

## Μάθημα 8

# ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ - ΜΕΡΟΣ ΙΙ

### 8.1 Κανόνες ολοκλήρωσης του Gauss

#### 8.1.1 Εισαγωγικές έννοιες

Όλοι οι κανόνες ολοκλήρωσης του Μαθήματος 7 είχαν προκύψει από το πολυώνυμο παρεμβολής του Newton θεωρώντας κάθε φορά ένα αριθμό **ισοαπέχοντων** σημείων. Οι τύποι υπολογισμού των σύνθετων κανόνων τελικά λαμβάνουν τη μορφή:

**Τραπεζίου**

$$\begin{aligned} I(f) &\approx \frac{h}{2} f(x_0) + h f(x_1) + \dots + h f(x_{N-1}) + \frac{h}{2} f(x_N) \\ &= w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) + \dots + w_{N-1} f(x_{N-1}) + w_N f(x_N). \end{aligned}$$

**Simpson**

$$\begin{aligned} I(f) &\approx \frac{h}{3} f(x_0) + \frac{4h}{3} f(x_1) + \frac{4h}{3} f(x_3) + \dots + \frac{4h}{3} f(x_{2N-1}) \\ &\quad + \frac{2h}{3} f(x_2) + \frac{2h}{3} f(x_4) + \dots + \frac{2h}{3} f(x_{2N-2}) + \frac{h}{3} f(x_{2N}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{h}{3} f(x_0) + \frac{4h}{3} f(x_1) + \frac{2h}{3} f(x_2) + \dots + \frac{2h}{3} f(x_{2N-2}) \\
&\quad + \frac{4h}{3} f(x_{2N-1}) + \frac{h}{3} f(x_{2N}) \\
&= w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + \dots + w_{2N-2} f(x_{2N-2}) \\
&\quad + w_{2N-1} f(x_{2N-1}) + w_{2N} f(x_{2N}).
\end{aligned}$$

**3/8 του Simpson**

$$\begin{aligned}
I(f) &\approx \frac{3h}{8} f(x_0) + \frac{9h}{8} f(x_1) + \dots + \frac{9h}{8} f(x_{3N-2}) \\
&\quad + \frac{9h}{8} f(x_2) + \dots + \frac{9h}{8} f(x_{3N-1}) \\
&\quad + \frac{6h}{8} f(x_3) + \dots + \frac{6h}{8} f(x_{3N-3}) + \frac{3h}{8} f(x_{3N}) \\
&= \frac{3h}{8} f(x_0) + \frac{9h}{8} f(x_1) + \frac{9h}{8} f(x_2) + \frac{6h}{8} f(x_3) + \dots \\
&\quad + \frac{6h}{8} f(x_{3N-3}) + \frac{9h}{8} f(x_{3N-2}) + \frac{9h}{8} f(x_{3N-1}) + \frac{3h}{8} f(x_{3N}) \\
&= w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + w_3 f(x_3) + \dots \\
&\quad + w_{3N-3} f(x_{3N-3}) + w_{3N-2} f(x_{3N-2}) + w_{3N-1} f(x_{3N-1}) \\
&\quad + w_{3N} f(x_{3N}).
\end{aligned}$$

Επομένως όλοι οι κανόνες ολοκλήρωσης είναι δυνατό να γραφούν τελικά - παραλείποντας χωρίς βλάβη της γενικότητας και για λόγους ευκολίας τον όρο με δείκτη 0 - στη μορφή

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx \approx w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + \dots + w_n f(x_n) \quad (8.1.1 - 1)$$

όπου οι συντελεστές των τιμών  $f(x_i)$ ;  $i = 1, 2, \dots, n$  ή όπως συνήθως λέγονται τα **βάρη** (weights)  $w_i$ ;  $i = 1, 2, \dots, n$  **δεν εξαρτώνται** από τη συνάρτηση  $f(x)$ .

Στους κανόνες ολοκλήρωσης που θα εξεταστούν στη συνέχεια του μαθήματος και που είναι γνωστοί σαν **κανόνες ολοκλήρωσης του Gauss** (Gaussian quadrature), η ολοκληρωτέα συνάρτηση αντικαθίσταται με άλλα προσεγγιστικά πολυώνυμα, οπότε δημιουργούνται άλλοι τύποι αριθμητικής ολοκλήρωσης με συντελεστές κατά κανόνα μη ρητούς αριθμούς. Έχει αποδειχθεί πειραματικά ότι οι τύποι που προκύπτουν από τους κανόνες αυτούς έχουν το πλεονέκτημα με κατάλληλη εκλογή των σημείων  $x_i; i = 1, 2, \dots, n$  να δίνουν μεγαλύτερη ακρίβεια αυτής που δίνεται από τους τύπους των Newton-Cotes με τον ίδιο αριθμό σημείων. Τα σημεία παρεμβολής στις περιπτώσεις αυτές γενικά δεν ισοαπέχουν.

