Μάθημα 1

ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΗ ΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

1.1 Εισαγωγή

Κρίνεται αρχικά απαραίτητο να γίνει στον αναγνώστη υπενθύμιση των παρακάτω βασικών μαθηματικών εννοιών.

Ορισμός 1.1 - 1 (εξίσωσης). *Λέγεται εξίσωση κάθε ισότητα της μορφής*

$$F\left(x_1, x_2, \ldots, x_\nu\right) = 0. \tag{1.1 - 1}$$

Στην (1.1−1) οι μεταβλητές x_1, x_2, ..., x_ν λέγονται **άγνωστοι**, ενώ ο προσδιορισμός τους **λύση** ή **ρίζα** της εξίσωσης[1].

Η έννοια της εξίσωσης σαν μια σχέσης που ισχύει για ορισμένες τιμές των μεταβλητών της επεκτείνεται εκτός από την Άλγεβρα, στην Αναλυτική Γεωμετρία με τον καθορισμό του τόπου των σημείων σχημάτων, όπως για παράδειγμα η εξίσωση $x^2 + y^2 = 1$ του μοναδιαίου κύκλου, στη Φυσική με τις εξισώσεις των διαφόρων νόμων, κ.λπ.

[1] Η εξίσωση δεν πρέπει να συγχέεται με την έννοια της **ταυτότητας**, που εκφράζεται επίσης με τη μορφή (1.1−1), αλλά ισχύει για κάθε τιμή των μεταβλητών της, όπως $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, κ.λπ.

Στο μάθημα αυτό θα εξεταστεί ο προσδιορισμός των ριζών x^* των εξισώσεων μιας μεταβλητής, έστω x, δηλαδή εξισώσεων της μορφής

$$f(x) = 0. \tag{1.1 - 2}$$

Στην κατηγορία αυτή των εξισώσεων ανήκουν μεταξύ των άλλων οι:

i) **πολυωνυμικές** $f(x) = a_\nu x^\nu + \ldots + a_1 x + a_0$, όταν $a_i \in \Re$; $i = 0, 1, \ldots, \nu$ και $\nu = 1, 2, \ldots$. Οι ρίζες της είναι εύκολο να προσδιοριστούν θεωρητικά όταν $\nu = 1, 2, 3$, ενώ για $\nu \geq 3$ ο υπολογισμός είναι πολύπλοκος ή αδύνατος,

ii) **τριγωνομετρικές** όπως $\sin x = \sin a$ με ρίζες $x = 2k\pi + a$ ή $x = 2k\pi + \pi - a$, όταν $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$,

ii) **διαφορικές** $f\left(y^{(\nu)}, \ldots, y', y, x\right) = 0$, όταν $y = y(x)$ και $\nu = 1, 2, \ldots$, που η θεωρητική λύση τους είναι γνωστή μόνον για ορισμένες μορφές,

iv) **υπερβατικές** (transcendental) όπως $x - e^x = 0$, $x - \sin f(x) = 0$, που η λύση τους είναι αδύνατη θεωρητικά.

Συμπερασματικά είναι δυνατόν να γραφεί ότι για ελάχιστες μορφές εξισώσεων είναι γνωστή η θεωρητική λύση, ενώ η λύση στη γενική περίπτωση είναι αδύνατη.

Η λύση όμως μιας εξίσωσης της μορφής $(1.1 - 2)$ ή γενικότερα της $(1.1 - 1)$ στις περισσότερες των περιπτώσεων είναι απαραίτητη, επειδή η γνώση της είναι στοιχείο που απαιτείται για τη λύση γενικότερων προβλημάτων, που συναντώνται στις διάφορες εφαρμογές. Στις περιπτώσεις αυτές και εφόσον είναι αδύνατη η θεωρητική λύση της $(1.1 - 2)$, πρέπει να αναζητηθούν οι λεγόμενες **προσεγγιστικές λύσεις** της. Οι λύσεις αυτές, που δεν έχουν την απόλυτη ακρίβεια των αντίστοιχων θεωρητικών, δίνουν τότε τη δυνατότητα της περαιτέρω λύσης στα παραπάνω προβλήματα. Ο κλάδος των Μαθηματικών που μελετά γενικά τις προσεγγίσεις των λύσεων των διαφόρων προβλημάτων όπως εξισώσεων, συστημάτων, διαφορικών εξισώσεων, κ.πλ. είναι γνωστός σαν **Αριθμητική Ανάλυση**.

Έστω τώρα η εξίσωση (1.1−2). Για τον προσδιορισμό μια προσεγγιστικής λύσης ή ρίζας, έστω η x^*, δημιουργείται μια κατάλληλη ακολουθία[2] τιμών x_i; $i = 0, 1, \ldots$, που θα ορίζεται από έναν τύπο της μορφής

$$x_i = g\left(x_{i-1}\right); \quad i = 1,\, 2,\, \ldots$$

που για ευκολία στη συνέχεια του μαθήματος θα γράφεται ως εξής:

$$x_{i+1} = g\left(x_i\right); \quad i = 1,\, 2,\, \ldots\, . \tag{1.1 - 3}$$

Στην (1.1−3) η g λέγεται **επαναληπτική συνάρτηση**. Ο τρόπος ορισμού της g ορίζει σε κάθε περίπτωση και την αντίστοιχη μέθοδο λύσης του προβλήματος (1.1−2). Θεωρητικά[3] η (1.1−3) πρέπει να συγκλίνει στη ρίζα x^* της εξίσωσης, δηλαδή

$$\lim_{i \to +\infty} \left|x_i - x^*\right| = 0.$$

Δίνονται τώρα οι παρακάτω χρήσιμοι για τα επόμενα ορισμοί.

Ορισμός 1.1 - 2. *Αν υπάρχουν σταθερές λ και p, έτσι ώστε*

$$\lim_{i \to +\infty} \frac{\left|x_{i+1} - x^*\right|}{\left|x_i - x^*\right|^p} = \lim_{i \to +\infty} \frac{\left|e_{i+1}\right|}{\left|e_i\right|^p} = \lambda, \tag{1.1 - 4}$$

τότε θα λέγεται ότι η σύγκλιση της ακολουθίας είναι τάξης p και έχει ασυμπτωτική σταθερά λάθους λ.

Στην περίπτωση, όπου $p = 1$, η σύγκλιση λέγεται **γραμμική**, ενώ, όταν $p = 2$, αντίστοιχα $p = 3$, λέγεται **τετραγωνική**, αντίστοιχα **κυβική**.

Ορισμός 1.1 - 3. *Μια επαναληπτική μέθοδος της μορφής $x_{i+1} = g\left(x_i\right)$; $i = 0,\, 1,\, \ldots$ θα είναι τάξης p, όταν η ακολουθία x_i; $i = 0,\, 1,\, \ldots$ είναι τάξης p.*

Ορισμός 1.1 - 4. *Μια γραμμικά συγκλίνουσα ακολουθία με ασυμπτωτική σταθερά λάθους 0 θα λέγεται ότι συγκλίνει υπεργραμμικά (superlinearly) στο x^*.*

[2] Για την έννοια της ακολουθίας βλέπε Παράρτημα Α στο τέλος του μαθήματος.

[3] Για σύγκλιση ακολουθίας βλέπε όμοια Παράρτημα Α στο τέλος του μαθήματος.

Παράδειγμα 1.1 - 1

Έστω η ακολουθία

$$x_i = 1 + 3^{-i}\,; \quad i = 1,\, 2,\, \ldots$$

που συγκλίνει στο 1. Τότε

$$x_{i+1} - 1 = 3^{-i-1} \quad \text{και} \quad x_i - 1 = 3^{-i},$$

οπότε

$$\lim_{i \to +\infty} \frac{|x_{i+1} - 1|}{|x_i - 1|} = \lim_{i \to +\infty} \frac{|e_{i+1}|}{|e_i|} = \frac{1}{3}\,,$$

δηλαδή έχουμε σύγκλιση τάξης $p = 1$ με ασυμπτωτική σταθερά λάθους $\lambda = 1/3$.

Όμοια αποδεικνύεται ότι η ακολουθία:

i) $x_{i+1} = a + q^{-(i+1)}$; $i = 0,\, 1,\, \ldots$ συγκλίνει στο a με ασυμπτωτική σταθερά λάθους $\lambda = q$,

ii) $x_{i+1} = 1 + \dfrac{1}{(i-1)\,!}$; $i = 0,\, 1,\, \ldots$ συγκλίνει στο 1 υπεργραμμικά.

1.1.1 Σφάλματα υπολογισμών

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, από τη διαδικασία που περιγράφεται στην $(1.1-3)$, θα προκύψει στην i-επανάληψη μια προσεγγιστική ρίζα x_i διαφορετική της θεωρητικής x^*. Έστω $e_i = x_i - x^*$; $i = 0,\, 1,\, \ldots$ το **σφάλμα** της προσέγγισης.

Σχετικά με το δημιουργούμενο σφάλμα e_i ισχύουν τα εξής:

i) η μέθοδος που περιγράφεται στην $(1.1-3)$ είναι προσεγγιστική. Αυτό σημαίνει ότι ο τύπος της μεθόδου από μόνος του, σε αντίθεση με τον αντίστοιχο θεωρητικό, έχει σφάλμα.

ii) Στους υπολογισμούς του τύπου $(1.1-3)$ δημιουργούνται τα λεγόμενα **σφάλματα στρογγυλοποίησης** (round-off errors). Για να γίνουν περισσότερο κατανοητά τα σφάλματα αυτά, έστω ότι κατά τη διαδικασία λύσης ενός προβλήματος απαιτείται ο υπολογισμός της $\sqrt{2}$ και ότι ο υπολογιστής έχει στη ζώνη εργασίας τη δυνατότητα επεξεργασίας 8, αντίστοιχα 16 δεκαδικών ψηφίων - ανάλογα η περίπτωση 32, 64, 128 κ.λπ. ψηφίων. Τότε η τιμή $\sqrt{2}$ θα στρογγυλοποιηθεί στα 8, αντίστοιχα 16 δεκαδικά ψηφία, δηλαδή

$$\sqrt{2} \approx 1.414\,213\,56, \quad \text{αντίστοιχα} \quad \sqrt{2} \approx 1.4142\,1356\,2373\,0950.$$

Ο στρογγυλοποιημένης μορφής αριθμός $\sqrt{2}$, όταν πολλαπλασιαστεί, διαιρεθεί κ.λπ. με έναν άλλο στρογγυλοποιημένης μορφής αριθμό θα δώσει αποτέλεσμα με σφάλμα γενικά μεγαλύτερο από εκείνο χωρίς τις στρογγυλοποιήσεις. Λαμβάνοντας τώρα υπ' όψιν ότι κατά τη διαδικασία υπολογισμού της λύσης ενός προβλήματος γίνεται ένας μεγάλος αριθμός πράξεων, τα λάθη αυτά συσσωρεύονται (quantization error), με αποτέλεσμα η προκύπτουσα τελικά λύση να παρουσιάζει ένα μεγάλο σφάλμα σε σχέση με το αναμενόμενο θεωρητικά αποτέλεσμα. Λόγω της δομής των υπολογιστών τα σφάλματα αυτά δεν είναι δυνατόν να μηδενιστούν, αλλά μόνον να περιοριστούν με κατάλληλη ελαχιστοποίηση των υπολογισμών, κ.λπ.[4].

Τα παραπάνω σφάλματα είναι γνωστά και σαν **αριθμητικά σφάλματα** (numerical errors).

Κριτήρια διακοπής επαναλήψεων

Επειδή η διαδικασία $(1.1-3)$ δεν είναι δυνατόν να συνεχίζεται στο άπειρον, είναι φυσικό να αναζητηθούν κριτήρια τέτοια που να την σταματούν. Τα κυριότερα δίνονται στη συνέχεια.

