές y_i. (b) Η γραφική παράσταση των αντίστοιχων σφαλμάτων e_i

Πίνακας 9.2.1 - 2: Παράδειγμα 9.2.1 - 1: τα αποτελέσματα της μεθόδου του Euler, όταν $\ell = 0.01$

t_i	y_i	$y(t_i)$	$e_i = \lvert y_i - y(t_i) \rvert$
0.00	1.000 000	1.000 000	0.0
0.01	1.000 050	1.000 000	0.000 050
0.02	1.000 199	1.000 100	0.000 010
0.03	1.000 446	1.000 299	0.000 147
⋮	⋮	⋮	⋮
0.5	*1.195 006*	1.106 531	0.001 525



Σχήμα 9.2.1 - 4: Παράδειγμα 9.2.1 - 1. Η καφέ καμπύλη δείχνει τα σφάλματα $|e_i|$, όταν $\ell = 0.1$ και η πορτοκαλί, όταν $\ell = 0.01$

Άσκηση

Με τη μέθοδο του Euler να υπολογιστεί η λύση των παρακάτω προβλημάτων αρχικής τιμής

i) $y' = \sin t + e^{-t}\,; \quad 0 \leq t \leq 0.5, \quad y_0 = y(0) = 0,$ όταν $\ell = 0.1$ και $y(t) = 2 - e^{-t} - \cos t.$

ii) $y' = -ty + y^2\,; \quad 1 \leq t \leq 1.5,$ όταν $\ell = 0.1,\, 0.05,$ $y(t) = \dfrac{1}{4 - 3e^t}$ και $y_0 = y(1)\,.$

Να γίνει η γραφική παράσταση της λύσης και των αντίστοιχων σφαλμάτων.

9.2.2 Μέθοδος του Taylor τάξης n

Έχοντας υπ' όψιν τη μέθοδο του Euler που προέκυψε από τον τύπο $(9.2.1-3)$ του Taylor για $n = 1$, είναι προφανές ότι μία μεγαλύτερης ακρίβειας μέθοδος είναι δυνατό να προκύψει αυξάνοντας το n.

Όμοια, έστω το πρόβλημα αρχικής τιμής

$$y' = f(t, y), \quad \text{όταν} \quad t \in [a, b] \quad \text{με} \quad y_0 = y(a) \tag{9.2.2 - 1}$$

όπου η y έχει παραγώγους στο $[a, b]$ μέχρι και n τάξη συνεχείς συναρτήσεις και ότι το $[a, b]$ έχει υποδιαιρεθεί σε N το πλήθος ίσα υποδιαστήματα από τα $N + 1$ σημεία[5]

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = b \tag{9.2.2 - 2}$$

πλάτους ℓ. Τότε από τον τύπο $(9.2.1-3)$ του Taylor προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} y\,(t + \ell) \;\; &\approx \;\; y\,(t) + \ell y'\,(t) + \frac{\ell^2}{2\,!}\,y''\,(t) \\ &\quad + \ldots + \frac{\ell^n}{n\,!}\,y^{(n)}\,(t)\,. \end{aligned} \tag{9.2.2 - 3}$$

[5]Βλέπε όμοια Σχ. 9.1.3 - 1 της Παραγράφου 9.1.3.

Αλγόριθμος 9.2.2 - 1 (μεθόδου του Taylor τάξης n)

Δεδομένα a, b, N και η αρχική συνθήκη y_0

Έστω $\ell = (b-a)/N$, $t = t_0$, $y = y_0$

Υπολόγισε $T = T\,(\ell, t, y)$

Για $i = 0, 1, \ldots, N-1$

$y := y + \ell T$

$t := t + \ell$

$y := y$

τέλος i

Επειδή η συνάρτηση $y(t)$ επαληθεύει το πρόβλημα αρχικής τιμής $(9.2.2-1)$, έχουμε

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(t, y(t)) \\ y''(t) &= f'(t, y(t)) \\ &\vdots \\ y^{(n)}(t) &= f^{(n-1)}(t, y(t)), \end{aligned} \tag{9.2.2 - 4}$$

