Μάθημα 4

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

4.1 Εισαγωγικές έννοιες

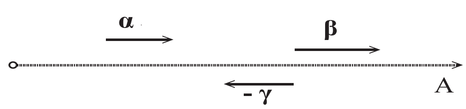
Κρίνεται σκόπιμο πριν από τον ορισμό των διανυσματικών συναρτήσεων να γίνει μια υπενθύμιση στον αναγνώστη ορισμένων βασικών εννοιών του διανυσματικού λογισμού.

Ορισμός 4.1 - 1. *Λέγεται* **προσανατολισμένη ευθεία** *ή* **άξονας** *μια ευθεία, έστω ε, στην οποία έχει οριστεί ένα σταθερό σημείο O, ένα ευθύγραμμο τμήμα OA που το μήκος του θεωρείται σαν μονάδα μέτρησης, δηλαδή $(OA) = 1$ και θετική η φορά από το O προς το A (Σχ. 4.1 - 1).*

Τότε προφανώς η φορά από το A προς το O θα είναι αρνητική.

Αν τώρα M είναι ένα άλλο τυχόν σημείο της ε, θα πρέπει για το μέτρο της απόστασής του από το O να ισχύει $(OM) = x(OA) = x$. Ο αριθμός x ορίζει τότε την **τετμημένη** του σημείου M. Είναι προφανές ότι η τετμημένη είναι θετική, όταν το σημείο είναι δεξιά του O. Αντίστροφα τώρα, αν είναι γνωστή η τετμημένη ενός σημείου, τότε θα είναι γνωστή κατά μονοσήμαντο τρόπο και η θέση του στον άξονα. Σύμφωνα με τα παραπάνω, επειδή σε κάθε σημείο του άξονα αντιστοιχεί ακριβώς ένας πραγματικός αριθμός και αντίστροφα

Σχήμα 4.1 - 1: προσανατολισμένη ευθεία ή άξονας



Σχήμα 4.1 - 2: συμβολισμός διανυσμάτων

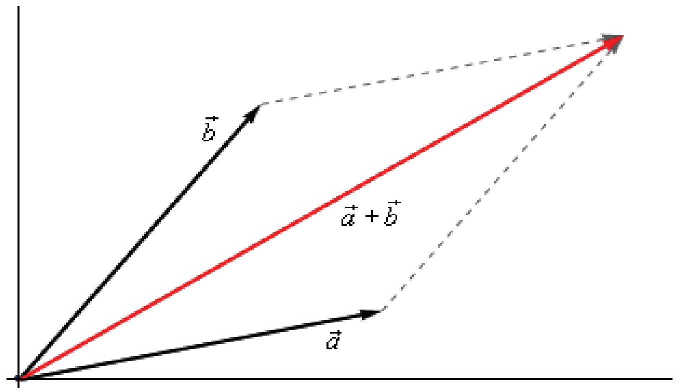
(αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία), η ευθεία ε ταυτίζεται με το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\Re$.

Σύμφωνα και με τον Ορισμό 4.1 - 1 έχουμε:

Ορισμός 4.1 - 2 (διανύσματος). *Ορίζεται σαν διάνυσμα κάθε προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα επί του ε ή παράλληλου προς αυτόν.*

Τα διανύσματα θα συμβολίζονται στο εξής με $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ (Σχ. 4.1 - 2) κ.λπ.[1]

[1]Συνηθίζεται στα βιβλία ο συμβολισμός με έντονα γράμματα, όπως $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ κ.λπ., αλλά στην πράξη χρησιμοποιείται επίσης και ο συμβολισμός $\overrightarrow{\alpha}$, $\overrightarrow{\beta}$ κ.λπ.



Σχήμα 4.1 - 3: πρόσθεση διανυσμάτων

Άλγεβρα διανυσμάτων

Ισότητα

Ορισμός 4.1 - 3. *Δύο διανύσματα* $\boldsymbol{\alpha}$ *και* $\boldsymbol{\beta}$ *θα είναι* **ίσα**, *όταν έχουν το ίδιο μέτρο, διεύθυνση και φορά.*

Τότε γράφεται $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}$, ενώ σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση τα διανύσματα θα είναι διαφορετικά, δηλαδή $\boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{\beta}$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι η ισότητα ορίζει μία σχέση ισοδυναμίας.