I. **Έλεγχος του σφάλματος**: αν ο αριθμός ε με $\varepsilon > 0$ έχει εκλεγεί, έτσι ώστε να δείχνει την επιθυμητή ακρίβεια της μεθόδου, τότε τα σημαντικότερα κριτήρια είναι:

   i) $|x_i - x_{i-1}| < \varepsilon$. Το κριτήριο αυτό έχει το μειονέκτημα ότι πολλές φορές, ενώ η διαφορά $x_i - x_{i-1}$ συγκλίνει στο μηδέν, η ακολουθία x_i αποκλίνει,

   ii) $|f(x_i)| < \varepsilon$. Το κριτήριο αυτό έχει το μειονέκτημα ότι είναι δυνατόν η τιμή $f(x_i)$ να τείνει στο μηδέν, ενώ η τιμή x_i να είναι κατά πολύ διαφορετική από τη ρίζα x^*,

[4] Βλέπε βιβλιογραφία στο τέλος του μαθήματος.

iii)

$$\frac{|x_i - x_{i-1}|}{|x_i|} < \varepsilon \quad \text{με} \quad x_i \neq 0$$

που είναι και το περισσότερο χρησιμοποιούμενο κριτήριο.

II. **Κριτήριο διακοπής επαναλήψεων**: εφόσον ο υπολογισμός γίνεται με τη χρήση υπολογιστή, η διαδικασία $(1.1-3)$ πρέπει να σταματά, όταν ο αριθμός των επαναλήψεων υπερβεί έναν εκ των προτέρων καθορισμένο αριθμό επαναλήψεων, έστω N.

Στη συνέχεια του μαθήματος θα εξεταστούν οι πλέον γνωστές κλασικές μέθοδοι, ενώ για μια εκτενέστερη μελέτη ο αναγνώστης παραπέμπεται στη βιβλιογραφία στο τέλος του μαθήματος.

1.2 Μέθοδος του μέσου σημείου

Πρόκειται για την πρώτη ίσως μέθοδο προσέγγισης των ριζών μιας εξίσωσης και βασίζεται στο παρακάτω θεώρημα του Διαφορικού Λογισμού:

Θεώρημα 1.2 - 1 (Bolzano). *Αν μία συνάρτηση, έστω f, με πεδίο ορισμού $[a, b]$ είναι συνεχής για κάθε $x \in [a, b]$ και ισχύει $f(a)f(b) < 0$, τότε υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα της f, έστω ξ, με $\xi \in (a, b)$.*

Αν υποτεθεί ότι η ρίζα είναι **απλή**[5], ο προσδιορισμός της ρίζας είναι δυνατόν να γίνει σύμφωνα με τη διαδικασία του Αλγόριθμου 1.2 - 1.

Η μέθοδος αυτή είναι γνωστή σαν **μέθοδος του μέσου σημείου** η και **μέθοδος της διχοτόμου** (bisection method).

Παράδειγμα 1.2 - 1

Έστω η εξίσωση

$$f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$$

που έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $[1, 2]$ (Σχ. 1.2 - 1).

[5] Για πολλαπλή ρίζα βλέπε Άσκηση 4 στο τέλος της παραγράφου.

Αλγόριθμος 1.2 - 1 (μεθόδου του μέσου σημείου)

Δεδομένα: $a_1 = a, \quad b_1 = b$ και μέγιστος αριθμός επαναλήψεων N

Έστω $a_1 = a, \quad b_1 = b$

Για $i = 1, 2, \ldots, N$

$x_i = \dfrac{a_i + b_i}{2}$ Αν $f(x_i) = 0$ τύπωσε "ΡΙΖΑ" x_i STOP

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: το $f(x_i)$ θα πρέπει λόγω της υπόθεσης ότι η ρίζα είναι απλή

να έχει το ίδιο πρόσημο με το $f(a_i)$ ή το $f(b_i)$

Αν $f(x_i)\, f(a_i) > 0$ τότε η ρίζα $x^* \in (x_i, b_i)$,

οπότε $a_{i+1} = x_i$ και $b_{i+1} = b_i$

διαφορετικά $a_{i+1} = a_i$ και $b_{i+1} = x_i$

τέλος i

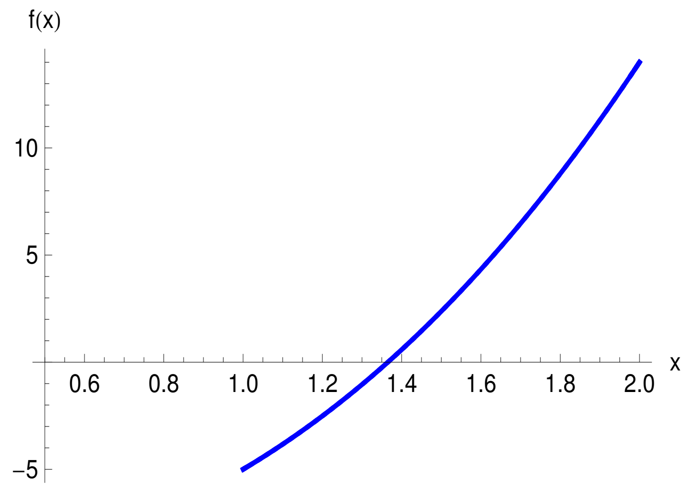
Τύπωσε "ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΡΙΖΑΣ" x_i

Η ρίζα της εξίσωσης με ακρίβεια 9 δεκαδικών ψηφίων υπολογίστηκε ότι είναι η $x^* = 1.365\,223\,0013$. Σύμφωνα με την παραπάνω διαδικασία έχουμε τα αποτελέσματα του Πίνακα 1.2 - 1 όπου ο συμβολισμός 1.0_-, αντίστοιχα 2.0_+ σημαίνει ότι $f(1.0) < 0$, αντίστοιχα $f(2.0) > 0$, κ.λπ.

Στο παρακάτω Πρόγραμμα 1.2 - 1 δίνεται ο τρόπος υπολογισμού της ρίζας του Παραδείγματος 1.2 - 1 με το MATHEMATICA.

Πρόγραμμα 1.2 - 1 (μεθόδου του μέσου σημείου)

```
f[x_]:=x^3+4x^2-10;                          ορισμός συνάρτησης
n=20;a=1;b=2;x=f[a]*f[b];
If[x>0,Print["No root in given interval"],
Print["i"," , ","a"," , ","b"," , ","x"," , ","f(x)"]];
Do[x=(a+b)/2;y=f[x];
If[y=0,Print["Root = ",x];i=n,Print[" "]];
Print[i," , ",N[a]," , ",N[b]," , ",N[x]," , ",N[f[x]]];
z=f[a]*f[x];
If[z<0,b=x,a=x],{i,1,n}]
```



Σχήμα 1.2 - 1: Παράδειγμα 1.2 - 1: διάγραμμα συνάρτησης $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$

Πίνακας 1.2 - 1: Παράδειγμα 1.2 - 1 αποτελέσματα μεθόδου μέσου σημείου

i	a_i	b_i	x_i	$f(x_i)$
1	1.0_-	2.0_+	1.5	2.375
2	1.0_-	1.5_+	1.25	-1.79687
3	1.25_-	1.5_+	1.375	0.16211
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
13	1.364990	1.365235	1.3651123	-0.00194
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
20	1.365229	1.365231	*1.365 229 607*	-6.717413×10^{-6}

Πίνακας 1.2 - 2: Παράδειγμα 1.2 - 2: αποτελέσματα μεθόδου μέσου σημείου για την εξίσωση $g(x) = x^5 - x^2 + 2x - 1 = 0$

i	a_i	b_i	x_i	$g(x_i)$
1	0.0_-	1.0_+	0.5	-0.21875
2	0.5_-	1.0_+	0.75	0.1748047
3	0.5_-	0.75_+	0.625	-0.04525757
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
20	0.6540451	0.654047	*0.654 046 0587*	1.405212×10^{-6}

Παράδειγμα 1.2 - 2

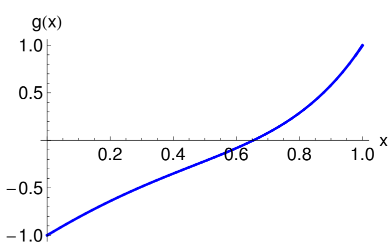
Όμοια των εξισώσεων

$$g(x) = x^5 - x^2 + 2x - 1 = 0 \quad (\Sigma\chi.\ 1.2\ \text{-}\ 2a),$$

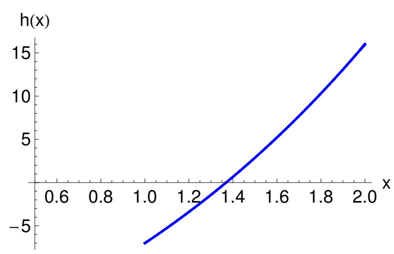
αντίστοιχα

$$h(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0 \quad (\Sigma\chi.\ 1.2\ \text{-}\ 2b)$$

που έχουν μία ρίζα στα διαστήματα $[0, 1]$, αντίστοιχα $[1, 2]$, ενώ τα αποτελέσματα της μεθόδου δίνονται στους Πίνακες 1.2 - 2 και 1.2 - 3.



(a)



(b)

Σχήμα 1.2 - 2: Παράδειγμα 1.2 - 2: (a) διάγραμμα συνάρτησης $g(x) = x^5 - x^2 + 2x - 1$ και (b) $h(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$

Πίνακας 1.2 - 3: Παράδειγμα 1.2 - 2: αποτελέσματα μεθόδου μέσου σημείου για την εξίσωση $h(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$

i	a_i	b_i	x_i	$h(x_i)$
1	1.0_{-}	1.5_{+}	1.25	2.875
2	1.0_{-}	1.5_{+}	1.25	-2.421875
3	1.25_{-}	1.5_{+}	1.375	0.1308594
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
20	1.368807	1.368809	*1.368 807 793*	-6.648612×10^{-6}

Παρατήρηση 1.2 - 1

Αν και η σύγκλιση στη ρίζα μιας εξίσωσης με τη μέθοδο του μέσου σημείου είναι πολύ αργή, συμπέρασμα που άλλωστε άμεσα προκύπτει και από τις τιμές της συνάρτησης στα σημεία x_i στους Πίνακες 1.2 - 1-1.2 - 3, η μέθοδος χρησιμοποιείται σε πολλές εφαρμογές, και κυρίως σε συνδυασμό με ταχύτερες άλλες μεθόδους που θα εξεταστούν στη συνέχεια, για να δώσει μία αρχική τιμή σε αυτές.

1.2.1 Υπολογισμός φράγματος

Δίνεται τώρα ο υπολογισμός του φράγματος των τιμών x_i της μεθόδου με τη βοήθεια του παρακάτω θεωρήματος.

Θεώρημα 1.2 - 2 (μεθόδου του μέσου σημείου). *Έστω η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $[a, b]$ που είναι συνεχής για κάθε $x \in [a, b]$ και ισχύει $f(a)f(b) < 0$. Τότε για την ακολουθία x_i; $i = 1, 2, \ldots$, που δημιουργείται με τη μέθοδο του μέσου σημείου, ισχύει*

$$|x_i - x^*| \leq \frac{b-a}{2^i}\,; \quad i = 1, 2, \ldots . \tag{1.2 - 1}$$

Εφαρμόζοντας τη σχέση $(1.2 - 1)$ στο Παράδειγμα 1.2 - 1, προκύπτει

$$|x_{20} - x^*| \leq \frac{2-1}{2^{20}} \approx 9.536\,743 \times 10^{-7}.$$

Στην πραγματικότητα το σφάλμα είναι πολύ μικρότερο, επειδή, όπως προκύπτει από τα αποτελέσματα του Πίνακα 1.2 - 1, είναι

$$|x_{20} - x^*| = |1.365\,230\,013 - 1.365\,234\,375| \approx 4.064\,141 \times 10^{-7}.$$

Υπολογισμός επαναλήψεων

Τις περισσότερες φορές η $(1.2 - 1)$ χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό του απαραίτητου αριθμού επαναλήψεων, προκειμένου να έχουμε μία επιθυμητή ακρίβεια, έστω ε.