οπότε αντικαθιστώντας στην $(9.2.2-1)$ προκύπτει η παρακάτω αριθμητική μέθοδος

$$y_{i+1} = y_i + \ell f_i + \frac{\ell^2}{2\,!}\, f_i' + \ldots + \frac{\ell^n}{n\,!}\, f_i^{(n-1)} \tag{9.2.2 - 5}$$

για κάθε $i = 0,\, 1,\, \ldots,\, N-1$ με $f_i^{(n)} = f^{(n)}\,(t_i, y_i)$, που είναι γνωστή σαν η **μέθοδος του Taylor τάξης n**. Η διαδικασία της μεθόδου περιγράφεται στον Αλγόριθμο 9.2.2 - 1, που για ευκολία έχει χρησιμοποιηθεί ο τελεστής T, με τιμή T_i στην i - επανάληψη

$$T_i = f_i + \frac{\ell}{2\,!}\, f_i' + \frac{\ell^2}{3\,!}\, f_i'' + \ldots + \frac{\ell^{n-1}}{n\,!}\, f_i^{(n-1)}\,; \quad i = 0,\, 1,\, \ldots,\, N-1.$$

Το βασικό μειονέκτημα της μεθόδου του Taylor είναι ότι για να είναι η μέθοδος ακριβής, απαιτείται η τάξη της να είναι αρκετά μεγάλη, που σημαίνει τον υπολογισμό των παραγώγων ανώτερης τάξης της $f(t, y)$, καθώς επίσης και τις αντίστοιχες αρχικές τιμές που αντιστοιχούν σε αυτές, κάτι που δεν είναι πάντοτε εύκολο, επειδή ο τύπος της f τις περισσότερες φορές είναι πολύπλοκος.

Παράδειγμα 9.2.2 - 1

Με τη μέθοδο του Taylor τάξης 2 να λυθεί το πρόβλημα αρχικής τιμής (Παράδειγμα 9.2.1 - 1)

$$y'(t) = -y(t) + t + 1 \quad \text{με} \quad t \in [0, 0.5], \quad \text{όταν} \quad \ell = 0.1 \qquad (9.2.2 - 6)$$

και να γίνει σύγκριση των αποτελεσμάτων με τη θεωρητική λύση και την αντίστοιχη λύση της μεθόδου του Euler. Η θεωρητική λύση είναι

$$y(t) = t + e^{-t}.$$

Λύση. Όμοια, επειδή $\ell = 0.1$, το διάστημα ολοκλήρωσης $[0, 0.5]$ υποδιαιρείται 5 ($N = 5$) υποδιαστήματα (Σχ. 9.2.1 - 1).

Σύμφωνα με την $(9.2.2 - 5)$ η μέθοδος του Taylor στην περίπτωση αυτή όπου $n = 2$ γράφεται

$$y_{i+1} = y_i + \ell\, f\,(t_i, y_i) + \frac{\ell^2}{2\,!}\, f'\,(t_i, y_i)\ ; \quad i = 0, \ldots, 4, \qquad (9.2.2 - 7)$$

όταν η $f(t, y)$ προκύπτει από την $(9.2.2 - 6)$ και ισούται με

$$f(t, y) = -y + t + 1, \qquad (9.2.2 - 8)$$

ενώ η $f'(t, y)$ υπολογίζεται από τη σχέση $f(t, y) = y'$ με τη διαδικασία $(9.2.2 - 4)$ ως εξής:

$$\begin{aligned} f'(t, y) &= y'' = (y')' \overbrace{=}^{(9.2.2-6)} (-y + t + 1)' \\ &= -y' + 1 \overbrace{=}^{(9.2.2-6)} -(-y + t + 1) + 1 \\ &= y - t. \end{aligned} \qquad (9.2.2 - 9)$$