Πρόσθεση

Ορισμός 4.1 - 4. *Το* **άθροισμα** $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$ *των διανυσμάτων* $\boldsymbol{\alpha}$ *και* $\boldsymbol{\beta}$ *ορίζεται ότι είναι το διάνυσμα που προκύπτει, όταν το* $\boldsymbol{\beta}$ *γίνει διαδοχικό του* $\boldsymbol{\alpha}$, *δηλαδή η αρχή του* $\boldsymbol{\beta}$ *συμπέσει με το τέλος του* $\boldsymbol{\alpha}$.

Τότε το $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$ έχει σαν αρχή την αρχή του $\boldsymbol{\alpha}$ και τέλος το τέλος του $\boldsymbol{\beta}$. Ο τρόπος αυτός της πρόσθεσης είναι γνωστός και σαν **κανόνας του παραλληλογράμμου** (Σχ. 4.1 - 3).

Γινόμενο με πραγματικό αριθμό

Ορισμός 4.1 - 5. *Το γινόμενο ενός διανύσματος* $\boldsymbol{\alpha}$ *με τον πραγματικό αριθμό* λ *ορίζεται ότι είναι το διάνυσμα* $\lambda\boldsymbol{\alpha}$, *που έχει μέτρο* $|\lambda|$ *φορές το* *μέτρο του* $\boldsymbol{\alpha}$*, ίδια διεύθυνση με το* $\boldsymbol{\alpha}$ *και φορά*

- *ίδια με του* $\boldsymbol{\alpha}$*, όταν* $\lambda > 0$*,*
- *αντίθετη με του* $\boldsymbol{\alpha}$*, όταν* $\lambda < 0$*,*
- *είναι το μηδενικό διάνυσμα, όταν* $\lambda = 0$*.*

Μοναδιαίο διάνυσμα

Ορισμός 4.1 - 6. *Ορίζεται σαν* **μοναδιαίο** *το διάνυσμα που το μέτρο του ισούται με τη μονάδα μέτρησης.*

Παραδείγματα τέτοιων διανυσμάτων είναι σε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων $Oxyz$ τα μοναδιαία διανύσματα $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ και $\mathbf{k}$ στους άξονες Ox, Oy και Oz. Υπενθυμίζεται ότι ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων στο οποίο έχουν οριστεί τα μοναδιαία διανύσματα των αξόνων του θα λέγεται **ορθοκανονικό**.

Στη συνέχεια ορίζεται το μοναδιαίο διάνυσμα κατά τη διεύθυνση του τυχόντος διανύσματος $\boldsymbol{\alpha}$.

Ορισμός 4.1 - 7. *Έστω* $\boldsymbol{\alpha}$ *τυχαίο διάνυσμα με* $\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$*. Τότε ορίζεται σαν* **μοναδιαίο διάνυσμα** *ή σαν* **διανυσματική μονάδα** *κατά τη διεύθυνση του* $\boldsymbol{\alpha}$ *και συμβολίζεται με* $\boldsymbol{\alpha}_0$ *το διάνυσμα*

$$\boldsymbol{\alpha}_0 = \frac{\boldsymbol{\alpha}}{|\boldsymbol{\alpha}|}\,. \tag{4.1 - 1}$$

Έχοντας υπ' όψιν τον Ορισμό 4.1 - 5, από την $(4.1 - 1)$ διαδοχικά προκύπτει

$$|\boldsymbol{\alpha}_0| = \left|\frac{1}{|\boldsymbol{\alpha}|}\,\boldsymbol{\alpha}\right| = \frac{1}{|\boldsymbol{\alpha}|}\;|\boldsymbol{\alpha}| = 1, \quad \text{δηλαδή} \quad |\boldsymbol{\alpha}_0| = 1.$$

Συντεταγμένες διανύσματος

Έστω ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων $Oxyz$. Διακρίνονται οι παρακάτω περιπτώσεις:

i) Η αρχή του διανύσματος να συμπίπτει με την αρχή των συντεταγμένων O. Τότε το διάνυσμα αυτό λέγεται **διάνυσμα θέσης** ή **διανυσματική ακτίνα** (position ή location ή και radius vector) και συμβολίζεται με $\mathbf{r}$. Αν x, y και z είναι οι προβολές του $\mathbf{r}$ στους άξονες συντεταγμένων, τότε[2]