Παράδειγμα 1.2 - 3

Έστω το Παράδειγμα 1.2 - 1 στο οποίο ζητείται η λύση να παρουσιάζει ακρίβεια $\varepsilon = 10^{-9}$. Τότε έχουμε

$$|x_i - x^*| \leq \frac{b-a}{2^i} = 2^{-i} < 10^{-9}, \quad \text{οπότε} \quad 2^i > 10^9.$$

Λογαριθμίζοντας την τελευταία ανισότητα με βάση το 10 τελικά προκύπτει ότι $i > 9/\log_{10} 2 \approx 29.89735$, που σημαίνει ότι απαιτούνται τουλάχιστον 30 επαναλήψεις για να προκύψει προσέγγιση της ρίζας με σφάλμα μικρότερο του ε.

Θα πρέπει να τονιστεί στο σημείο αυτό ότι το φράγμα που δίνεται από την ανισότητα $(1.2 - 1)$ είναι απλά ενδεικτικό και, όταν χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό των απαραίτητων επαναλήψεων, δίνει στην πράξη αριθμούς κατά πολύ μεγαλύτερους.

Ασκήσεις

1. Με τη μέθοδο του μέσου σημείου να προσδιοριστεί η λύση της εξίσωσης

$$x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 4x + 4 = 0$$

στο διάστημα $[0, 2]$, όταν $\varepsilon = 10^{-2}$.

2. Θεωρώντας την εξίσωση $x^5 - 7 = 0$, προσδιορίστε κατά προσέγγιση τη ρίζα $7^{1/5}$, όταν $\varepsilon = 10^{-4}$.

3. Να υπολογιστεί ο απαιτούμενος αριθμός των επαναλήψεων, έτσι ώστε ο προσδιορισμός της ρίζας της εξίσωσης $x^3 - x - 1 = 0$ στο διάστημα $[1, 2]$ να παρουσιάζει ακρίβεια $\varepsilon = 10^{-4}$. Στη συνέχεια να υπολογιστεί η ρίζα αυτή.

4. Δείξτε ότι το Θεώρημα 1.2 - 1 δεν εφαρμόζεται, όταν η ρίζα είναι πολλαπλή άρτιας τάξης.

5. Να γραφεί πρόγραμμα αντίστοιχο του Προγράμματος 1.2 - 1 με το MATLAB.

1.3 Μέθοδος των διαδοχικών προσεγγίσεων

Έστω η εξίσωση $f(x) = 0$ που γράφεται στη μορφή

$$x = g(x) \tag{1.3 - 1}$$

όπου η g θεωρείται ότι είναι μία συνεχής συνάρτηση. Η g στην περίπτωση αυτή λέγεται και **επαναληπτική συνάρτηση**.

Αν x^* είναι μία ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$, επειδή $f(x) = x - g(x)$, θα πρέπει $f(x^*) = x^* - g(x^*) = 0$, δηλαδή $g(x^*) = x^*$. Τότε η ρίζα x^* λέγεται **σταθερό σημείο** της $g(x)$.

Θεωρώντας τώρα μία **αρχική τιμή**, έστω x_0, η ακολουθία $g(x_i)$ στην $(1.1 - 3)$ προκύπτει από την $(1.3 - 1)$ και είναι της μορφής

$$x_{i+1} = g(x_i)\,; \quad i = 0,\, 1,\, \ldots\,. \tag{1.3 - 2}$$

Επειδή η g είναι συνεχής, αν η ακολουθία συγκλίνει, θα πρέπει

$$g(x^*) = \lim_{i \to +\infty} g(x_i) = \lim_{i \to +\infty} x_{i+1} = x^*,$$

οπότε το x^* θα είναι ένα σταθερό σημείο της συνάρτησης g και κατά συνέπεια η ζητούμενη ρίζα της f.

Η μέθοδος αυτή του προσδιορισμού της ρίζας μιας εξίσωσης είναι γνωστή σαν η **μέθοδος των διαδοχικών προσεγγίσεων** (fixed point iteration) και περιγράφεται στον Αλγόριθμο 1.3 - 1. Υπενθυμίζεται στο σημείο αυτό ότι, όπως και στη μέθοδο του μέσου σημείου, ανάλογα κριτήρια διακοπής των επαναλήψεων ισχύουν και στην περίπτωση της μεθόδου των διαδοχικών προσεγγίσεων.

Αλγόριθμος 1.3 - 1 (μεθόδου των διαδοχικών προσεγγίσεων)

Δεδομένα: αρχική τιμή x_0, ακρίβεια ε
μέγιστος αριθμός επαναλήψεων N
Για $i = 1, 2, \ldots, N$
  $x = g(x_0)$
  αν $f(x) = 0$ ή $|x_1 - x_0| < \varepsilon$ τύπωσε x STOP
  $x_0 = x$
τέλος i
Τύπωσε "ΜΕΘΟΔΟΣ ΜΗ ΑΚΡΙΒΗΣ"

Σημείωση 1.3 - 1

Στις εφαρμογές και τις ασκήσεις του μαθήματος θα δίνονται η επαναληπτική συνάρτηση $g(x)$ και η αρχική τιμή x_0.

Παράδειγμα 1.3 - 1

Έστω η εξίσωση[6]

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$$

που γράφεται $x\left(x^2 + 2x + 10\right) = 20$, οπότε σύμφωνα με τον τύπο $(1.3 - 1)$ θα έχουμε

$$x = g(x) = \frac{20}{x^2 + 2x + 10}\,. \qquad (1.3 \text{ - } 3)$$

Τότε από την (1.3−3) σε συνδυασμό με την (1.3−2) προκύπτει η επαναληπτική σχέση

$$x_{i+1} = \frac{20}{x_i^2 + 2x_i + 10}; \quad i = 0, 1, \ldots\,. \qquad (1.3 \text{ - } 4)$$

[6] Βλέπε Παράδειγμα 1.2 - 2 εξίσωση $h(x) = 0$.

Πίνακας 1.3 - 1: Παράδειγμα 1.3 - 1: αποτελέσματα μεθόδου διαδοχικών προσεγγίσεων

i	x_i	i	x_i
1	1.538 461 538	11	1.368 857 688
2	1.295 019 157	12	1.368 786 102
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
10	1.368 696 397	20	*1.368 808 075*

Αν $x_0 = 1$ η αρχική τιμή, τότε από την $(1.3 - 4)$ διαδοχικά έχουμε

$$\text{για} \quad i = 0; \quad x_{0+1} = x_1 = \frac{20}{x_0^2 + 2x_0 + 1} = \frac{20}{1^2 + 2 * 1 + 10} \approx 1.538\,461\,538$$

$$i = 1; \quad x_{1+1} = x_2 = \frac{20}{x_1^2 + 2x_1 + 1} = \frac{20}{1.538\,461\,538^2 + 2 * 1.538\,461\,538 + 10} \approx 1.295\,019\,157$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

Από τα αποτελέσματα που δίνονται στον Πίνακα 1.3 - 1, προκύπτει ότι η ζητούμενη ρίζα με ακρίβεια 9 δεκαδικών ψηφίων στην 20η επανάληψη είναι η $x = 1.368\,808\,075$. Η θεωρητική ρίζα της εξίσωσης με προσέγγιση 9 δεκαδικών ψηφίων υπολογίστηκε ότι είναι η $x^* = 1.368\,808\,108$. Άρα υπάρχει σφάλμα $|x^* - x| = 3.3 \times 10^{-8}$. Το σφάλμα αυτό είναι μικρότερο από το αντίστοιχο σφάλμα 3.15×10^{-7} της μεθόδου του μέσου σημείου (βλέπε Παράδειγμα 1.2 - 2 Πίνακας 1.2 - 3).

Ο υπολογισμός της λύσης του Παραδείγματος 1.3 - 1 με το MATHEMATICA δίνεται στο Πρόγραμμα 1.3 - 1 και με το MATLAB στο 1.3 - 2.

Πρόγραμμα 1.3 - 1 (MATHEMATICA)

```
f[x_]:=20/(x^2+2x+10);
n=20;x=1;Print["i"," , ","x_i"];
Do[y=f[x]; Print[i," , ",N[y,10]];x=y,{i,1,n}]
```

Πρόγραμμα 1.3 - 2 (MATLAB)

```
>> x=1;
>> for i=1:20
>> y=20/(x^2+2*x+10);
>> x=y;
>> format long
>> y
>> end
```

Παράδειγμα 1.3 - 2

Έστω η εξίσωση

$$g(x) = x^2 - 4x + 3 = 0 \quad \text{με ρίζες τις} \quad x_1 = 1 \quad \text{και} \quad x_2 = 3. \qquad (1.3\text{ - }5)$$

Ένας τρόπος υπολογισμού των ριζών με τη μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων είναι να γραφεί η εξίσωση $(1.3-5)$ σύμφωνα με τον τύπο $(1.3-1)$ σε μια από τις παρακάτω τέσσερις μορφές:

$$g_1(x) = \sqrt{3-4x}\,, \quad g_2(x) = \frac{3}{4-x}\,, \quad g_3(x) = \frac{x^2+3}{4}\,, \quad g_4(x) = \frac{x^2-3}{2(x-2)}\,.$$

Από τις παραπάνω μορφές σύμφωνα με την $(1.3-2)$ έχουμε τις επαναληπτικές σχέσεις

$$x_1^{i+1} = g_1\left(x_1^i\right) = \sqrt{4x_1^i - 3}\,, \qquad x_2^{i+1} = g_2\left(x_2^i\right) = \frac{3}{4-x_2^i}\,,$$

$$x_3^{i+1} = g_3\left(x_3^i\right) = \frac{\left(x_3^i\right)^2+3}{4}\,, \qquad x_4^{i+1} = g_4\left(x_4^i\right) = \frac{\left(x_4^i\right)^2-3}{2\left(x_4^i-2\right)}\,.$$

Θεωρώντας και για τις τρεις σχέσεις σαν αρχική τιμή την $x_0 = 4.5$, έχουμε τα αποτελέσματα του Πίνακα 1.3 - 2. Είναι προφανές ότι η ακολουθία g_1 συγκλίνει αργά στη ρίζα 3, η g_2 όμοια αργά στη ρίζα 1, η g_3 αποκλίνει, ενώ η g_4 συγκλίνει γρήγορα στη ρίζα 3.

Πίνακας 1.3 - 2: Παράδειγμα 1.3 - 2: αποτελέσματα εφαρμογής μεθόδου διαδοχικών προσεγγίσεων στις μορφές x_k^i; $k = 1,\ 2,\ 3,\ 4$.

i	x_1^i	x_2^i	x_3^i	x_3^i
1	3.317	6.000	3.813	3.083
2	3.204	-1.500	4.384	3.003
3	3.133	0.546	5.554	3.000
4	3.087	0.868	8.463	3.000
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
10	3.007	1.000	1.155×10^{22}	3.000

Ασκήσεις

1. Έστω η εξίσωση $x^4 + 2x^2 - x - 3 = 0$ που γράφεται ως:

$i)\quad x = \left(3 + x - 2x^2\right)^{1/4}$ $\qquad iii)\quad x = \left[\left(3 + x - x^4\right)/2\right]^{1/2}$

$ii)\quad x = \left(\dfrac{3 + x}{x^2 + 2}\right)^{1/2}$ $\qquad iv)\quad x = \dfrac{3x^4 + 2x^2 + 3}{4x^3 + 4x - 1}.$

Αν $x_0 = 1$, για κάθε περίπτωση να οριστεί η αντίστοιχη επαναληπτική σχέση και σύμφωνα με αυτή να υπολογιστεί ο όρος x_5. Ποια μορφή προσεγγίζει καλύτερα τη ρίζα της εξίσωσης;

5. Για να υπολογιστεί η $7^{1/5}$, θεωρείται η εξίσωση $x^5 - 7 = 0$ από την οποία προκύπτουν οι επαναληπτικές σχέσεις:

$i)\quad x_{i+1} = \left(1 + \dfrac{7 - x_i^3}{x_i^2}\right)^{1/2}$ $\qquad iii)\quad x_{i+1} = x_i - \dfrac{x_i^5 - 7}{5x_i^4}$

$ii)\quad x_{i+1} = x_i - \dfrac{x_i^5 - 7}{x_i^2}$ $\qquad iv)\quad x_{i+1} = x_i - \dfrac{x_i^5 - 7}{12}.$

Αν $x_0 = 1$, να ταξινομηθούν οι παραπάνω σχέσεις βάσει της ταχύτητας σύγκλισής τους.