Έστω το ολοκλήρωμα  $I(f) = \int_a^b f(x)dx$ . Αποδεικνύεται ότι η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι δυνατόν να γραφεί στη μορφή

$$f(x) = w(x)g(x), \quad (8.1.1 - 2)$$

όταν  $w(x)$  είναι μία μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο  $[a, b]$  που λέγεται **συνάρτηση βάρους**. Τότε η (8.1.1 - 2) σύμφωνα με την (8.1.1 - 1) γράφεται

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_a^b w(x)g(x)dx & (8.1.1 - 3) \\ &\approx w_1 g(x_1) + w_2 g(x_2) + \dots + w_n g(x_n) \end{aligned}$$

όπου τα βάρη  $w_i; i = 1, 2, \dots, n$  εξαρτώνται από τα σημεία  $x_i; i = 1, 2, \dots, n$  και τη συνάρτηση  $w(x)$  αλλά όχι από την  $g(x)$ .<sup>1</sup>

Επειδή η μελέτη της (8.1.1-3) στη γενική περίπτωση ξεφεύγει του σκοπού του μαθήματος, εξετάζεται μόνον η περίπτωση όπου η συνάρτηση  $g(x)$  είναι ένα πολυώνυμο βαθμού έστω  $m$ , δηλαδή

$$g(x) = P_m(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m, \quad (8.1.1 - 4)$$

όταν  $a_i \in \mathfrak{R}$  για κάθε  $i = 0, 1, \dots, m$ . Στον τύπο (8.1.1 - 3) ζητείται να προσδιοριστούν τα  $w_i$  και τα σημεία  $x_i; i = 1, 2, \dots, n$ , έτσι ώστε το σφάλμα

<sup>1</sup> Η απόδειξη που ακολουθεί να παραλειφθεί σε πρώτη ανάγνωση.

της προσέγγισης να είναι ελάχιστο. Η (8.1.1 - 3) διαδοχικά γράφεται

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_a^b w(x) [a_0 + \dots + a_m x^m] dx \\ &= w_1 g(x_1) + w_2 g(x_2) + \dots + w_n g(x_n) \quad (8.1.1 - 5) \end{aligned}$$

όπου προφανώς  $g(x_i) = a_0 + a_1 x_i + \dots + a_m x_i^m$  για κάθε  $i = 1, 2, \dots, n$ . Από την (8.1.1 - 5) προκύπτει τότε ότι

$$\begin{aligned} I(f) &= a_0 \int_a^b w(x) dx + a_1 \int_a^b x w(x) dx + \dots + a_m \int_a^b x^m w(x) dx \\ &= w_1 (a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_m x_1^m) + w_2 (a_0 + a_1 x_2 + \dots + a_m x_2^m) \\ &\quad + \dots + w_n (a_0 + a_1 x_n + \dots + a_m x_n^m) \end{aligned}$$

ή

$$\begin{aligned} &a_0 \int_a^b w(x) dx + a_1 \int_a^b x w(x) dx + \dots + a_m \int_a^b x^m w(x) dx \\ &= a_0 (w_1 + w_2 + \dots + w_n) + a_1 (w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots + w_n x_n) \\ &\quad + \dots + a_m (w_1 x_1^m + w_2 x_2^m + \dots + w_n x_n^m). \end{aligned}$$

Επειδή η τελευταία ισότητα πρέπει να ισχύει για κάθε πολυώνυμο της μορφής (8.1.1 - 4), από την εξίσωση των συντελεστών  $a_i$ ;  $i = 0, 1, \dots, m$  έχουμε

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 + \dots + w_n &= \int_a^b w(x) dx \\ w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots + w_n x_n &= \int_a^b x w(x) dx \\ w_1 x_1^2 + w_2 x_2^2 + \dots + w_n x_n^2 &= \int_a^b x^2 w(x) dx \quad (8.1.1 - 6) \\ &\vdots \\ &\vdots \\ w_1 x_1^m + w_2 x_2^m + \dots + w_n x_n^m &= \int_a^b x^m w(x) dx, \end{aligned}$$

που ορίζει ένα σύστημα  $m+1$  εξισώσεων με  $n$  αγνώστους τα βάρη  $w_1, w_2, \dots, w_n$  και επίσης  $n$  αγνώστους τα σημεία  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Το σύστημα αυτό θα πρέπει να έχει λύση για κάθε συνάρτηση  $w(x)$ , που σημαίνει ότι  $m+1 \leq 2n$ , δηλαδή

$$m \leq 2n - 1. \quad (8.1.1 - 7)$$

Αποδεικνύεται ότι για  $m = 2n - 1$  το σύστημα (8.1.1 - 7) έχει πάντοτε λύση, που όμως είναι αρκετά πολύπλοκη ακόμα και όταν το πλήθος των σημείων  $n$  είναι πολύ μικρό.