Είναι $t \in [0, 0.5]$, οπότε $a = t_0 = 0$ και $t = a + i\,\ell = i\,\ell$. Άρα αντικαθιστώντας με τις $(9.2.2-8)$ και $(9.2.2-9)$ στην $(9.2.2-7)$ έχουμε

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \ell\, f\,(t_i, y_i) + \frac{\ell^2}{2\,!}\, f'\,(t_i, y_i) \\ &= y_i + 0.1\,(-y_i + t_i + 1) + \frac{0.1^2}{2}\,(y_i - t_i) \\ &= 0.905\, y_i + 0.095\, t_i + 0.1. \end{aligned} \tag{9.2.2 - 10}$$

Εφαρμόζοντας την $(9.2.2-10)$ διαδοχικά για $i = 0,\, 1,\, \ldots,\, 4$ προκύπτει

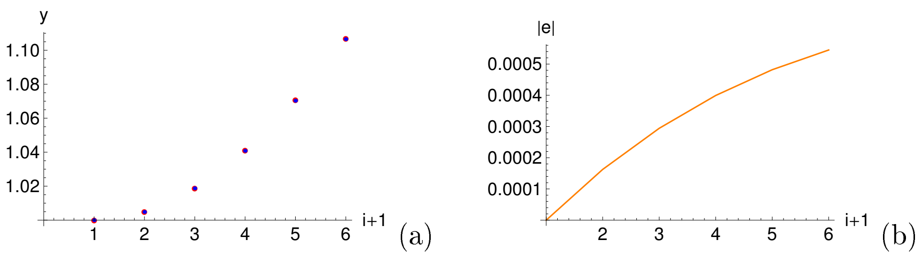
για $i = 0;$	$y_{0+1} =$	y_1	$= 0.905\, y_0 + 0.095\, t_0 + 0.1$	
			$= 0.905 * 1 + 0.095 * 0 + 0.1 = 1.005,$	ενώ είναι
	$y\,(t_1) =$	$y(0.1)$	$= 0.1 + e^{-0.1} = 1.004\,837$	
$i = 1;$	$y_{1+1} =$	y_2	$= 0.905\, y_1 + 0.095\, t_1 + 0.1$	
			$= 0.905 * 1.005 + 0.095 * 0.1 + 0.1$	
			$= 1.019\,025$	
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
$i = 4;$	$y_{4+1} =$	y_5	$= \ldots =$ *1.107 076.*	

Τα αποτελέσματα δίνονται στον Πίνακα 9.2.2 - 1 και η γραφική των παράσταση στο Σχ. 9.2.2 - 1. Όπως προκύπτει από τα αποτελέσματα, υπάρχει μία μικρή αύξηση του σφάλματος e, καθώς ο χρόνος πλησιάζει προς τη χρονική στιγμή $t = 0.5$.

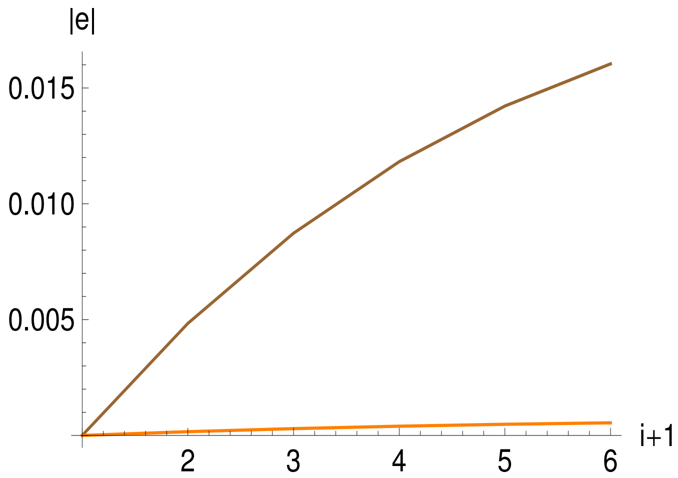
Στο Σχ. 9.2.2 - 2 γίνεται η σύγκριση της μεθόδου με την αντίστοιχη του Euler, όταν $\ell = 0.1$. Είναι προφανές ότι η μέθοδος του Taylor που εξετάστηκε, έχει δώσει μεγαλύτερη ακρίβεια σε σύγκριση με του Euler.