3. Δείξτε ότι η εξίσωση $x - 2^{-x} = 0$ έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $[1/3, 1]$ την οποία και να προσδιορίσετε με ακρίβεια $\varepsilon = 10^{-4}$.

1.4 Μέθοδος του Newton

Η μέθοδος των Newton-Raphson[7] ή απλά μέθοδος του Newton[8] είναι η πλέον γνωστή και η περισσότερο χρησιμοποιούμενη μέθοδος υπολογισμού των ριζών της εξίσωσης $f(x)=0$.

Υπάρχουν πολλοί τρόποι παρουσίασης της μεθόδου, όπως μέσω της γραφικής παράστασης της συνάρτησης ή όπως κυρίως συνηθίζεται με το πολυώνυμο του Taylor. Έστω ότι η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού $[a,b]$ έχει παραγώγους μέχρι και δεύτερης τάξης συνεχείς συναρτήσεις στο $[a,b]$. Αν $\xi \in [a,b]$, τότε από τον τύπο του Taylor έχουμε

$$f(x) \approx f(\xi) + (x-\xi)f'(\xi) + \frac{(x-\xi)^2}{2}f''(\xi).$$

Υποθέτοντας ότι η τιμή $x = x^*$ είναι ρίζα της f, δηλαδή $f\left(x^*\right)=0$, η παραπάνω σχέση γράφεται

$$0 = f(\xi) + \left(x^*-\xi\right)f'(\xi) + \frac{\left(x^*-\xi\right)^2}{2}f''\left(\xi\right). \qquad (1.4 - 1)$$

Η μέθοδος του Newton προκύπτει από την $(1.4-1)$ θεωρώντας ότι ο αριθμός $|x^*-\xi|$ είναι πολύ μικρός, οπότε ο όρος $\left(x^*-\xi\right)^2$ είναι δυνατόν να παραλειφθεί. Τότε

$$0 \approx f(\xi) + \left(x^*-\xi\right)f'(\xi)$$

που, όταν λυθεί ως προς x^*, δίνει

$$x^* \approx \xi - \frac{f(\xi)}{f'(\xi)}. \qquad (1.4 - 2)$$

Η $(1.4-2)$, που είναι της μορφής $(1.3-1)$, δηλαδή $x=g(x)$, όταν συνδυαστεί με την $(1.3-2)$, ορίζει την παρακάτω επαναληπτική σχέση

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f\left(x_i\right)}{f'\left(x_i\right)}; \quad i = 0,\, 1,\, \ldots \qquad (1.4 - 3)$$

[7]JOSEPH RAPHSON (1648-1715): Άγγλος μαθηματικός, γνωστός για την ομώνυμη μέθοδο.

[8]Sir ISAAC NEWTON (1643-1727): Άγγλος φυσικός και μαθηματικός που θεωρείται σαν ένας από τους σημαντικότερους επιστήμονες στην ιστορία της ανθρωπότητας. Το έργο του Principia, που δημοσιεύτηκε το 1687, θεωρείται θεμελιώδες στο χώρο των θετικών επιστημών. Στη φυσική μεταξύ των άλλων διατύπωσε τους νόμους της βαρύτητας, ενώ στα μαθηματικά μαζί με τον Leibniz συνέβαλε στη θεμελίωση του διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού, ανέπτυξε την ομώνυμη προσεγγιστική μέθοδο που δημοσιεύτηκε το 1685 κ.λπ.

Αλγόριθμος 1.4 - 1 (μεθόδου του Newton)

> Δεδομένα: αρχική τιμή x_0, ακρίβεια ε
>
> μέγιστος αριθμός επαναλήψεων N
>
> Για $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ N$
>
> $\quad x = x_0 - \dfrac{f\,(x_0)}{f'\,(x_0)}$
>
> $\quad$ αν $f(x) = 0$ ή $|x_1 - x_0| < \varepsilon$ τύπωσε x STOP
>
> $\quad x_0 = x$
>
> τέλος i
>
> Τύπωσε "ΜΕΘΟΔΟΣ ΜΗ ΑΚΡΙΒΗΣ"

προσδιορισμού της ρίζας x^* της εξίσωσης $f(x) = 0$. Η μέθοδος αυτή είναι γνωστή σαν **μέθοδος του Newton** και περιγράφεται στον Αλγόριθμο 1.4 - 1.

Σημειώσεις 1.4 - 1

i) Στις εφαρμογές και τις ασκήσεις του μαθήματος θα δίνεται η αρχική τιμή x_0.

ii) Τα κριτήρια διακοπής των επαναλήψεων των παραγράφων 1.2 και 1.3 ισχύουν και στην περίπτωση της μεθόδου του Newton.

Παράδειγμα 1.4 - 1

Έστω η εξίσωση (βλέπε Παραδείγματα 1.2 - 2 και 1.3 - 1)

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0.$$

Τότε $f'(x) = 3x^2 + 4x + 10$, οπότε από τον τύπο $(1.4 - 3)$ προκύπτει

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i - \frac{x_i^3 + 2x_i^2 + 10x_i - 20}{3x_i^2 + 4x_i + 10} \\ &= \frac{2\left(x_i^3 + x_i^2 + 10\right)}{3x_i^2 + 4x_i + 10}\,; \quad i = 0,\ 1,\ \ldots\,. \end{aligned} \qquad (1.4 - 4)$$

Πίνακας 1.4 - 1: Παράδειγμα 1.4 - 1: αποτελέσματα μεθόδου Newton με αρχική τιμή $x_0 = 1$

i	x_i	i	x_i
0	1.411 764 706	3	1.368 808 108
1	1.369 336 471	4	*1.368 808 108*
2	1.368 808 189		

Αν $x_0 = 1$ η αρχική τιμή, τότε από την $(1.4 - 4)$ διαδοχικά έχουμε

$$\begin{aligned} \text{για} \quad i = 0; \quad x_{0+1} = x_1 \quad &= \frac{2\left(x_0^3 + x_0^2 + 10\right)}{3x_0^2 + 4x_0 + 10} \\ &= \frac{2\left(1^3 + 1^2 + 10\right)}{3 * 1^2 + 4 * 1 + 10} \approx 1.411\,764\,706 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i = 1; \quad x_{1+1} = x_2 \quad &= \frac{2\left(x_1^3 + x_1^2 + 10\right)}{3x_1^2 + 4x_1 + 10} = \cdots \approx 1.369\,336\,471 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad & \quad \vdots \end{aligned}$$

Από τα αποτελέσματα των παραπάνω υπολογισμών, που δίνονται στον Πίνακα 1.4 - 1, προκύπτει ότι η ζητούμενη ρίζα με ακρίβεια 9 δεκαδικών ψηφίων στην 4η επανάληψη είναι η $x = 1.368\,808\,075$. Η τιμή αυτή είχε υπολογιστεί στην 20η επανάληψη στο Παράδειγμα 1.3 - 1. Επειδή η θεωρητική ρίζα της εξίσωσης με προσέγγιση 9 δεκαδικών ψηφίων είναι η $x^* = 1.368\,808\,108$, υπάρχει σφάλμα $|x^* - x| = 3.3 \times 10^{-8}$. Το σφάλμα αυτό είναι μικρότερο από το αντίστοιχο σφάλμα 3.15×10^{-7} της μεθόδου του μέσου σημείου (βλέπε Παράδειγμα 1.2 - 2 Πίνακας 1.2 - 3).

Η παραπάνω διαδικασία επαναλήφθηκε με αρχική τιμή $x_0 = 1.375$, που έχει προκύψει από την 3η επανάληψη της μεθόδου του μέσου σημείου (βλέπε Παράδειγμα 1.2 - 2 Πίνακας 1.2 - 2) και τα αποτελέσματα δίνονται στον Πίνακα 1.4 - 2, σύμφωνα με τα οποία προκύπτει ότι η ζητούμενη ρίζα με ακρίβεια 6 δεκαδικών ψηφίων στην 2η επανάληψη είναι η $x = 1.368\,808$ (η αύξηση της ακρίβειας υπολογισμού της ρίζας δεν μετέβαλε το αποτέλεσμα). Αυτό επιβεβαιώνει την Παρατήρηση 1.2 - 1.

Πίνακας 1.4 - 2: Παράδειγμα 1.4 - 1: αποτελέσματα μεθόδου Newton με αρχική τιμή $x_0 = 1.375$

i	x_i
0	1.368 819
1	1.368 808
2	*1.368 808*

Πίνακας 1.4 - 3: Παράδειγμα 1.4 - 2: αποτελέσματα μεθόδου Newton

i	x_i	i	x_i
0	2.25	3	2.236 067 977
1	2.236 111 111	4	*2.236 067 977*
2	2.236 067 978		

Υπολογισμός τετραγωνικής ρίζας

Ο υπολογισμός της τετραγωνικής ρίζας ενός θετικού αριθμού, έστω A, είναι ισοδύναμος με την εύρεση της θετικής ρίζας της εξίσωσης $f(x) = x^2 - A = 0$. Τότε, επειδή $f'(x) = 2x$, από τον τύπο $(1.4 - 3)$ προκύπτει

$$x_{i+1} = \frac{1}{2}\left(x_i + \frac{A}{x_i}\right) \; ; \quad i = 0,\, 1,\, \ldots \, . \tag{1.4 - 5}$$

Παράδειγμα 1.4 - 2

Έστω ότι ζητείται ο υπολογισμός της $\sqrt{5}$. Τότε σύμφωνα με τον τύπο (1.4—5) είναι $A = 5$, οπότε, αν $x_0 = 2$, προκύπτουν τα αποτελέσματα του Πίνακα 1.4 - 3. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα αυτά στην 4η επανάληψη έχουμε ακρίβεια 9 δεκαδικών ψηφίων.

Στο Πρόγραμμα 1.4 - 1, αντίστοιχα Πρόγραμμα 1.4 - 2 δίνεται η λύση του Παραδείγματος 1.4 - 2 με το MATHEMATICA, αντίστοιχα MATLAB εφαρμόζοντας το γενικό τύπο $(1.4 - 6)$.

Πρόγραμμα 1.4 - 1 (MATHEMATICA)

```
f[x_]:=((n-1)x+a/x^(n-1))/n;          ορισμός τύπου
n=2;a=2;x=1;m=4;                      m αριθμός επαναλήψεων
Print["i"," , ","x_i"];
Do[y=f[x];Print[i," , ",N[y,10]];x=y,{i,1,m}]
```

Πρόγραμμα 1.4 - 2 (MATLAB)

```
>> n=2;a=2;x=1;
>> for i=1:4
>> y=((n-1)*x+a/x^(n-1))/n;
>> x=y;
>> format long
>> y
>> end
```

Υπολογισμός ν - τάξης ρίζας

Η παραπάνω διαδικασία εφαρμόζεται επίσης και στον υπολογισμό της ν-τάξης ρίζας του αριθμού A με την εξίσωση $f(x) = x^{\nu} - A = 0$. Τότε $f'(x) = \nu x^{\nu-1}$, οπότε έχουμε την επαναληπτική σχέση

$$x_{i+1} = \frac{1}{\nu}\left[(\nu-1)x_i + \frac{A}{x_i^{\nu-1}}\right]\,; \quad i = 0,\, 1,\, \ldots\,. \tag{1.4 - 6}$$

Σημειώσεις 1.4 - 2

i) Μεγάλη σημασία για τη σύγκλιση της μεθόδου του Newton έχει η κατάλληλη εκλογή της αρχικής τιμής x_0, κάτι που έγινε εμφανές στη θεωρητική απόδειξη του τύπου $(1.4-3)$, όταν θεωρήθηκε ότι ο όρος $(x^* - \xi)^2$ είναι αρκούντως μικρός, έτσι ώστε να είναι δυνατόν να παραλειφθεί. Έχει παρατηρηθεί ότι η μη σωστή εκλογή της αρχικής τιμής x_0 είναι δυνατόν να οδηγήσει σε απόκλιση της μεθόδου.

ii) Αποδεικνύεται ότι η μέθοδος του Newton συγκλίνει τετραγωνικά στη ρίζα x^*, όταν έχει γίνει κατάλληλη εκλογή της αρχικής τιμής x_0 και $f'(x^*) \neq 0$ (βλέπε Ορισμό 1.1 - 3).

iii) Ένα μεγάλο μειονέκτημα της μεθόδου του Newton είναι η γνώση της παραγώγου $f'(x)$ της συνάρτησης που, όπως είναι γνωστό στον αναγνώστη από προβλήματα των εφαρμογών, η παράγωγος αυτή τις περισσότερες φορές είναι δύσκολο ή και αδύνατον να υπολογιστεί. Στις περιπτώσεις αυτές υπάρχουν άλλες μέθοδοι λύσης του προβλήματος, οι οποίες χρησιμοποιούν τον κατά προσέγγιση υπολογισμό της παραγώγου, μία των οποίων δίνεται στη συνέχεια.