### 8.1.2 Κανόνες ολοκλήρωσης των Gauss-Legendre

Στον κανόνα ολοκλήρωσης που ακολουθεί, εξετάζεται η λύση του συστήματος (8.1.1 - 6) για την περίπτωση που η συνάρτηση βάρους  $w(x) = 1$  και το διάστημα ολοκλήρωσης  $[a, b] = [-1, 1]$ . Τότε το σύστημα γράφεται

$$\begin{aligned} w_1 + \dots + w_n &= \int_{-1}^1 dx = 2 \\ w_1 x_1 + \dots + w_n x_n &= \int_{-1}^1 x dx = 0 \\ w_1 x_1^2 + \dots + w_n x_n^2 &= \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3} \\ &\vdots \\ w_1 x_1^m + \dots + w_n x_n^m &= \int_{-1}^1 x^m dx \\ &= \begin{cases} 0, & \text{αν } m \text{ περιττός,} \\ \frac{1}{1+m}, & \text{αν } m \text{ άρτιος.} \end{cases} \end{aligned} \quad (8.1.2 - 1)$$

Από τη θεωρία των ορθογώνιων πολυωνύμων προκύπτει ότι τα σημεία  $x_i$ ;  $i = 1, 2, \dots, n$  που επαληθεύουν το σύστημα (8.1.2 - 3) είναι οι ρίζες των

πολυωνύμων  $P_n(x)$  του Legendre βαθμού  $n$ , που δίνονται από τον τύπο<sup>2</sup>

$$P_n(x) = \frac{[(x^2 - 1)^n]^{(n)}}{2^n n!} \quad (8.1.2 - 2)$$

για κάθε  $n = 1, 2, \dots$ , όταν  $x \in [-1, 1]$ , ενώ είναι  $P_0(x) = 1$ .

Με εφαρμογή του τύπου (8.1.2 - 2) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} P_1(x) &= x & P_3(x) &= \frac{1}{2} (5x^3 - 3x) \\ P_2(x) &= \frac{1}{2} (3x^2 - 1) & P_4(x) &= \frac{1}{8} (35x^4 - 30x^2 + 3) \quad \text{κ.λπ.} \end{aligned}$$

Οι ρίζες  $x_i$ ;  $i = 1, 2, \dots, n$  και τα αντίστοιχα βάρη  $w_i$  όπου

$$w_i = \frac{2}{(1 - x_i^2) [P'_n(x_i)]^2}; \quad i = 1, 2, \dots, n$$

για κάθε περίπτωση δίνονται από πίνακες.

Αποδεικνύεται ότι:

- i) τα βάρη  $w_i$  είναι πάντοτε θετικοί αριθμοί,
- ii) οι ρίζες  $x_i$  είναι πραγματικές και ανά δύο συμμετρικές ως προς το μηδέν,
- iii) τα βάρη  $w_i$ , που αντιστοιχούν σε συμμετρικές ρίζες, είναι ίσα μεταξύ τους.

Αν το διάστημα ολοκλήρωσης είναι διάφορο του  $[-1, 1]$ , τότε με το μετασχηματισμό<sup>3</sup>

$$x = \frac{(b-a)t}{2} + \frac{b+a}{2} \quad (8.1.2 - 3)$$

το ολοκλήρωμα με διάστημα ολοκλήρωσης  $[a, b]$  μετασχηματίζεται σε αντίστοιχο με άκρα  $[-1, 1]$ , δηλαδή

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_a^b f(x) dx \\ &= \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f \left[ \frac{(b-a)x}{2} + \frac{b+a}{2} \right] dx. \end{aligned} \quad (8.1.2 - 4)$$

<sup>2</sup>Ο τύπος (8.1.2 - 2) είναι γνωστός σαν τύπος του Rodrigues (Rodrigues formula).

<sup>3</sup>Αν  $x = a$ , τότε εύκολα προκύπτει από την (8.1.2 - 3) ότι  $t = -1$ , ενώ, αν  $x = b$  ότι  $t = 1$ .

Επομένως

$$\begin{aligned}
 I(f) &= \int_a^b f(x) dx \\
 &\approx \sum_{i=1}^n w_i \left\{ \frac{b-a}{2} f \left[ \frac{(b-a)x_i}{2} + \frac{b+a}{2} \right] \right\} \\
 &= \sum_{i=1}^n w_i g(x_i), \tag{8.1.2 - 5}
 \end{aligned}$$

όταν

$$g(x_i) = \frac{b-a}{2} f \left[ \frac{(b-a)x_i}{2} + \frac{b+a}{2} \right] \tag{8.1.2 - 6}$$

και στο δεξιό μέλος χρησιμοποιήθηκε για λόγους ευκολίας το  $x_i$  αντί του  $t_i$ .

Η παραπάνω μέθοδος ολοκλήρωσης είναι γνωστή σαν **ολοκλήρωση των Gauss-Legendre** (Gauss-Legendre quadrature), ενώ ο (8.1.2 - 2) σαν ο τύπος ολοκλήρωσης των Gauss-Legendre.

### Σημείωση 8.1.2 - 1

Η μέθοδος ολοκλήρωσης των Gauss-Legendre

- i) δίνει τη μεγαλύτερη ακρίβεια από κάθε άλλη, που χρησιμοποιεί τον ίδιο αριθμό σημείων,
- ii) δεν είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί για τις περιπτώσεις εκείνες που η συνάρτηση δίνεται με τις τιμές της σε ορισμένα σημεία  $x_i$ , τα οποία δε συμπίπτουν με τις ρίζες των πολυωνύμων Legendre, είναι όμως η καλύτερη για τις περιπτώσεις που η συνάρτηση  $f(x)$  δίνεται με τον αναλυτικό της τύπο.