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}\left(x, y, z\right). \tag{4.1 - 2}$$

Επομένως στην περίπτωση αυτή το άθροισμα των συνιστωσών διανυσμάτων $x\mathbf{i}$, $y\mathbf{j}$ και $z\mathbf{k}$ θα ορίζει το διάνυσμα $\mathbf{r}$, δηλαδή η αναλυτική του έκφραση είναι

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}. \tag{4.1 - 3}$$

ii) Γενικά, όταν το $\boldsymbol{\alpha}$ είναι ένα τυχόν διάνυσμα του 3-διάστατου χώρου με αρχή το σημείο $A\left(x_1, y_1, z_1\right)$ και τέλος το $B\left(x_2, y_2, z_2\right)$, οι συντεταγμένες του θα ορίζονται από τις προβολές του στους άξονες συντεταγμένων και θα είναι οι πραγματικοί αριθμοί $\alpha_1 = x_2 - x_1$, $\alpha_2 = y_2 - y_1$ και $\alpha_3 = z_2 - z_1$. Τότε όμοια με την περίπτωση (i) θα είναι στην περίπτωση αυτή[3]

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}\left(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\right) = \boldsymbol{\alpha}\left(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\right), \tag{4.1 - 4}$$

ενώ η αναλυτική έκφρασή του είναι

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha} &= \alpha_1\mathbf{i} + \alpha_2\mathbf{j} + \alpha_3\mathbf{k} \\ &= \left(x_2 - x_1\right)\mathbf{i} + \left(y_2 - y_1\right)\mathbf{j} + \left(z_2 - z_1\right)\mathbf{k}. \end{aligned} \tag{4.1 - 5}$$

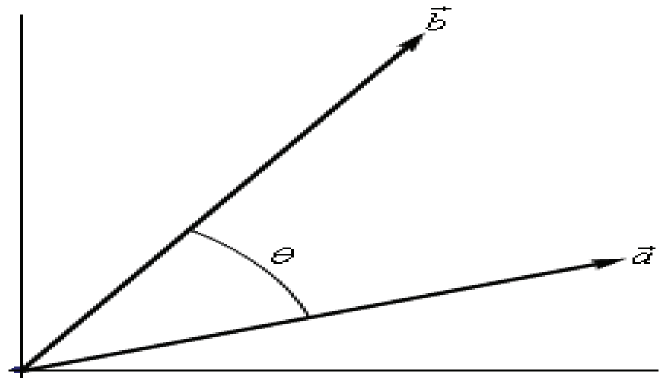
Τότε τα μέτρα των διανυσμάτων $\mathbf{r} = \mathbf{r}\left(x, y, z\right)$, αντίστοιχα $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}\left(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\right)$ συναρτήσει των συντεταγμένων ισούται με

$$r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \text{αντίστοιχα} \tag{4.1 - 6}$$

$$\alpha = |\boldsymbol{\alpha}| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}. \tag{4.1 - 7}$$

[2] Επίσης συμβολίζεται με $\mathbf{r} = \langle x, y, z\rangle$.

[3] Όμοια με $\boldsymbol{\alpha} = \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\rangle = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\rangle$.



Σχήμα 4.1 - 4: εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\boldsymbol{\alpha}$ και $\boldsymbol{\beta}$

Παράδειγμα 4.1 - 1

Έστω το διάνυσμα $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}(1, -2, 3)$. Τότε $|\boldsymbol{\alpha}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{14}$, οπότε σύμφωνα με την $(4.1 - 1)$ το μοναδιαίο διάνυσμα $\boldsymbol{\alpha}_0$ κατά τη διεύθυνση του $\boldsymbol{\alpha}$ είναι

$$\boldsymbol{\alpha}_0 = \frac{\boldsymbol{\alpha}}{|\boldsymbol{\alpha}|} = \frac{1}{\sqrt{14}}\left(\mathbf{i} - 2\,\mathbf{j} + 3\,\mathbf{k}\right).$$