1.4.1 Μέθοδος των χορδών

Σύμφωνα με τον ορισμό της παραγώγου έχουμε ότι

$$f'\left(x_i\right) = \lim_{x \to x_i} \frac{f(x) - f\left(x_i\right)}{x - x_i} .$$

Έστω ότι $x = x_{i-1}$. Τότε η παραπάνω σχέση γράφεται

$$f'\left(x_i\right) \approx \frac{f\left(x_{i-1}\right) - f\left(x_i\right)}{x_{i-1} - x_i} = \frac{f\left(x_i\right) - f\left(x_{i-1}\right)}{x_i - x_{i-1}} ,$$

οπότε, αντικαθιστώντας στην $(1.4 - 3)$, προκύπτει

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f\left(x_i\right)\left(x_i - x_{i-1}\right)}{f\left(x_i\right) - f\left(x_{i-1}\right)} \quad \text{για κάθε} \quad i = 1,\, 2,\, \ldots\, . \tag{1.4 - 7}$$

Η μέθοδος που ορίζεται από την $(1.4 - 7)$ είναι γνωστή σαν η **μέθοδος των χορδών** (secant method) και η εφαρμογή της απαιτεί **δύο αρχικές τιμές**. Η μέθοδος περιγράφεται στον Αλγόριθμο 1.4 - 2.

Παράδειγμα 1.4 - 3

Έστω η εξίσωση

$$f(x) = \cos x - x = 0 \quad \text{με αρχικές τιμές} \quad x_0 = 0.5 \quad \text{και} \quad x_1 = \frac{\pi}{4} .$$

Τότε η $(1.4 - 7)$ γράφεται

$$x_{i+1} = x_i - \frac{\left(\cos x_i - x_i\right)\left(x_i - x_{i-1}\right)}{\left(\cos x_i - x_i\right) - \left(\cos x_{i-1} - x_{i-1}\right)} \quad \text{για κάθε } i = 1,\, 2,\, \ldots\, ,$$

από την οποία προκύπτουν τα αποτελέσματα του Πίνακα 1.4 - 4 όπου ο όρος x_5 δίνει ακρίβεια 7 δεκαδικών ψηφίων, ενώ η ακρίβεια αυτή συνέβαινε στον όρο x_3 του Πίνακα 1.4 - 1.

Αλγόριθμος 1.4 - 2 (μεθόδου των χορδών)

Δεδομένα: αρχικές τιμές $x_0,\ x_1$ ακρίβεια ε

μέγιστος αριθμός επαναλήψεων N

$y_0 = f(x_0)\,,\ \ y_1 = f(x_1)$

Για $i = 1, 2, \ldots, N$

$$x = x_1 - \frac{y_1 (x_1 - x_0)}{y_1 - y_0}$$

αν $f(x) = 0$ ή $|y_1 - y_0| < \varepsilon,$ τύπωσε x STOP

$x_0 = x_1,\ y_0 = y_1$

τέλος i

Τύπωσε "ΜΕΘΟΔΟΣ ΜΗ ΑΚΡΙΒΗΣ"

Πίνακας 1.4 - 4: Παράδειγμα 1.4 - 3: αποτελέσματα μεθόδου των χορδών

i	x_i	i	x_i
0	0.5	3	0.739 058 1394
1	0.785 398 1635	4	0.739 085 1492
2	0.736 384 1390	5	*0.739 085 1334*

Σημείωση 1.4 - 1

Αποδεικνύεται ότι η μέθοδος των χορδών συγκλίνει πιο αργά σε σύγκριση με τη μέθοδο του Newton. Σαν συμπέρασμα είναι δυνατόν να γραφεί ότι η μέθοδος του Newton σαν ταχύτερη ή η μέθοδος των χορδών τελικά είναι εκείνες που χρησιμοποιούνται στη λύση των περισσότερων προβλημάτων, όταν υπάρχουν ακριβείς αρχικές τιμές. Αυτές οι αρχικές τιμές συνήθως υπολογίζονται ή από τη μέθοδο του μέσου σημείου ή από τη μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων.

1.4.2 Άλλες μορφές της μεθόδου του Newton

Στη συνέχεια εξετάζεται η μέθοδος του Newton για την περίπτωση όπου η ρίζα x^* της εξίσωσης $f(x)=0$ είναι πολλαπλή. Υπενθυμίζεται ότι:

Ορισμός 1.4 - 1. *Μία ρίζα x^* της $f(x)=0$ θα έχει πολλαπλότητα p, όταν*

$$f\left(x^*\right)=f'\left(x^*\right)=\ldots=f^{(p-1)}\left(x^*\right)=0 \quad \textit{και} \quad f^{(p)}\left(x^*\right)\neq 0. \qquad (1.4 - 8)$$

Σύμφωνα με τον ορισμό η ρίζα $x^*=1$ της εξίσωσης $f(x)=(x-1)^2=0$ έχει πολλαπλότητα $p=2$, ενώ η ρίζα $x^*=-2$ της $g(x)=(x+2)^3=0$ έχει $p=3$.

Στην περίπτωση ύπαρξης πολλαπλής ρίζας για τη σύγκλιση της μεθόδου του Newton ισχύει:

Πρόταση 1.4 - 1. *Αν η x^* είναι μία ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ με πολλαπλότητα p, τότε η μέθοδος του Newton συγκλίνει γραμμικά στη ρίζα x^* με ασυμπτωτική σταθερά λάθους $(p-1)/p$.*

Παράδειγμα 1.4 - 4

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο του Newton στις εξισώσεις

$$f_1(x)=x^2-1=0 \quad \text{με ρίζες} \quad x^*=1,\,-1$$

και

$$f_2(x)=(x-1)^2 \quad \text{με ρίζα} \quad x^*=1 \quad \text{πολλαπλότητας} \quad p=2,$$

Πίνακας 1.4 - 5: Παράδειγμα 1.4 - 4: αποτελέσματα μεθόδου του Newton

$f_1(x_i)$	i	$f_2(x_i)$
2.0	0	2.0
1.25	1	1.5
1.025	2	1.25
1.000 304	3	1.125
1.0	4	1.0625
	5	*1.03125*

όταν η αρχική τιμή είναι και στις δύο περιπτώσεις $x_0 = 2$, προκύπτουν τα αποτελέσματα του Πίνακα 1.4 - 5. Είναι προφανές ότι η σύγκλιση στη ρίζα 1 της εξίσωσης $f_1(x) = 0$ είναι ταχύτερη (τετραγωνική) από τη σύγκλιση της $f_2(x) = 0$ που είναι γραμμική με ασυμπτωτική σταθερά λάθους 1/2.

Μέθοδος του Schrôder

Στην περίπτωση πολλαπλής ρίζας είναι δυνατόν να έχουμε επίσης **τετραγωνική σύγκλιση**, όταν χρησιμοποιηθεί η επαναληπτική σχέση

$$x_{i+1} = x_i - p\,\frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \tag{1.4 - 9}$$

που είναι γνωστή και σαν **μέθοδος του Schrôder**, όταν p είναι η πολλαπλότητα της ρίζας της εξίσωσης $f(x) = 0$ όπου υποτίθεται ότι υπάρχει η $f^{(3)}(x)$ και είναι συνεχής συνάρτηση σε ένα ανοικτό διάστημα, έστω D, που περιέχει τη ρίζα x^*.

Τροποποιημένη μέθοδος του Newton

Τελικά μία μέθοδος που εφαρμόζεται τόσο στην περίπτωση της απλής όσον και της πολλαπλής ρίζας, έστω x^*, είναι εκείνη η οποία στηρίζεται στον υπολογισμό με κάποια επαναληπτική μέθοδο της ρίζας της συνάρτησης $\tilde{f}(x) = f(x)/f'(x)$. Ο υπολογισμός της ρίζας της $\tilde{f}$ στην περίπτωση αυτή, όταν χρησιμοποιηθεί η μέθοδος του Newton, γίνεται από την επαναληπτική σχέση

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i) f'(x_i)}{[f'(x_i)]^2 - f(x_i) f''(x_i)}; \quad i = 0, 1, \ldots . \qquad (1.4 - 10)$$

Η μέθοδος αυτή που είναι γνωστή σαν η **τροποποιημένη μέθοδος του Newton** (modified Newton's method), εκτός από τον αυξημένο αριθμό πράξεων, έχει και το πρόβλημα του υπολογισμού της δεύτερης τάξης παραγώγου της f. Γενικά η μέθοδος αυτή παρουσιάζει μεγάλα σφάλματα στρογγυλοποίησης, κυρίως όταν στην $(1.4 - 10)$ ο παρανομαστής είναι διαφορά δύο πολύ μικρών αριθμών.

Παράδειγμα 1.4 - 5

Για τη σύγκριση της κανονικής με την τροποποιημένη μέθοδο του Newton, έστω η εξίσωση

$$f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$$

όπου μία ρίζα της είναι η $x^* = 1.3652\,3001$. Τότε η μέθοδος του Newton δίνει την παρακάτω επαναληπτική σχέση

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i^3 + 4x_i^2 - 10}{3x_i^2 + 8x_i},$$

ενώ η τροποποιημένη μέθοδος του Newton την

$$x_{i+1} = x_i - \frac{(x_i^3 + 4x_i^2 - 10)(3x_i^2 + 8x_i)}{(3x_i^2 + 8x_i)^2 - (x_i^3 + 4x_i^2 - 10)(6x_i + 8)}.$$

Αν $x_0 = 1.5$, έχουμε τα αποτελέσματα του Πίνακα 1.4 - 6.

Παράδειγμα 1.4 - 6

Έστω η εξίσωση

$$f(x) = \left(\frac{x}{2} - \sin x\right)^2 = 0$$

που προφανώς μία ρίζα της, εφόσον υπάρχει, θα πρέπει να έχει πολλαπλότητα 2. Τότε με αρχική τιμή $x_0 = \pi/2$ έχουμε τα αποτελέσματα του Πίνακα 1.4 - 7.

Πίνακας 1.4 - 6: Παράδειγμα 1.4 - 5: αποτελέσματα μεθόδων Newton και τροποποιημένης Newton

i	Newton	$\tilde{f}$
1	1.3733 3333	1.3568 9898
2	1.3652 6201	1.3651 9585
3	*1.3652 3001*	*1.3652 3001*

Πίνακας 1.4 - 7: Παράδειγμα 1.4 - 6: αποτελέσματα μεθόδων Newton, Scrôder και τροποποιημένης Newton

i	Newton	Scrôder	$\tilde{f}$
1	1.78540	2.0	1.80175
2	1.84456	1.90100	1.88963
3	1.87083	1.89551	1.89547
4	1.88335	*1.89549*	*1.89549*
$\vdots$	$\vdots$		
10	1.89531		
$\vdots$	$\vdots$		
17	*1.89549*		

Ασκήσεις

1. Εφαρμόστε τη μέθοδο του Newton και τη μέθοδο των χορδών με ακρίβεια $\varepsilon = 10^{-5}$ στη λύση των παρακάτω εξισώσεων, υπολογίζοντας κάθε φορά την κατάλληλη αρχική τιμή x_0:

$i)$ $x - \cos x = 0$ αν $x \in [0, \pi/2]$ $iii)$ $x^3 - x - 1 = 0;$ $[1, 2]$

$ii)$ $x^3 + 3x^2 - 1 = 0;$ $[-4, 0]$ $iv)$ $x - 0.2 \sin x - 0.8 = 0;$ $[0, \pi/2]$.