### Παράδειγμα 8.1.2 - 1

Με τον τύπο των Gauss-Legendre για 4 σημεία να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_{-1}^1 e^{-x^2} dx \quad .$$

**Πίνακας 8.1.2 - 1:** ριζών πολυωνύμων των  $P_n$ ;  $n = 1, 2, \dots, 6$  και των αντίστοιχων βαρών

$P_n$	$x_i$	$w_i$
$P_1$	$x_1 = 0$	$w_1 = 2.00000000$
$P_2$	$-x_1 = x_2 = 0.57735027$	$w_1 = w_2 = 1.00000000$
$P_3$	$-x_1 = x_3 = 0.77459667$ $x_2 = 0$	$w_1 = w_3 = 0.55555556$ $w_2 = 0.88888889$
$P_4$	$-x_1 = x_4 = 0.86113631$ $-x_2 = x_3 = 0.33998104$	$w_1 = w_4 = 0.34785485$ $w_2 = w_3 = 0.65214515$
$P_5$	$-x_1 = x_5 = 0.90617985$ $-x_2 = x_4 = 0.53846931$ $x_3 = 0$	$w_1 = w_5 = 0.23692689$ $w_2 = w_4 = 0.47862867$ $w_0 = 0.56888889$
$P_6$	$-x_1 = x_6 = 0.93246951$ $-x_2 = x_5 = 0.66120939$ $-x_3 = x_4 = 0.23861919$	$w_1 = w_6 = 0.17132449$ $w_2 = w_5 = 0.36076157$ $w_3 = w_4 = 0.46791396$



Πίνακας 8.1.2 - 2: Παράδειγμα 8.1.2 - 1

$x_i$	$w_i$	$w_i e^{-x_i^2}$
$x_1 = -0.86114$	$w_1 = 0.34785$	$w_1 e^{-x_1^2} = 0.34785 * e^{-(-0.86114)^2} = 0.1657$
$x_2 = -0.33998$	$w_2 = 0.65214$	$w_2 e^{-x_2^2} = 0.65214 * e^{-(-0.33998)^2} = 0.5809$
$x_3 = 0.33998$	$w_3 = 0.65214$	$w_3 e^{-x_3^2} = 0.65214 * e^{-(0.33998)^2} = 0.5809$
$x_4 = 0.86114$	$w_4 = 0.34785$	$w_4 e^{-x_4^2} = 0.34785 * e^{-(0.86114)^2} = 0.1657$

**Λύση.** Είναι (Σχ. 8.1.2 - 1)

$$\int_{-1}^1 e^{-x^2} dx \approx w_1 e^{-x_1^2} + w_2 e^{-x_2^2} + w_3 e^{-x_3^2} + w_4 e^{-x_4^2},$$

όταν οι ρίζες  $x_i$  και τα βάρη  $w_i$ ;  $i = 1, 2, 3, 4$  δίνονται από τον Πίνακα 8.1.2 - 1. Τότε από τα αποτελέσματα του Πίνακα 8.1.2 - 2 σύμφωνα και με τον τύπο (8.1.2 - 5), όταν στην περίπτωση αυτή είναι  $g(x_i) = f(x_i)$ , προκύπτει ότι

$$\int_{-1}^1 e^{-x^2} dx \approx 1.4932 \quad (\text{ακριβής τιμή } I = \sqrt{\pi} \operatorname{Erf}(1) \approx 1.49365).$$

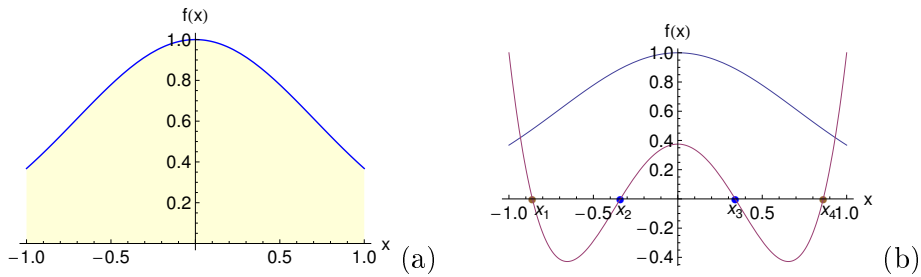
### Σημείωση 8.1.2 - 2

Όταν το διάστημα ολοκλήρωσης δεν είναι το  $[-1, 1]$ , τότε η παραπάνω λύση απαιτεί αρχικά την εφαρμογή του μετασχηματισμού (8.1.2 - 3), όπως αυτό γίνεται στο παρακάτω παράδειγμα.