Εσωτερικό γινόμενο

Ορισμός 4.1 - 8 (εσωτερικό γινόμενο). *Έστω τα διανύσματα* $\boldsymbol{\alpha}$ *και* $\boldsymbol{\beta}$ *με* $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta} \neq \mathbf{0}$. *Τότε ορίζεται σαν εσωτερικό γινόμενο (dot product) και συμβολίζεται* [4] *με* $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}$, *ο πραγματικός αριθμός που ισούται με το γινόμενο των μέτρων των διανυσμάτων επί το συνημίτονο της γωνίας* θ, *που σχηματίζουν τα δύο αυτά διανύσματα (Σχ. 4.1 - 4), δηλαδή*

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} = |\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}| \cos\theta \quad \textit{με} \quad 0 \leq \theta \leq \pi. \tag{4.1 - 8}$$

Ειδικά, όταν ένα ή και τα δύο διανύσματα ισούται με το μηδενικό διάνυσμα, τότε το εσωτερικό τους γινόμενο ορίζεται ίσο με το μηδέν.

[4] Συμβολίζεται επίσης με $\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle$.

Ιδιότητες

i) $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\alpha}$ αντιμεταθετική,

ii) $\boldsymbol{\alpha}\cdot(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})=\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\gamma}$ επιμεριστική,

iii) $(\lambda\boldsymbol{\alpha})\cdot\boldsymbol{\beta}=\lambda\,(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}\cdot(\lambda\boldsymbol{\beta}),\quad$ όταν $\lambda\in\Re$.

Συνθήκη καθετότητας

Όταν $\theta=\pi/2$, από την (4.1−8) προκύπτει ότι, αν τα διανύσματα είναι κάθετα μεταξύ τους, είναι

$$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}=0 \tag{4.1 - 9}$$

και αντίστροφα. Άρα η $(4.1-9)$ εκφράζει τη **συνθήκη καθετότητας** δύο διανυσμάτων.

Επίσης, αν $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}=\pm|\boldsymbol{\alpha}|\,|\boldsymbol{\beta}|$, τότε ή $\theta=0$ ή $\theta=\pi$, οπότε τα διανύσματα είναι **συγγραμμικά** (collinear).

Υπολογισμός συναρτήσει των συντεταγμένων

Αν $\boldsymbol{\alpha}=\alpha_1\mathbf{i}+\alpha_2\mathbf{j}+\alpha_3\mathbf{k}$ και $\boldsymbol{\beta}=\beta_1\mathbf{i}+\beta_2\mathbf{j}+\beta_3\mathbf{k}$ είναι δύο μη μηδενικά διανύσματα, τότε, επειδή τα μοναδιαία διανύσματα $\mathbf{i}=(1,0,0)$, $\mathbf{j}=(0,1,0)$ και $\mathbf{k}=(0,0,1)$ είναι ανά δύο κάθετα μεταξύ τους, ενώ το μέτρο τους ισούται[5] με 1, σύμφωνα και με την $(4.1-9)$ εύκολα προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta} &= \langle\alpha_1\mathbf{i}+\alpha_2\mathbf{j}+\alpha_3\mathbf{k}\rangle\cdot\langle\beta_1\mathbf{i}+\beta_2\mathbf{j}+\beta_3\mathbf{k}\rangle=\beta_1\,(\alpha_1\mathbf{i}+\alpha_2\mathbf{j}+\alpha_3\mathbf{k})\cdot\mathbf{i}\\ &\quad+\beta_2\,(\alpha_1\mathbf{i}+\alpha_2\mathbf{j}+\alpha_3\mathbf{k})\cdot\mathbf{j}+\beta_3\,(\alpha_1\mathbf{i}+\alpha_2\mathbf{j}+\alpha_3\mathbf{k})\cdot\mathbf{k}\\ &= \beta_1\,(\alpha_1\,\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}+\alpha_2\,\mathbf{j}\cdot\mathbf{i}+\alpha_3\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{i})+\beta_2\,(\alpha_1\,\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}+\alpha_2\,\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}+\alpha_3\mathbf{k}\cdot\mathbf{j})\\ &\quad+\beta_3\,(\alpha_1\,\mathbf{i}\cdot\mathbf{k}+\alpha_2\,\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}+\alpha_3\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{k})=\cdots=\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3,\end{aligned}$$

δηλαδή

$$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}=\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3. \tag{4.1 - 10}$$

[5] Από την $(4.1-9)$ προκύπτει ότι $|\,\mathbf{i}\,|=\sqrt{1^2+0+0}=1$, $|\,\mathbf{j}\,|=1$ και $|\,\mathbf{k}\,|=1$, ενώ σύμφωνα με τον Ορισμό $(4.1-8)$ είναι $\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}=|\,\mathbf{i}\,|\,|\,\mathbf{j}\,|\cos\frac{\pi}{2}=1\cdot1\cdot0=0$. Όμοια $\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}=0$, $\mathbf{k}\cdot\mathbf{i}=0$ κ.λπ.