2. Εφαρμόζοντας τον τύπο $(1.4 - 6)$ να υπολογιστεί η ρίζα $7^{1/5}$ με ακρίβεια $\varepsilon = 10^{-8}$. Να γίνει σύγκριση με τα αποτελέσματα της Άσκησης 2 της παραγράφου 1.3.

3. Να λυθεί με τη μέθοδο του Schrôder και την τροποποιημένη μέθοδο του Newton η εξισώση

$$x^2 + 2xe^x + e^{2x} = 0, \quad \text{όταν} \quad x_0 = 0 \quad \text{και} \quad \varepsilon = 10^{-3}.$$

Παράρτημα A

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΠΟ ΤΙΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

A.1 Εισαγωγή

Υπενθυμίζονται τώρα οι παρακάτω έννοιες από τη θεωρία των ακολουθιών[1]. Έστω N το σύνολο των φυσικών αριθμών. Τότε:

Ορισμός A.1 - 1 (ακολουθίας). *Κάθε συνάρτηση της μορφής*

$$a : \mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{E} : \nu \longrightarrow a(\nu) \tag{A.1 - 1}$$

όπου N *το σύνολο των φυσικών αριθμών και* E *ένα μη κενό σύνολο λέγεται ακολουθία στοιχείων του συνόλου* E.

Στην $(A.1-1)$ τα πρότυπα, δηλαδή οι φυσικοί αριθμοί ν, λέγονται δείκτες[2], ενώ οι εικόνες τους όροι της ακολουθίας. Η έκφραση $a(\nu)$ συμβολίζεται συνήθως με a_ν και λέγεται ο ν-οστός ή ο γενικός όρος της ακολουθίας, δηλαδή $a_\nu = a(\nu)$ για κάθε $\nu \in \mathrm{N}$. Στην ειδική περίπτωση που το σύνολο $\mathrm{E} \subseteq \Re$, τότε η ακολουθία a_ν λέγεται ακολουθία των πραγματικών αριθμών. Άρα:

[1] Ο αναγνώστης για περαιτέρω μελέτη παραπέμπεται στη βιβλιογραφία και ειδικότερα στο βιβλίο Α. Μπράτσος [3] Κεφ. 5.

[2] Στο Παράρτημα A οι δείκτες θα συμβολίζονται με ν αντί του i, που χρησιμοποιήθηκε στις προηγούμενες παραγράφους του μαθήματος.

Ορισμός Α.1 - 2. *Ορίζεται σαν* **ακολουθία των πραγματικών αριθμών** *κάθε μονοσήμαντη απεικόνιση του συνόλου* N *των φυσικών αριθμών στο σύνολο των πραγματικών αριθμών* $\Re$.

Παράδειγμα Α.1 - 1

Έστω η ακολουθία με γενικό όρο

$$a_\nu = \frac{\nu}{\nu^2 + 1}\,.$$

Δίνοντας στο ν διαδοχικά τις τιμές $1,\ 2,\ \ldots,\ \nu,\ \ldots$ προκύπτουν οι παρακάτω όροι της ακολουθίας

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{5},\ \ldots,\ \frac{\nu}{\nu^2+1},\ \ldots\,.$$

Σημειώσεις Α.1 - 1

1. Άμεσα προκύπτει ότι μία ακολουθία είναι ορισμένη, όταν δίνεται ο γενικός της όρος a_ν.

2. Μία ακολουθία είναι επίσης ορισμένη, όταν δίνονται επαρκείς όροι της και ένας αναγωγικός τύπος ή αναδρομική σχέση, που επιτρέπει τον υπολογισμό του όρου a_ν από τον $a_{\nu-1}$ ή γενικότερα από ορισμένους προηγούμενούς του.

3. Είναι δυνατόν σε ορισμένες περιπτώσεις οι τιμές του δείκτη ν να αρχίζουν από το 0.

Α.1.1 Πράξεις μεταξύ ακολουθιών

Έστω (a_ν), (b_ν), $\nu \in$ N δύο ακολουθίες. Τότε ορίζονται για κάθε $\nu \in$ N οι παρακάτω πράξεις:

Ισότητα	$(a_\nu) = (b_\nu)$, όταν $a_\nu = b_\nu$.
Πρόσθεση	$(a_\nu) + (b_\nu) = (a_\nu + b_\nu)$.
Γινόμενο	$(a_\nu)\,(b_\nu) = (a_\nu b_\nu)$.
Πηλίκο	$\dfrac{(a_\nu)}{(b_\nu)} = \left(\dfrac{a_\nu}{b_\nu}\right)$ με $b_\nu \neq 0$.
Γινόμενο με πραγματικό αριθμό	$\lambda\,(a_\nu) = (\lambda a_\nu)$; $\lambda \in \Re$.
Απόλυτη τιμή	$\lvert (a_\nu) \rvert = (\lvert a_\nu \rvert)$.
Τετραγωνική ρίζα	$\sqrt{(a_\nu)} = \left(\sqrt{a_\nu}\right)$ και ανάλογα
Ρίζα k-τάξης με $k \geq 2$	$\sqrt[k]{(a_\nu)} = \left(\sqrt[k]{a_\nu}\right)$.

Παρατήρηση Α.1 - 1

Οι πράξεις της πρόσθεσης και του γινομένου γενικεύονται επαγωγικά για πεπερασμένο πλήθος ακολουθιών.

Α.1.2 Φραγμένη ακολουθία

Ορισμός Α.1 - 3. *Η ακολουθία (a_ν), $\nu \in \mathrm{N}$ είναι* **άνω φραγμένη** *τότε και μόνον, όταν υπάρχει πραγματικός αριθμός s, τέτοιος ώστε $\alpha_\nu \leq s$ για κάθε $\nu \in \mathrm{N}$.*

Ο αριθμός s, καθώς και κάθε άλλος πραγματικός αριθμός που είναι μεγαλύτερος από τον s, θα λέγεται ένα άνω φράγμα της ακολουθίας.

Ορισμός Α.1 - 4. *Η ακολουθία (a_ν), $\nu \in \mathrm{N}$ είναι* **κάτω φραγμένη** *τότε και μόνον, όταν υπάρχει πραγματικός αριθμός σ, τέτοιος ώστε $\sigma \leq a_\nu$ για κάθε $\nu \in \mathrm{N}$.*

Ο αριθμός σ, καθώς και κάθε άλλος πραγματικός αριθμός που είναι μικρότερος από τον σ, θα λέγεται τότε ένα κάτω φράγμα της ακολουθίας.

Ορισμός Α.1 - 5. *Η ακολουθία (a_ν), $\nu \in \mathrm{N}$ είναι* **φραγμένη** *τότε και μόνον, όταν είναι άνω και κάτω φραγμένη, δηλαδή αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί σ, s με $\sigma \leq s$, τέτοιοι ώστε $\sigma \leq a_\nu \leq s$ για κάθε $\nu \in \mathrm{N}$.*

Άρα μία ακολουθία (a_ν), $\nu \in \mathrm{N}$ είναι φραγμένη τότε και μόνον, όταν υπάρχει κλειστό διάστημα $[\sigma,\, s]$ στο οποίο ανήκουν όλοι οι όροι της.

Παράδειγμα Α.1 - 2

Η ακολουθία
$$a_\nu = \frac{1}{\nu}\,, \quad \nu \in \mathrm{N}$$
είναι φραγμένη, επειδή
$$0 \le a_\nu = \frac{1}{\nu} \le 1\,,$$
δηλαδή όλοι οι όροι της ανήκουν στο διάστημα $[0, 1]$.

Ορισμός Α.1 - 6. *Η ακολουθία (a_ν), $\nu \in \mathrm{N}$ είναι* **απόλυτα φραγμένη** *τότε και μόνον, όταν υπάρχει θετικός πραγματικός αριθμός, τέτοιος ώστε $|a_\nu| \le \theta$ για κάθε $\nu \in \mathrm{N}$.*

Το θ θα λέγεται τότε ένα **απόλυτο φράγμα** της ακολουθίας. Είναι φανερό ότι αν ο θ είναι ένα απόλυτο φράγμα, τότε και κάθε άλλος θετικός αριθμός $\varphi > \theta$ είναι επίσης ένα απόλυτο φράγμα της. Γενικότερα ισχύει:

Πρόταση Α.1 - 1. *Μία φραγμένη ακολουθία είναι απόλυτα φραγμένη και αντίστροφα.*

Σύμφωνα με την παραπάνω πρόταση στο εξής ο όρος φραγμένη και απόλυτα φραγμένη ακολουθία θα χρησιμοποιούνται με την ίδια σημασία.

Παράδειγμα Α.1 - 3

Η ακολουθία
$$a_\nu = \frac{\nu^2 \cos 5\nu + \sqrt{\nu}\sin 2\nu}{\nu^2 + 1}\,, \quad \nu \in \mathrm{N}$$
είναι φραγμένη, επειδή
$$|a_\nu| \le \frac{|\nu^2 \cos 5\nu + \sqrt{\nu}\sin 2\nu|}{\nu^2 + 1} \le \frac{\nu^2 + \sqrt{\nu}}{\nu^2 + 1} \le \frac{2\nu^2}{\nu^2 + 1} < 2,$$
δηλαδή $|a_\nu| < 2$ για κάθε $\nu \in \mathrm{N}$.

Α.1.3 Μονοτονία ακολουθίας

Δίνεται στη συνέχεια η έννοια της μονοτονίας μιας ακολουθίας. Έστω (a_ν), $\nu \in \mathrm{N}$ μία ακολουθία πραγματικών αριθμών. Τότε θα λέγεται ότι η ακολουθία είναι:

Ορισμός Α.1 - 7 **αύξουσα** *τότε και μόνον, όταν ισχύει* $a_\nu \leq a_{\nu+1}$ *για κάθε* $\nu \in \mathrm{N}$.

Ορισμός Α.1 - 8 **γνήσια αύξουσα** *τότε και μόνον, όταν ισχύει* $a_\nu < a_{\nu+1}$ *για κάθε* $\nu \in \mathrm{N}$.

Ορισμός Α.1 - 9 **φθίνουσα** *τότε και μόνον, όταν ισχύει* $a_\nu \geq a_{\nu+1}$ *για κάθε* $\nu \in \mathrm{N}$.

Ορισμός Α.1 - 10 **γνήσια φθίνουσα** *τότε και μόνον, όταν ισχύει* $a_\nu > a_{\nu+1}$ *για κάθε* $\nu \in \mathrm{N}$.

Ορισμός Α.1 - 11 **σταθερή** *τότε και μόνον, όταν ισχύει* $a_{\nu+1} = a_\nu$ *για κάθε* $\nu \in \mathrm{N}$.

Μία ακολουθία (a_ν), $\nu \in \mathrm{N}$ που ανήκει σε μία από τις κατηγορίες ορισμών Α.1 - 7 ή Α.1 - 9 θα λέγεται **μονότονη** ακολουθία, ενώ όταν ανήκει στις Α.1 - 8 ή Α.1 - 10 θα λέγεται **γνήσια μονότονη** ακολουθία.

Παρατηρήσεις Α.1 - 1

1. Κάθε γνήσια μονότονη ακολουθία είναι και μονότονη. Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντοτε.

2. Αν η ακολουθία (a_ν), $\nu \in \mathrm{N}$ είναι αύξουσα, τότε $a_\nu \geq \alpha_1$ για κάθε $\nu \in \mathrm{N}$, δηλαδή η (a_ν) είναι κάτω φραγμένη με ένα κάτω φράγμα τον πρώτο όρο της.

   Όμοια, αν η ακολουθία (a_ν), $\nu \in \mathrm{N}$ είναι φθίνουσα, τότε $a_\nu \leq \alpha_1$, για κάθε $\nu \in \mathrm{N}\nu$, δηλαδή η (a_ν) είναι άνω φραγμένη με ένα άνω φράγμα τον πρώτο όρο της.