### Παράδειγμα 8.1.2 - 2

Όμοια με τον τύπο των Gauss-Legendre για 4 σημεία το ολοκλήρωμα (Σχ. 8.1.2 - 2)

$$I = \int_0^1 e^{-x^2} dx.$$



**Σχήμα** 8.1.2 - 1: Παράδειγμα 8.1.2 - 1. (a) Η μπλε καμπύλη είναι το διάγραμμα της συνάρτησης  $e^{-x^2}$ , ενώ το εμβαδόν του σχήματος ισούται με την τιμή του ολοκληρώματος  $\int_{-1}^1 e^{-x^2} dx$ . (b) Η κόκκινη καμπύλη είναι το διάγραμμα του πολυωνύμου  $P_4(x) = \frac{1}{8}(3 - 30x^2 + 35x^4)$  του Legendre, ενώ τα σημεία  $x_1, x_2, x_3, x_4$  είναι οι ρίζες του

**Λύση.** Αρχικά με τον τύπο (8.1.2-3) γίνεται μετασχηματισμός του διαστήματος ολοκλήρωσης στο διάστημα  $[-1, 1]$  θέτοντας

$$x = \frac{(1-0)t}{2} + \frac{1+0}{2} = 0.5t + 0.5, \quad \text{οπότε}$$

$$dx = d(0.5t + 0.5) = (0.5t + 0.5)' dt = 0.5 dt.$$

Άρα

$$I = \int_0^1 e^{-x^2} dx = \int_{-1}^1 e^{-(0.5t+0.5)^2} 0.5 dt = \int_{-1}^1 0.5 e^{-(0.5x+0.5)^2} dx = \int_{-1}^1 g(x) dx,$$

όταν τεθεί για ευκολία  $x$  αντί του  $t$  και  $g(x) = 0.5 e^{-(0.5x+0.5)^2}$ . Τότε από τα αποτελέσματα του Πίνακα 8.1.2 - 3, όταν

$$w_1 g(x_1) = 0.34785 \left[ 0.5 e^{-[0.5(-0.86114)+0.5]^2} \right] = 0.1730886$$

$$w_2 g(x_2) = 0.65214 \left[ 0.5 e^{-[0.5(-0.33998)+0.5]^2} \right] = 0.2924242$$

$$w_3 g(x_3) = 0.65214 \left[ 0.5 e^{-[0.5(0.33998)+0.5]^2} \right] = 0.208143$$

$$w_4 g(x_4) = 0.34785 \left[ 0.5 e^{-[0.5(0.86114)+0.5]^2} \right] = 0.07316108,$$

Πίνακας 8.1.2 - 3: Παράδειγμα 8.1.2 - 2

$x_i$	$w_i$	$w_i g(x_i)$
$x_1 = -0.86114$	$w_1 = 0.34785$	$w_1 g(x_1) = 0.173\,0886$
$x_2 = -0.33998$	$w_2 = 0.65214$	$w_2 g(x_2) = 0.292\,4242$
$x_3 = 0.33998$	$w_3 = 0.65214$	$w_3 g(x_3) = 0.208\,143$
$x_4 = 0.86114$	$w_4 = 0.34785$	$w_4 g(x_4) = 0.073\,161\,08$

σύμφωνα και με τον τύπο (8.1.2 - 5) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{-x^2} dx &= \int_{-1}^1 0.5 e^{-(0.5x+0.5)^2} dx = \int_{-1}^1 g(x) dx \\ &\approx w_1 g(x_1) + w_2 g(x_2) + w_3 g(x_3) + w_4 g(x_4) \\ &= 0.746\,8169. \end{aligned}$$

Η θεωρητική τιμή είναι 0.7468241 και το απόλυτο σφάλμα  $e = 7.213\,364 \times 10^{-6}$ .

### Παράδειγμα 8.1.2 - 3

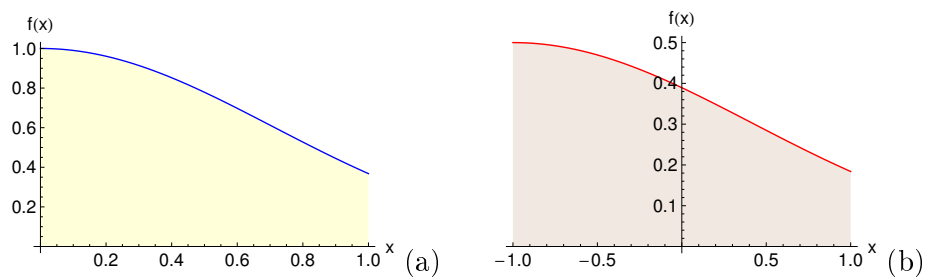
Έστω το ολοκλήρωμα (Σχ. 8.1.2 - 3)

$$I = \int_0^{0.6} \frac{x dx}{\sqrt{1+x^4}}.$$

Να λυθεί με τον κανόνα των Gauss-Seidel για 3, αντίστοιχα 6 σημεία και να γίνει σύγκριση των αποτελεσμάτων με τη θεωρητική τιμή

$$I = \frac{1}{2} \operatorname{arcsinh}(x^2) \Big|_0^{0.6} \approx 0.176\,3227$$

και την αντίστοιχη λύση που προκύπτει από τους σύνθετους κανόνες του τραπεζίου, Simpson και Simpson 3/8, όταν  $h = 0.1$ .