Από την $(4.1-10)$ προκύπτει

$$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\alpha}=|\boldsymbol{\alpha}|^2=\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2. \qquad (4.1\text{ - }11)$$

Παράδειγμα 4.1 - 2

Έστω τα διανύσματα $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}(1,2,-3)$ και $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}(-1,4,2)$. Τότε σύμφωνα με την $(4.1-10)$ είναι

$$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}=1\cdot(-1)+2\cdot4+(-3)\cdot2=1.$$

Εξωτερικό γινόμενο

Ορισμός 4.1 - 9 (εξωτερικό γινόμενο). *Ορίζεται σαν εξωτερικό γινόμενο (cross product) των διανυσμάτων* $\boldsymbol{\alpha}$ *και* $\boldsymbol{\beta}$*, όταν* $\boldsymbol{\alpha},\,\boldsymbol{\beta}\neq\mathbf{0}$ *και συμβολίζεται με* $\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}$ *το διάνυσμα* $\boldsymbol{\gamma}$ *με τις παρακάτω ιδιότητες:*

i) το μέτρο του ισούται με

$$\gamma=|\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}|\sin\theta,\quad \textit{όταν}\quad 0\leq\theta\leq\pi \qquad (4.1\text{ - }12)$$

με θ *τη γωνία που διαγράφει το διάνυσμα* $\boldsymbol{\alpha}$*, όταν στρέφεται κατά τη δεξιόστροφη φορά, μέχρις ότου συμπέσει με το διάνυσμα* $\boldsymbol{\beta}$*,*

ii) είναι κάθετο στα $\boldsymbol{\alpha}$ *και* $\boldsymbol{\beta}$ *και,*

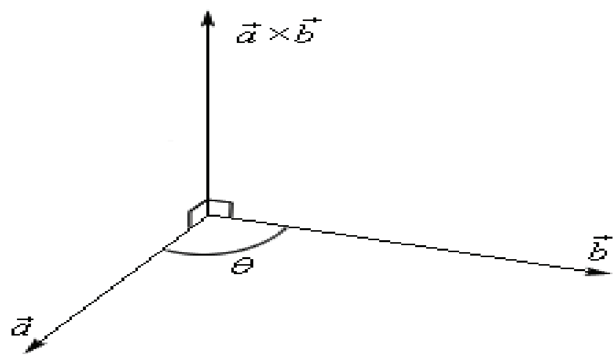
iii) τα $\boldsymbol{\alpha}$*,* $\boldsymbol{\beta}$ *και* $\boldsymbol{\gamma}$ *με τη σειρά αυτή ορίζουν δεξιόστροφο σύστημα (Σχ. 4.1 - 5).*

Στην περίπτωση που το ένα ή και τα δύο διανύσματα ισούται με το μηδενικό διάνυσμα ή επίσης τα $\boldsymbol{\alpha}$*,* $\boldsymbol{\beta}$ *είναι συγγραμμικά* $(\theta=0\,\pi)$*, τότε το εξωτερικό γινόμενό τους ορίζεται να είναι το μηδενικό διάνυσμα.*

Αλγεβρικές ιδιότητες

i) $\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}=-\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\alpha}$ μη αντιμεταθετική (anticommutative),

ii) $\boldsymbol{\alpha}\times(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})=\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\gamma}$ και $(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})\times\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{\alpha}$ επιμεριστική (distributive) ως προς την πρόσθεση,



Σχήμα 4.1 - 5: εξωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\boldsymbol{\alpha}$ και $\boldsymbol{\beta}$

iii) $\lambda\,(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}) = (\lambda\boldsymbol{\alpha})\times\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}\times(\lambda\boldsymbol{\beta})$ με $\lambda \in \Re$,

iv $\boldsymbol{\alpha}\times(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\gamma}) = \boldsymbol{\beta}\times(\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\gamma}\times(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{0}$ (ταυτότητα του Jacobi).