3. Για να καθοριστεί το είδος της μονοτονίας μιας ακολουθίας (a_ν), $\nu \in \mathrm{N}$ τις περισσότερες φορές ακολουθείται μία από τις παρακάτω μεθόδους:

i) εξετάζεται το πρόσημο της διαφοράς $\Delta_\nu = a_{\nu+1} - a_\nu$,

ii) αν οι όροι της a_ν διατηρούν πρόσημο, τότε συνήθως συγκρίνεται ο λόγος $a_{\nu+1}/a_\nu$ με τη μονάδα, οπότε από τη σύγκριση αυτή εξάγονται συμπεράσματα για τη μονοτονία της ακολουθίας,

iii) υπολογίζεται μεταξύ δύο ή τριών πρώτων όρων της ακολουθίας μία σχέση, από την οποία προκύπτει μία ένδειξη μονοτονίας και έπειτα, με τη μέθοδο της τέλειας επαγωγής, αποδεικνύεται η ανισοτική σχέση, η οποία καθορίζει τελικά το είδος της μονοτονίας της ακολουθίας.

Παράδειγμα Α.1 - 4

Η ακολουθία

$$a_\nu = \frac{\nu}{\nu+1}, \quad \nu \in \mathrm{N}$$

είναι γνήσια αύξουσα, επειδή

$$\Delta_\nu = a_{\nu+1} - a_\nu = \frac{\nu+1}{\nu+2} - \frac{\nu}{\nu+1} = \frac{2}{(\nu+1)(\nu+2)} > 0\,,$$

δηλαδή $a_{\nu+1} > a_\nu$ για κάθε $\nu \in \mathrm{N}$.

Πρόταση Α.1 - 2. *Αν (k_ν), $\nu \in \mathrm{N}$ είναι μία γνήσια αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών, τότε ισχύει $k_\nu \geq \nu$ για κάθε $\nu \in \mathrm{N}$.*

Ορισμός Α.1 - 12 (περιοχής). *Έστω $x_0 \in \Re$ και $\varepsilon > 0$. Τότε ορίζεται σαν περιοχή του x_0 με ακτίνα ε και συμβολίζεται με $\varpi\,(x_0, \epsilon)$ ή και απλά $\varpi\,(x_0)$ το ανοικτό διάστημα $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$.*

Α.2 Σύγκλιση ακολουθιών

Ορισμός Α.2 - 1 (σύγκλισης). *Θα λέγεται ότι μία ακολουθία (a_ν), $\nu \in \mathrm{N}$ συγκλίνει στον πραγματικό αριθμό α ή τείνει στον αριθμό α ή το όριό της* *είναι ο αριθμός* a *και αυτό θα συμβολίζεται με* $a_\nu \to a$ *ή* [3]$\lim_{\nu->+\infty} a_\nu = a$ *ή απλά* $\lim a_\nu = a$, *τότε και μόνον, όταν για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχει δείκτης* $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$, *δηλαδή δείκτης που εξαρτάται γενικά από το* ε, *τέτοιος ώστε να ισχύει*

$$|a_\nu - a| < \varepsilon \quad \text{για κάθε } \nu \geq \nu_0(\varepsilon). \qquad \text{(A.2 - 2)}$$

Στην ειδική περίπτωση που είναι $a = 0$, δηλαδή $\lim a_\nu = 0$, η ακολουθία (a_ν), $\nu \in$ θα λέγεται **μηδενική**.

Από τον Ορισμό Α.2 - 1 προκύπτει ότι, αν $a_\nu \to a$, τότε η ακολουθία $\delta_\nu = (a_\nu - a)$, $\nu \in N$ θα είναι μηδενική και αντίστροφα. Άρα:

$$\lim a_\nu = a \iff \lim (a_\nu - a) = 0. \qquad \text{(A.2 - 3)}$$

Παράδειγμα Α.2 - 1

Η ακολουθία

$$a_\nu = \frac{1}{\nu}, \quad \nu \in \mathrm{N}$$

είναι μηδενική, επειδή για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει δείκτης $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$, που είναι μεγαλύτερος από το $1/\varepsilon$.

Πράγματι, αν $\nu_0 = [1/\varepsilon] + 1 = \nu_0(\varepsilon)$, τότε για κάθε $\nu \geq \nu_0(\varepsilon)$ θα είναι $\nu > 1/\varepsilon$ ή $1/\nu < \varepsilon$, δηλαδή $|a_\nu| = 1/\nu < \varepsilon$, οπότε $a_\nu = 1/\nu \to 0$.

Παράδειγμα Α.2 - 2

Η ακολουθία

$$a_\nu = \frac{\nu^2 - \nu}{\nu^2 + 1}, \quad \nu \in \mathrm{N}$$

συγκλίνει στο 1, επειδή

$$|a_\nu - 1| = \left| \frac{\nu^2 - \nu}{\nu^2 + 1} - 1 \right| = \frac{\nu + 1}{\nu^2 + 1} \leq \frac{2}{\nu} < \varepsilon \text{ με } \varepsilon > 0,$$

οπότε $\nu > 2/\varepsilon$. Τότε υπάρχει δείκτης $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$, που είναι μεγαλύτερος από το $2/\varepsilon$ και αυτό επειδή, αν είναι $\nu_0 = [2/\varepsilon] + 1 = \nu_0(\varepsilon)$, τότε για κάθε $\nu \geq \nu_0(\varepsilon)$ θα είναι $\nu > 2/\varepsilon$ ή $2/\nu < \varepsilon$, δηλαδή $|a_\nu - 1| < \varepsilon$, οπότε $\lim a_\nu = 1$.

[3] Ο συμβολισμός lim είναι η συγκοπή της λέξης *limes*, που σημαίνει *όριο* και στο εξής, όταν χρησιμοποιείται, θα σημαίνει $\lim_{\nu \to +\infty}$, εκτός και αν διαφορετικά ορίζεται.

Παράδειγμα Α.2 - 3

Η ακολουθία $a_\nu = (-1)^\nu$, $\nu \in \mathrm{N}$ δεν συγκλίνει στο $\Re$.

Πράγματι, αν υποτεθεί ότι συγκλίνει προς έναν αριθμό, έστω x (άτοπος απαγωγή), τότε για κάθε $\varepsilon > 0$, άρα και για $\varepsilon = 1/2$, θα υπάρχει δείκτης $\nu_0 \in \mathrm{N}$, έτσι ώστε $|(-1)^\nu - x| \leq 1/2$ για κάθε $\nu \geq \nu_0$. Τότε όμως, επειδή $\nu_0 < \nu_0 + 1$ είναι $|(-1)_0^\nu - x| < 1/2$ και $\left|(-1)^{\nu_0+1} - x\right| < 1/2$, οπότε έχουμε

$$\left|(-1)^{\nu_0+1} - (-1)_0^\nu\right| \leq \left|(-1)^{\nu_0+1} - x\right| + |(-1)_0^\nu - x| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

δηλαδή $\left|(-1)^{\nu_0+1} - (-1)_0^\nu\right| < 1$, ενώ προφανώς $\left|(-1)^{\nu_0+1} - (-1)_0^\nu\right| = 2$.

Άρα η υπόθεση ότι η ακολουθία συγκλίνει οδηγεί σε άτοπο, που σημαίνει ότι η a_ν δεν συγκλίνει στο $\Re$.

Ιδιότητες συγκλινουσών ακολουθιών

Δίνονται στη συνέχεια οι κυριότερες ιδιότητες των συγκλινουσών ακολουθιών.

I. Το όριο μιας συγκλίνουσας ακολουθίας (a_ν), $\nu \in \mathrm{N}$ είναι **μονοσήμαντα** ορισμένο.

II. Αν $\rho \in \mathrm{N}$ και $a \in \Re$, τότε ισχύει η ισοδυναμία

$$a_\nu \to a \iff a_{\nu+\rho} \to a. \tag{A.2 - 4}$$

Σημείωση Α.2 - 1

Η Ιδιότητα II ισοδύναμα διατυπώνεται επίσης ως εξής:
η διαγραφή ή η προσθήκη όρων που αντιστοιχούν σε πεπερασμένο πλήθος δεικτών, δεν επηρεάζει τη σύγκλιση μιας ακολουθίας. Αυτό συμβαίνει, γιατί η ιδιότητα της σύγκλισης μιας ακολουθίας ανήκει στις ιδιότητες, που ισχύουν τελικά για όλους τους δείκτες. Εύκολα διαπιστώνεται ότι από ένα δείκτη και μετά, για την πρώτη ακολουθία οι όροι των ακολουθιών (a_ν) και $(a_{\nu+\rho})$ θα συμπίπτουν.

III. Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη.
Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντοτε, δηλαδή υπάρχουν φραγμένες ακολουθίες που δεν συγκλίνουν, όπως η ακολουθία του Παραδείγματος 5.1.4-2

που είναι φραγμένη, επειδή $|a_\nu| \leq 1$ για κάθε $\nu \in \mathrm{N}$, αλλά όπως έχει αποδειχθεί η (a_ν) δεν συγκλίνει. Προφανώς μία μη φραγμένη ακολουθία δεν συγκλίνει.

IV. Το γινόμενο μηδενικής ακολουθίας επί φραγμένη είναι μηδενική ακολουθία.

Από την ιδιότητα αυτή προκύπτει:

Πόρισμα Α.2 - 1. *Αν* $\lim a_\nu = a$ *και* $k \in \Re$, *τότε*

$$\lim (k a_\nu) = k a. \tag{A.2 - 5}$$

V. Αν η (b_ν), $\nu \in \mathrm{N}$ είναι μηδενική ακολουθία και η (a_ν), $\nu \in \mathrm{N}$ ακολουθία, τέτοια ώστε για κάθε $\nu \geq \nu_1 \in \mathrm{N}$ να ισχύει

$$|a_\nu| \leq k\,|b_\nu| \;\text{ με }\; k > 0,$$

τότε η (a_ν) είναι επίσης μηδενική ακολουθία.

Παράδειγμα Α.2 - 4

Έστω η ακολουθία

$$a_\nu = \frac{\sin 5\nu}{\nu^2 + 3\nu + 1}\,.$$

Τότε

$$|a_\nu| = \left|\frac{\sin 5\nu}{\nu^2 + 3\nu + 1}\right| \leq \frac{1}{\nu^2 + 3\nu + 1} < \frac{1}{\nu^2 + 3\nu} < \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\nu} \;\to\; 0\,.$$

Άρα $\lim a_\nu = 0$.

Πόρισμα Α.2 - 2. *Αν* $|a_\nu| \leq |b_\nu|$ *για κάθε* $\nu \in \mathrm{N}$ *και η* (b_ν) *είναι μηδενική ακολουθία, τότε και η ακολουθία* (a_ν) *είναι μηδενική.*

VI. Αν $b_\nu \leq a_\nu \leq \gamma_\nu$ για κάθε $\nu \geq \nu_0$ και $\lim b_\nu = a$, $\lim \gamma_\nu = a$, τότε θα πρέπει και $\lim a_\nu = a$ (ισοσυγκλίνουσες ακολουθίες).

VII. Αν δύο ακολουθίες (a_ν) και (b_ν) συγκλίνουν και ισχύει $a_\nu < b_\nu$ για κάθε $\nu \in \mathrm{N}$, τότε $a_\nu \le b_\nu$.

Πόρισμα Α.2 - 3. *Αν* $\lim a_\nu = a$ *και* $a_\nu < s$ *για κάθε* $\nu \in \mathrm{N}$, *τότε* $a \le s$.

Πόρισμα Α.2 - 4. *Αν* $\lim a_\nu = a$ *και* $\sigma < a_\nu$ *για κάθε* $\nu \in \mathrm{N}$, *τότε* $\sigma \le a$.

VIII. Για κάθε ακολουθία πραγματικών αριθμών (a_ν) ισχύει ότι, αν $\lim a_{2\nu} = a$ και $\lim a_{2\nu-1} = a$, τότε $\lim a_\nu = a$ και αντίστροφα.

Πράξεις μεταξύ συγκλινουσών ακολουθιών

Ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες.