**Σχήμα** 8.1.2 - 2: Παράδειγμα 8.1.2 - 2. (a) Η μπλε καμπύλη είναι το διάγραμμα της συνάρτησης  $e^{-x^2}$ , ενώ το εμβαδόν του σχήματος ισούται με την τιμή του ολοκληρώματος  $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ . (b) Η κόκκινη καμπύλη είναι το διάγραμμα της συνάρτησης  $0.5e^{-(0.5x+0.5)^2}$ , ενώ το εμβαδόν του σχήματος ισούται με την τιμή του ολοκληρώματος  $\int_{-1}^1 0.5e^{-(0.5x+0.5)^2} dx$

**Λύση.** Κανόνας των Gauss-Seidel για 3 σημεία (Σχ. 8.1.2 - 4a):

αρχικά με τον τύπο (8.1.2 - 3) γίνεται μετασχηματισμός του διαστήματος ολοκλήρωσης στο διάστημα  $[-1, 1]$  θέτοντας

$$x = \frac{(0.6 - 0)t}{2} + \frac{0.6 + 0}{2} = 0.3t + 0.3, \quad \text{οπότε}$$

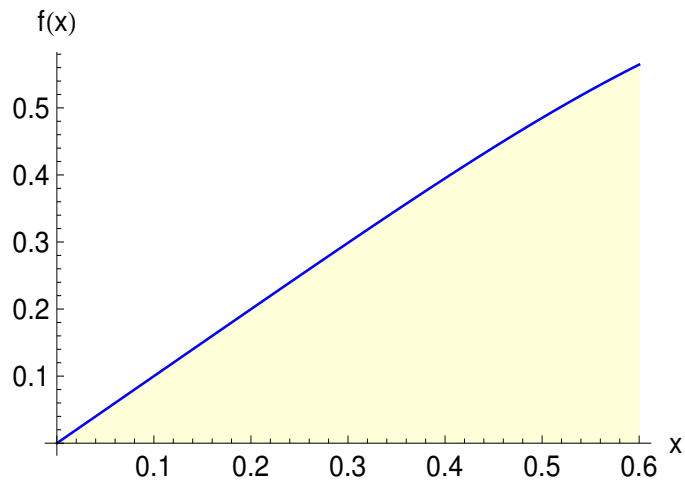
$$dx = d(0.3t + 0.3) = (0.3t + 0.3)' dt = 0.3 dt.$$

Άρα

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{0.6} \frac{x dx}{\sqrt{1+x^4}} = \int_{-1}^1 \frac{0.3t + 0.3}{\sqrt{1 + (0.3t + 0.3)^4}} 0.3 dt \\ &= \int_{-1}^1 \frac{0.9(x+1)}{\sqrt{1 + (0.3x + 0.3)^4}} dx = \int_{-1}^1 g(x) dx, \end{aligned}$$

όταν όμοια έχει τεθεί για ευκολία  $x$  αντί του  $t$  και  $g(x) = \frac{0.9(x+1)}{\sqrt{1+(0.3x+0.3)^4}}$ . Τότε από τα αποτελέσματα του Πίνακα 8.1.2 - 4, όταν

$$w_1 g(x_1) = 0.55555556 \left[ \frac{0.9(-0.77459667 + 1)}{\sqrt{1 + [0.3(-0.77459667) + 0.3]^4}} \right] = 0.01127005$$



**Σχήμα** 8.1.2 - 3: Παράδειγμα 8.1.2 - 3. Η μπλε καμπύλη είναι το διάγραμμα της συνάρτησης  $\frac{x}{\sqrt{1+x^4}}$ , ενώ το εμβαδόν του σχήματος ισούται με την τιμή του ολοκληρώματος  $\int_0^{0.6} \frac{x dx}{\sqrt{1+x^4}} \approx 0.1763227$

**Πίνακας** 8.1.2 - 4: Παράδειγμα 8.1.2 - 3: κανόνες των Gauss-Seidel για 3 σημεία

$x_i$	$w_i$	$w_i g(x_i)$
$x_1 = -0.77459667$	$w_1 = 0.55555556$	$w_1 g(x_1) = 0.01127005$
$x_2 = 0$	$w_2 = 0.88888889$	$w_2 g(x_2) = 0.07967796$
$x_3 = 0.77459667$	$w_3 = 0.55555556$	$w_3 g(x_3) = 0.08536724$