Στο εξωτερικό γινόμενο δεν ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα και ο νόμος της διαγραφής.

Γεωμετρικές ιδιότητες

i) αν τα διανύσματα είναι συγγραμμικά, τότε το εξωτερικό τους γινόμενο ισούται με το μηδενικό διάνυσμα και αντίστροφα - βλέπε και Ορισμό 4.1 - 9.

ii) Αν τα διανύσματα $\boldsymbol{\alpha}$ και $\boldsymbol{\beta}$ έχουν κοινή αρχή, τότε το μέτρο του εξωτερικού γινομένου τους ισούται με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου, που ορίζουν τα $\boldsymbol{\alpha}$ και $\boldsymbol{\beta}$.

iii) Ο όγκος V του παραλληλεπιπέδου με ακμές τα διανύσματα $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ και $\boldsymbol{\gamma}$ ισούται με

$$V = \left|\boldsymbol{\alpha}\cdot(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\gamma})\right|.$$

Το γινόμενο

$$\boldsymbol{\alpha}\cdot(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\gamma}) = \boldsymbol{\beta}\cdot(\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\gamma}\cdot(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}) \qquad (4.1\text{ - }13)$$

είναι γνωστό σαν **μεικτό γινόμενο** (triple product) και συμβολίζεται με $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})$.

Υπολογισμός συναρτήσει των συντεταγμένων

Αν $\boldsymbol{\alpha} = \alpha_1\mathbf{i} + \alpha_2\mathbf{j} + \alpha_3\mathbf{k}$ και $\boldsymbol{\beta} = \beta_1\mathbf{i} + \beta_2\mathbf{j} + \beta_3\mathbf{k}$ είναι δύο μη μηδενικά διανύσματα, τότε, επειδή τα μοναδιαία διανύσματα $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ και $\mathbf{k}$ είναι ανά δύο κάθετα μεταξύ τους και σύμφωνα με τον Ορισμό 4.1 - 9 είναι

$$\begin{array}{rclrclrcl} \mathbf{i}\times\mathbf{j} &=& \mathbf{k} & \mathbf{j}\times\mathbf{k} &=& \mathbf{i} & \mathbf{k}\times\mathbf{i} &=& \mathbf{j} \\ \mathbf{j}\times\mathbf{i} &=& -\mathbf{k} & \mathbf{k}\times\mathbf{j} &=& -\mathbf{i} & \mathbf{i}\times\mathbf{k} &=& -\mathbf{j} \\ \mathbf{i}\times\mathbf{i} &=& \mathbf{0} & \mathbf{j}\times\mathbf{j} &=& \mathbf{0} & \mathbf{k}\times\mathbf{k} &=& \mathbf{0}, \end{array} \tag{4.1 - 14}$$

προκύπτει με ανάλογους με το εσωτερικό γινόμενο υπολογισμούς ότι

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta} &= (\alpha_1\mathbf{i}+\alpha_2\mathbf{j}+\alpha_3\mathbf{k})\times(\beta_1\mathbf{i}+\beta_2\mathbf{j}+\beta_3\mathbf{k}) = \beta_1(\alpha_1\mathbf{i}+\alpha_2\mathbf{j}+\alpha_3\mathbf{k})\times\mathbf{i} \\ &\quad +\beta_2(\alpha_1\mathbf{i}+\alpha_2\mathbf{j}+\alpha_3\mathbf{k})\times\mathbf{j}+\beta_3(\alpha_1\mathbf{i}+\alpha_2\mathbf{j}+\alpha_3\mathbf{k})\times\mathbf{k} \\ &= \beta_1(\alpha_1\,\mathbf{i}\times\mathbf{i}+\alpha_2\,\mathbf{j}\times\mathbf{i}+\alpha_3\,\mathbf{k}\times\mathbf{i})+\beta_2(\alpha_1\,\mathbf{i}\times\mathbf{j}+\alpha_2\,\mathbf{j}\times\mathbf{j}+\alpha_3\mathbf{k}\times\mathbf{j}) \\ &\quad +\beta_3(\alpha_1\,\mathbf{i}\times\mathbf{k}+\alpha_2\,\mathbf{j}\times\mathbf{k}+\alpha_3\,\mathbf{k}\times\mathbf{k}), \end{aligned}$$