IX. **Όριο αθροίσματος**: αν $\lim a_\nu = a$ και $\lim b_\nu = b$, τότε υπάρχει το $\lim (a_\nu + b_\nu)$ και ισχύει

$$\lim (a_\nu + b_\nu) = a + b. \tag{A.2 - 6}$$

Σημειώσεις Α.2 - 1

i) Η ισχύς της Ιδιότητας IX επεκτείνεται και στην περίπτωση ενός πεπερασμένου πλήθους συγκλινουσών ακολουθιών, δηλαδή ισχύει

$$\begin{aligned} \lim (a_{1_\nu} + a_{2_\nu} + \ldots + a_{k_\nu}) &= \lim a_{1_\nu} + \lim a_{2_\nu} + \ldots \\ &\quad + \lim a_{k_\nu}. \end{aligned} \tag{A.2 - 7}$$

ii) Η $(A.2-7)$ δεν ισχύει αν το πλήθος των προσθετέων δεν είναι πεπερασμένο.

ii) Το αντίστροφο της Ιδιότητας IX δεν ισχύει πάντοτε, δηλαδή αν το άθροισμα δύο ακολουθιών είναι συγκλίνουσα ακολουθία, αυτό δεν συνεπάγεται πάντοτε ότι κάθε μία από αυτές είναι συγκλίνουσα ακολουθία. Είναι επίσης δυνατόν να μη συγκλίνει ούτε η μία ούτε η άλλη ακολουθία.

X. **Όριο διαφοράς**: αν $\lim a_\nu = a$ και $\lim b_\nu = b$, τότε υπάρχει το $\lim(a_\nu - b_\nu)$ και ισχύει

$$\lim(a_\nu - b_\nu) = a - b. \qquad (\text{A.2 - 8})$$

Πόρισμα A.2 - 5. *Αν $\lim a_\nu = a$ και $\lim b_\nu = b$, τότε*

$$\lim(ka_\nu + \lambda b_\nu) = ka_\nu + \lambda b_\nu \qquad (\text{A.2 - 9})$$

για κάθε $\varkappa$, $\lambda \in \Re$ (γραμμική ιδιότητα).

Η ιδιότητα γενικεύεται.

XI. **Όριο γινομένου**: αν $\lim a_\nu = a$ και $\lim b_\nu = b$, τότε υπάρχει το $\lim(a_\nu\, b_\nu)$ και ισχύει

$$\lim(a_\nu\, b_\nu) = ab. \qquad (\text{A.2 - 10})$$

Σημειώσεις A.2 - 2

i) Η Ιδιότητα XI επεκτείνεται και στην περίπτωση ενός πεπερασμένου πλήθους συγκλινουσών ακολουθιών, δηλαδή

$$\lim(a_{1_\nu}\, a_{2_\nu}\, \cdots\, a_{k_\nu}) = \lim a_{1_\nu}\, \lim a_{2_\nu}\, \cdots\, \lim a_{k_\nu}. \qquad (\text{A.2 - 11})$$

Ειδικότερα: αν οι k-ακολουθίες είναι ίσες, δηλαδή $a_{i_\nu} = a_\nu$; $i = 1, 2, \ldots, k$ και $\lim a_\nu = a$, ισχύει

$$\lim(a_\nu)^k = (\lim a_\nu)^k = a^k \text{ για κάθε } k \in \mathrm{N}. \qquad (\text{A.2 - 12})$$

ii) Η $(A.2 - 11)$ δεν ισχύει αν το πλήθος των παραγόντων δεν είναι πεπερασμένο. Επίσης το αντίστροφο της Ιδιότητας XI δεν ισχύει γενικά.

XII. **Όριο πηλίκου**: αν $\lim a_\nu = a$ και $\lim b\nu = b \neq 0$ όπου $b_\nu \neq 0$ για κάθε $\nu \in \mathrm{N}$, τότε υπάρχει το $\lim(a_\nu / b_\nu)$ και ισχύει

$$\lim \frac{a_\nu}{b_\nu} = \frac{a}{b}\,. \qquad (\text{A.2 - 13})$$

Παράδειγμα Α.2 - 5

Έστω η ακολουθία

$$a_\nu = \frac{\nu^2 + \nu + 5}{3\nu^2 + 1}\,.$$

Τότε

$$a_\nu = \frac{1 + \frac{1}{\nu} + \frac{5}{\nu^2}}{3 + \frac{1}{\nu^2}}\,,$$

όπου οι ακολουθίες $1/\nu$ (Παράδειγμα Α.2 - 1) και $1/\nu^2$ (Ιδιότητα XI) είναι μηδενικές. Σύμφωνα με την Ιδιότητα IX, ο αριθμητής του κλάσματος της ακολουθίας (a_ν) συγκλίνει στο 1 και ο παρανομαστής στο 3, οπότε η (a_ν) σύμφωνα με την Ιδιότητα XII θα συγκλίνει στο $1/3$.

Σημειώσεις Α.2 - 3

i) Το αντίστροφο της Ιδιότητας XII δεν ισχύει πάντοτε, δηλαδή η ύπαρξη του ορίου $\lim\,(a_\nu/b_\nu)$ δεν συνεπάγεται πάντοτε την ύπαρξη ενός από τα $\lim a_\nu$ ή $\lim b_\nu$.

ii) Για κάθε $k \in \mathrm{Z}$, όπου Z το σύνολο των ακέραιων αριθμών ισχύει ότι, αν $b_\nu \neq 0$, τότε $\lim b_\nu = \beta \neq 0$, οπότε

$$\lim\,(b_\nu)^k = (\lim b_\nu)^k = b^k \ \text{ με } \ k \in \mathrm{Z} \qquad \text{(A.2 - 14)}$$

που αποτελεί γενίκευση της $(A.2-12)$.

XIII. Αν $\lim a_\nu = a$, τότε υπάρχει το $\lim |a_\nu|$ και ισχύει

$$\lim |a_\nu| = |a|. \qquad \text{(A.2 - 15)}$$

Σημειώσεις Α.2 - 4

i) Το αντίστροφο της Ιδιότητας XIII δεν ισχύει, όταν $a \neq 0$, δηλαδή: αν $\lim |a_\nu| = |a| \neq 0$, δεν συνεπάγεται ότι και $\lim a_\nu = a$ και αυτό επειδή είναι δυνατόν μία ακολουθία να συγκλίνει απόλυτα, χωρίς όμως η ίδια να συγκλίνει.

Ειδικά όταν $a = 0$, ισχύει η παρακάτω ισοδυναμία

$$\lim a_\nu = 0 \iff -\lim a_\nu = 0 \iff \lim |a_\nu| = 0. \qquad \text{(A.2 - 16)}$$

XIV. **Όριο ρίζας**: αν $\lim a_\nu = a$, τότε

$$\lim \sqrt{|a_\nu|} = \sqrt{|a|} = \sqrt{\lim a_\nu}. \qquad (A.2 - 17)$$

Σημειώσεις A.2 - 5

i) Από την Ιδιότητα XIV προκύπτει ότι τα σύμβολα lim και $\sqrt{\ }$ επιτρέπεται να εναλλάσσονται αριστερά από την ακολουθία (a_ν); $\nu \in \mathrm{N}$.

ii) Γενικότερα ισχύει ότι αν $a_\nu \geq 0$ για κάθε $\nu \in \mathrm{N}$ και $\lim a_\nu = a$, τότε

$$\lim \sqrt[k]{a_\nu} = \sqrt[k]{\lim a_\nu} \quad \text{με} \quad k \in \mathrm{N}. \qquad (A.2 - 18)$$

Σαν εφαρμογή των παραπάνω ιδιοτήτων δίνονται μερικές αξιοσημείωτες και χρήσιμες εφαρμογές με μορφή προτάσεων.

Πρόταση A.2 - 1. *Έστω η ακολουθία $a_\nu = \omega^\nu$, $\nu \in \mathrm{N}$ με $|\omega| < 1$. Τότε* $\lim a_\nu = 0$.

Πρόταση A.2 - 2. *Αν $\omega \in \Re$ και $|\omega| < 1$, τότε $\lim a_\nu = \nu^k \omega^\nu = 0$ με $k \in \mathrm{Z}$.*

Πρόταση A.2 - 3. *Έστω μία ακολουθία (a_ν), $\nu \in \mathrm{N}$ με $a_\nu \neq 0$ για κάθε $\nu \in \mathrm{N}$. Τότε, αν $|a_{\nu+1}/a_\nu| < 1$, είναι $\lim a_\nu = 0$.*

Πρόταση A.2 - 4. *Για κάθε $x \in \Re$ ισχύει ότι $\lim x^\nu/\nu\,! = 0$.*

Πρόταση A.2 - 5. *Αν $a \in \Re$, τότε $a_\nu = \lim \sqrt[\nu]{a} = 1$, ενώ όμοια $\lim \sqrt[\nu]{\nu} = 1$.*

Σχετικά τώρα με τη σύγκλιση μονότονων ακολουθιών δεχόμαστε ότι ισχύει:

Αξίωμα A.2 - 1. *Κάθε μονότονη και φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών συγκλίνει σε κάποιον πραγματικό αριθμό.*

Το αξίωμα αυτό, αν και αφορά μόνο τις μονότονες ακολουθίες, δίνει μία ικανή συνθήκη ύπαρξης του ορίου ακολουθίας. Επίσης εξασφαλίζει την ύπαρξη στο $\Re$ του ορίου μιας ακολουθίας με ορισμένες προϋποθέσεις, αλλά δε δίνει καμία ένδειξη για τον υπολογισμό του. Άμεσες συνέπειες του αξιώματος είναι οι επόμενες δύο προτάσεις.

Πρόταση A.2 - 6. *Αν μία ακολουθία* (a_ν), $\nu \in \mathrm{N}$ *είναι αύξουσα και έχει σαν ένα άνω φράγμα τον αριθμό* s, *τότε είναι συγκλίνουσα και ισχύει* $\lim a_\nu \leq s$.

Πρόταση A.2 - 7. *Αν μία ακολουθία* (a_ν), $\nu \in \mathrm{N}$ *είναι φθίνουσα και έχει σαν ένα κάτω φράγμα τον αριθμό* σ, *τότε είναι συγκλίνουσα και ισχύει* $\sigma \leq \lim a_\nu$.

[4]

Βιβλιογραφία

[1] Ακρίβης, Γ., Δουγαλής, Β. (1995), Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Αθήνα, ISBN 978–960–524–022–6.

[2] Μπράτσος, Α. (2011), Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, ISBN 978–960–351–874–7.

[3] Μπράτσος, Α. (2002), Ανώτερα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, ISBN 960–351–453–5/978–960–351–453–4.

[4] Στεφανάκος, Χ., Προγραμματισμός Η/Υ με MATLAB, Γκούρδας Εκδοτική, ISBN 978–960–387–856–8.

[5] Burden, Richard L. and Faires, J. Douglas (2000), Numerical Analysis (7th ed.), Brooks/Cole, ISBN 978–0–534–38216–2.

[6] Conte, S. D., Carl de Boor (1981), Elementary Numerical Analysis: An Algorithmic Approach (3rd ed.), McGraw-Hill Book Company, ISBN 978–0–07–012447–9.

[7] Don, E., Schaum's Outlines – Mathematica (2006), Εκδόσεις Κλειδάριθμος, ISBN 978–960–461–000–6.

[8] Kendell A. Atkinson (1989), An Introduction to Numerical Analysis (2nd ed.), John Wiley & Sons, ISBN 0–471–50023–2.

[9] Leader, Jeffery J. (2004), Numerical Analysis and Scientific Computation, Addison Wesley, ISBN 978–0–201–73499–7.

[10] Schatzman, M. (2002), Numerical Analysis: A Mathematical Introduction, Clarendon Press, Oxford, ISBN 978–0–19–850279–1.

[11] Stoer, Josef; Bulirsch, Roland (2002), Introduction to Numerical Analysis (3rd ed.), Springer, ISBN 978–0–387–95452–3.

[12] Sli, E. and Mayers, D. (2003), An Introduction to Numerical Analysis, Cambridge University Press, ISBN 978–0–521–00794–8.

Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm
- http://mathworld.wolfram.com/
- http://eom.springer.de/