**Πίνακας 8.1.2 - 5:** Παράδειγμα 8.1.2 - 3: κανόνας των Gauss-Seidel για 6 σημεία

$x_i$	$w_i$	$w_i g(x_i)$
$x_1 = -0.9324695$	$w_1 = 0.17132449$	$w_1 g(x_1) = 0.001\,041\,27$
$x_2 = -0.66120939$	$w_2 = 0.36076157$	$w_2 g(x_2) = 0.010\,999\,45$
$x_3 = -0.23861919$	$w_3 = 0.46791396$	$w_3 g(x_3) = 0.032\,019\,91$
$x_4 = 0.23861919$	$w_4 = 0.46791396$	$w_4 g(x_4) = 0.051\,670\,82$
$x_5 = 0.66120939$	$w_5 = 0.36076157$	$w_5 g(x_5) = 0.052\,346\,69$
$x_6 = -0.9324695$	$w_6 = 0.17132449$	$w_6 g(x_6) = 0.028\,244\,52$

$$w_2 g(x_2) = 0.88888889 \left[ \frac{0.9(0+1)}{\sqrt{1+(0.3*0+0.3)^4}} \right] = 0.0796\,7796$$

$$w_3 g(x_3) = 0.55555556 \left[ \frac{0.9(0.77459667+1)}{\sqrt{1+(0.3*0.77459667+0.3)^4}} \right] = 0.0853\,6724,$$

σύμφωνα και με τον τύπο (8.1.2 – 5) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \int_0^{0.6} \frac{x dx}{\sqrt{1+x^4}} &= \int_{-1}^1 \frac{0.9(x+1)}{\sqrt{1+(0.3x+0.3)^4}} dx = \int_{-1}^1 g(x) dx \\ &\approx w_1 g(x_1) + w_2 g(x_2) + w_3 g(x_3) \\ &= 0.176\,3152, \end{aligned}$$

δηλαδή υπάρχει απόλυτο σφάλμα  $e = 7.422\,724 \times 10^{-6}$ .

Κανόνας των Gauss-Seidel για 6 σημεία (Σχ. 8.1.2 - 4b):

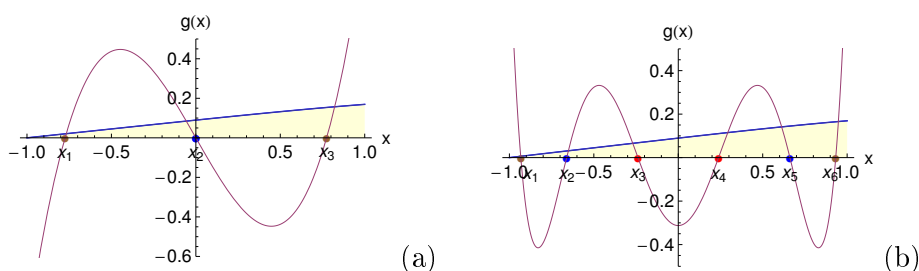
όμοια από τα αποτελέσματα του Πίνακα 8.1.2 - 5, σύμφωνα και με τον τύπο (8.1.2 – 5), έχουμε

$$\int_0^{0.6} \frac{x dx}{\sqrt{1+x^4}} = \int_{-1}^1 \frac{0.9(x+1)}{\sqrt{1+(0.3x+0.3)^4}} dx = \int_{-1}^1 g(x) dx$$

$$\approx w_1 g(x_1) + w_2 g(x_2) + w_3 g(x_3) + w_4 g(x_4)$$

$$+ w_5 g(x_5) + w_6 g(x_6) = 0.1763227$$

και συγκρίνοντας με τη θεωρητική τιμή προκύπτει απόλυτο σφάλμα  $e = 3.450799 \times 10^{-9}$ .



**Σχήμα 8.1.2 - 4:** Παράδειγμα 8.1.2 - 3: Η μπλε καμπύλη είναι το διάγραμμα της συνάρτησης  $g(x) = \frac{0.9(x+1)}{\sqrt{1+(0.3x+0.3)^4}}$ . Η κόκκινη καμπύλη είναι η γραφική παράσταση του πολυωνύμου: (a)  $P_3(x) = \frac{1}{2}(-3x + 5x^3)$  του Legendre, ενώ τα σημεία  $x_1, x_2, x_3$  είναι οι ρίζες του και (b)  $P_6(x) = \frac{1}{16}(-5 + 105x^2 - 315x^4 + 231x^6)$  του Legendre, ενώ τα σημεία  $x_1, \dots, x_6$  είναι οι ρίζες του

### Σύνθετοι κανόνες

Σύμφωνα με τις τιμές του Πίνακα 8.1.2 - 6 προκύπτουν τα εξής:

#### Τραπεζίου

$$I \approx \frac{h}{2} \{f(x_0) + 2[f(x_1) + \dots + f(x_5)] + f(x_6)\} = 0.176094$$

με απόλυτο σφάλμα:  $e = 0.00022854$ .

#### Simpson

$$I \approx \frac{h}{3} \{f(x_0) + 4[f(x_1) + f(x_3) + f(x_5)]$$

$$+ 2[f(x_2) + f(x_4)] + f(x_6)\} = 0.17632$$

**Πίνακας 8.1.2 - 6:** Παράδειγμα 8.1.2 - 3 Σύνθετοι κανόνες: οι τιμές των σημείων  $x_i$  και των τιμών  $f(x_i) = \frac{x_i}{\sqrt{1+x_i^4}}$

$x_i$	$f(x_i)$	$x_i$	$f(x_i)$
$x_0 = 0.0$	0	$x_4 = 0.4$	0.394 976
$x_1 = 0.1$	0.099 995	$x_5 = 0.5$	0.485 071
$x_2 = 0.2$	0.199 840	$x_6 = 0.6$	0.564 532
$x_3 = 0.3$	0.298 792		

με απόλυτο σφάλμα:  $e = 2.676\ 308 \times 10^{-6}$ .