δηλαδή

$$\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta} = (\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2)\,\mathbf{i}-(\alpha_1\beta_3-\alpha_3\beta_1)\,\mathbf{j}+(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)\,\mathbf{k}. \tag{4.1 - 15}$$

Η $(4.1-15)$ γράφεται με μορφή ορίζουσας 3ης τάξης ως εξής:

$$\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}. \tag{4.1 - 16}$$

Υπενθυμίζεται ότι το ανάπτυγμα μιας ορίζουσας 2ης τάξης είναι

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} = \alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1, \tag{4.1 - 17}$$

ενώ η $(4.1-16)$, όταν αναπτυχθεί ως προς τα στοιχεία της 1ης γραμμής διαγράφοντας κάθε φορά τη γραμμή και τη στήλη του στοιχείου που θεωρείται και ορίζοντας την ορίζουσα 2ης τάξης που προκύπτει από τα αριστερά προς τα δεξιά, γράφεται

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} \qquad (4.1 - 18) \\
&= \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \mathbf{k} \\
&= (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)\,\mathbf{i} - (\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1)\,\mathbf{j} + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\,\mathbf{k}.
\end{aligned}$$

Σημειώσεις 4.1 - 1

i) Η ορίζουσα υπολογισμού του εξωτερικού γινομένου είναι πάντοτε 3ης τάξης, δηλαδή της μορφής $(4.1-16)$.

ii) Όταν τα διανύσματα $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ είναι συνεπίπεδα, δηλαδή $\boldsymbol{\alpha} = \alpha_1\mathbf{i} + \alpha_2\mathbf{j}$ και $\boldsymbol{\beta} = \beta_1\mathbf{i} + \beta_2\mathbf{j}$, τότε σύμφωνα με την $(4.1-16)$ είναι

$$\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & 0 \end{vmatrix} = (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\,\mathbf{k}, \qquad (4.1 - 19)$$

δηλαδή ένα διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο των $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ - περίπτωση (ii) του Ορισμού 4.1 - 9.

Παράδειγμα 4.1 - 3

Έστω τα διανύσματα $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{i} - 2\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$ και $\boldsymbol{\beta} = 2\,\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$. Ζητείται να υπολογιστεί το μέτρο του $\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}$.

Λύση. Σύμφωνα με την $(4.1-18)$ είναι

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{k} \\
&= (-2-1)\,\mathbf{i} - (1-2)\,\mathbf{j} + (1+4)\,\mathbf{k} = -3\,\mathbf{i} + \mathbf{j} + 5\,\mathbf{k}.
\end{aligned}$$

Άρα $|\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}| = \sqrt{(-3)^2+1^2+5^2} = \sqrt{35} \approx 5.91608.$ ■

Σημείωση 4.1 - 1

Αποδεικνύεται ότι, αν $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ και $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, τότε το μεικτό γινόμενό τους υπολογίζεται ως εξής:

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}. \qquad (4.1 - 20)$$

Ο υπολογισμός του εσωτερικού και του εξωτερικού γινομένου με το MATHEMATICA γίνεται ως εξής: έστω $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ και $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$. Τότε

```
Dot[{x_1,x_2,x_3},{y_1,y_2,y_3}]          εσωτερικό
Cross[{x_1,x_2,x_3},{y_1,y_2,y_3}]        εξωτερικό
```

Ορισμός της διανυσματικής συνάρτησης

Υπενθυμίζεται ο ορισμός της πραγματικής συνάρτησης μιας πραγματικής μεταβλητής, που για ευκολία στη συνέχεια θα λέγεται επίσης και **βαθμωτή** συνάρτηση.

Ορισμός 4.1 - 10 (συνάρτησης). *Έστω D και T δύο τυχόντα μη κενά υποσύνολα του $\Re$. Τότε λέγεται συνάρτηση με πεδίο ορισμού το D και πεδίο τιμών το T, μία μονοσήμαντη απεικόνιση, έστω f, του συνόλου D στο T, δηλαδή*

$$D \ni x \longrightarrow y = f(x) \in T \qquad (4.1 - 21)$$

ή συντομότερα συνάρτηση $f|D$ με πεδίο τιμών T ή και συνάρτηση $f(x)$, $x \in D$ με τιμές στο T.