Πίνακας 9.2.2 - 1: Παράδειγμα 9.2.2 - 1: τα αποτελέσματα της μεθόδου του Taylor, όταν $\ell = 0.1$

t_i	y_i	$y(t_i)$	$e_i = \|y_i - y(t_i)\|$
0.0	1.000 000	1.000 000	0.0
0.1	1.005 000	1.004 837	0.000 163
0.2	1.019 025	1.018 731	0.000 294
0.3	1.041 218	1.040 818	0.000 399
0.4	1.070 802	1.070 320	0.000 482
0.5	*1.107 076*	1.106 531	0.000 545



Σχήμα 9.2.2 - 1: Παράδειγμα 9.2.1 - 1, όταν $\ell = 0.1$. (a) Τα μπλε σημεία ορίζουν τις θεωρητικές τιμές $y(t_i)$; $i = 0, 1, \ldots, 4$ και τα κόκκινα τις αριθμητικές y_i. (b) Η γραφική παράσταση των αντίστοιχων σφαλμάτων e_i



Σχήμα 9.2.2 - 2: Παράδειγμα 9.2.1 - 1, όταν $\ell = 0.1$. Η καφέ καμπύλη δείχνει τα σφάλματα $|e_i|$ με τη μέθοδο του Euler και η πορτοκαλί με του Taylor

Άσκηση

Να λυθεί η άσκηση (i) της Παραγράφου 9.2.1 με τη μέθοδο του Taylor τάξης $n = 2$, αντίστοιχα $n = 3$ και να γίνει σύγκριση με τα αντίστοιχα αποτελέσματα της μεθόδου του Euler.

[6]

E-mail: bratsos@teiath.gr URL: http://users.teiath.gr/bratsos/

Βιβλιογραφία

[1] Ακρίβης, Γ., Δουγαλής, Β. (1995), Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Αθήνα, ISBN 978–960–524–022–6.

[2] Μπράτσος, Α. (2011), Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, ISBN 978–960–351–874–7.

[3] Μπράτσος, Α. (2002), Ανώτερα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, ISBN 960–351–453–5/978–960–351–453–4.

[4] Στεφανάκος, Χ., Προγραμματισμός Η/Υ με MATLAB, Γκούρδας Εκδοτική, ISBN 978–960–387–856–8.

[5] Burden, Richard L. and Faires, J. Douglas (2000), Numerical Analysis (7th ed.), Brooks/Cole, ISBN 978–0–534–38216–2.

[6] Conte, S. D., Carl de Boor (1981), Elementary Numerical Analysis: An Algorithmic Approach (3rd ed.), McGraw-Hill Book Company, ISBN 978–0–07–012447–9.

[7] Don, E., Schaum's Outlines – Mathematica (2006), Εκδόσεις Κλειδάριθμος, ISBN 978–960–461–000–6.

[8] Henrici, P. (1966), Elements of Numerical Analysis, John Wiley & Sons, New York, ISBN 978–0–471–37238–7.

[9] Kendell A. Atkinson (1989), An Introduction to Numerical Analysis (2nd ed.), John Wiley & Sons, ISBN 0–471–50023–2.

[10] Leader, Jeffery J. (2004), Numerical Analysis and Scientific Computation, Addison Wesley, ISBN 978–0–201–73499–7.

[11] Schatzman, M. (2002), Numerical Analysis: A Mathematical Introduction, Clarendon Press, Oxford, ISBN 978–0–19–850279–1.

[12] Stoer, Josef; Bulirsch, Roland (2002), Introduction to Numerical Analysis (3rd ed.), Springer, ISBN 978–0–387–95452–3.

[13] Sli, E. and Mayers, D. (2003), An Introduction to Numerical Analysis, Cambridge University Press, ISBN 978–0–521–00794–8.

Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm
- http://mathworld.wolfram.com/
- http://eom.springer.de/