### 3/8 του Simpson

$$I \approx \frac{3h}{8} \{f(x_0) + 3[f(x_1) + f(x_4)] + 3[f(x_2) + f(x_5)] + 2f(x_3) + f(x_6)\} = 0.176\ 3162$$

με απόλυτο σφάλμα:  $e = 6.470\ 302 \times 10^{-6}$ .

Συγκρίνοντας το ελάχιστο των σφαλμάτων των παραπάνω σύνθετων κανόνων με το αντίστοιχο σφάλμα  $e = 3.450\ 799 \times 10^{-9}$  του κανόνα των Gauss-Legendre για 6 σημεία έχουμε μια προφανή πειραματική επαλήθευση της Παρατήρησης 8.1.2 - 1(i).

## Άσκηση

Έστω το ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^{0.6} \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

- i) Να λυθεί με τον κανόνα των Gauss-Seidel για 6 σημεία και να γίνει σύγκριση των αποτελεσμάτων με τη θεωρητική τιμή

$$I = \frac{1}{3} (x^2 - 2) \sqrt{1+x^2} \Big|_0^{0.6} \approx 0.029\ 149\ 26$$



και την αντίστοιχη λύση που προκύπτει από τους σύνθετους κανόνες του τραπεζίου, Simpson και 3/8 του Simpson, όταν  $h = 0.1$ .

ii) (προαιρετικά) Το ολοκλήρωμα να γραφεί ως εξής:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{0.6} \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int_0^{0.1} \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+x^2}} + \dots + \int_{0.5}^{0.6} \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+x^2}} \\ &= I_1 + \dots + I_6. \end{aligned}$$

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα  $I$  εφαρμόζοντας σε κάθε ένα από τα παραπάνω ολοκληρώματα  $I_i$ ;  $i = 1, \dots, 6$  τον κανόνα των Gauss-Seidel για 6 σημεία και να γίνει σύγκριση του αποτελέσματος με τον αντίστοιχο της περίπτωσης (i). Στη συνέχεια να γραφεί το πρόγραμμα λύσης της (ii) με το MATLAB.

---

<sup>4</sup>Απαγορεύεται η αναδημοσίευση ή αναπαραγωγή του παρόντος στο σύνολό του ή τμημάτων του χωρίς τη γραπτή άδεια του Καθ. Α. Μπράτσου.

E-mail: bratsos@teiath.gr URL: <http://users.teiath.gr/bratsos/>



# Βιβλιογραφία

- [1] Ακρίβης, Γ., Δουγαλής, Β. (1995), Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Αθήνα, ISBN 978-960-524-022-6.
- [2] Μπράτσος, Α. (2011), Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, ISBN 978-960-351-874-7.
- [3] Μπράτσος, Α. (2002), Ανώτερα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, ISBN 960-351-453-5/978-960-351-453-4.
- [4] Στεφανάκος, Χ., Προγραμματισμός Η/Υ με MATLAB, Γκούρδας Εκδοτική, ISBN 978-960-387-856-8.
- [5] Bratsos, A. G., The solution of the two-dimensional sine-Gordon equation using the method of lines, J. Comput. Appl. Math., vol. 206 No. 1 (2006), pp. 251-277.
- [6] Burden, Richard L. and Faires, J. Douglas (2000), Numerical Analysis (7th ed.), Brooks/Cole, ISBN 978-0-534-38216-2.
- [7] Conte, S. D., Carl de Boor (1981), Elementary Numerical Analysis: An Algorithmic Approach (3rd ed.), McGraw-Hill Book Company, ISBN 978-0-07-012447-9.
- [8] Don, E., Schaum's Outlines - Mathematica (2006), Εκδόσεις Κλειδάριθμος, ISBN 978-960-461-000-6.
- [9] Kendall A. Atkinson (1989), An Introduction to Numerical Analysis (2nd ed.), John Wiley & Sons, ISBN 0-471-50023-2.

- [10] Leader, Jeffery J. (2004), Numerical Analysis and Scientific Computation, Addison Wesley, ISBN 978-0-201-73499-7.
- [11] Schatzman, M. (2002), Numerical Analysis: A Mathematical Introduction, Clarendon Press, Oxford, ISBN 978-0-19-850279-1.
- [12] Stoer, Josef; Bulirsch, Roland (2002), Introduction to Numerical Analysis (3rd ed.), Springer, ISBN 978-0-387-95452-3.
- [13] Sli, E. and Mayers, D. (2003), An Introduction to Numerical Analysis, Cambridge University Press, ISBN 978-0-521-00794-8.

### Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- [http://en.wikipedia.org/wiki/Main\\_Page](http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page)
- <http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm>
- <http://mathworld.wolfram.com/>
- <http://eom.springer.de/>