Η σχέση $y = f(x)$, που ισχύει για κάθε $x \in D$, ορίζει τον τύπο της συνάρτησης, το γράμμα x την ανεξάρτητη μεταβλητή στο D, ενώ το y την εξαρτημένη μεταβλητή στο T. Τότε ο τύπος της συνάρτησης εκφράζει τον τρόπο με τον οποίο συνδέονται οι μεταβλητές y και x. Επομένως η συνάρτηση $f(x) = x^2$ με πεδίο ορισμού $D = \Re$, θα απεικονίζει τα στοιχεία $1, 3, 5, \ldots$ στα $1^2, 3^2, 5^2, \ldots$, κ.λπ.

Γενικεύοντας τον παραπάνω παράδειγμα θεωρούμε ότι είναι δυνατόν να οριστεί επίσης μια μονοσήμαντη απεικόνιση (συνάρτηση) των στοιχείων $1, \ldots, 3, \ldots, 5, \ldots$ στα

$$\left(1^2, 1^3\right), \ldots, \left(3^2, 3^3\right), \ldots, \left(5^2, 5^3\right), \ldots \qquad (4.1 - 22)$$

του χώρου $\Re \times \Re = \Re^2$,αντίστοιχα στα

$$\left(1^2, 1^3, 1\right), \ldots, \left(3^2, 3^3, 3\right), \ldots, \left(5^2, 5^3, 5\right), \ldots \qquad (4.1 - 23)$$

του $\Re \times \Re \times \Re = \Re^3$. Τότε ο τύπος της συνάρτησης για τα στοιχεία $(4.1 - 22)$ πρέπει να είναι της μορφής (x^2, x^3), ενώ για τα $(4.1 - 22)$ της μορφής (x^2, x^3, x), όταν $x \in \Re$. Έχοντας τώρα υπ' όψιν και τις σχέσεις $(4.1-2)$-$(4.1-3)$ τα παραπάνω στοιχεία είναι δυνατόν να θεωρηθούν σαν οι **συνιστώσες** αντίστοιχων διανυσμάτων, δηλαδή των

$$1^2\,\mathbf{i} + 1^3\,\mathbf{j}, \ldots, \quad \text{αντίστοιχα} \quad 1^2\,\mathbf{i} + 1^3\,\mathbf{j} + \mathbf{k}, \ldots,$$

οπότε ο αντίστοιχος τύπος της συνάρτησης, που λέγεται στην περίπτωση αυτή διανυσματική συνάρτηση μιας μεταβλητής, θα έχει τη μορφή

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(x) &= \mathbf{F}\left(x^2, x^3\right) = x^2\,\mathbf{i} + x^3\,\mathbf{j}, \quad \text{αντίστοιχα} \\ \mathbf{F}(x) &= \mathbf{F}\left(x^2, x^3, x\right) = x^2\,\mathbf{i} + x^3\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}, \end{aligned} \qquad (4.1 - 24)$$

όταν $x \in \Re$.

Στις συναρτήσεις του είδους αυτού χρησιμοποιείται συνήθως στο συμβολισμό της μεταβλητής το γράμμα t - που συνήθως παριστάνει το χρόνο - αντί του x. Δίνεται στη συνέχεια ο ορισμός της διανυσματικής συνάρτησης.

Ορισμός 4.1 - 11 (διανυσματική συνάρτηση). *Έστω $D \subseteq \Re$ και $T \subseteq \Re^2$, αντίστοιχα $T \subseteq \Re^3$ δύο τυχαία μη κενά σύνολα. Τότε ορίζεται σαν διανυσματική συνάρτηση (vector function ή vector-valued function) μιας μεταβλητής με πεδίο ορισμού το D και πεδίο τιμών το T, μία* **μονοσήμαντη απεικόνιση**, *έστω $\mathbf{F}$, του συνόλου D στο T, δηλαδή*

$$\begin{aligned} D \ni t \longrightarrow \mathbf{F}(t) = \mathbf{y} &= \langle f_1(t), f_2(t) \rangle \in T \subseteq \Re^2, \\ &\textit{αντίστοιχα} \\ &\quad \langle f_1(t), f_2(t), f_3(t) \rangle \in T \subseteq \Re^3 \end{aligned} \qquad (4.1 - 25)$$

όπου κάθε $f_i(t)$ με $i = 1, 2,$ αντίστοιχα $i = 1, 2, 3$ είναι μία συνάρτηση με μεταβλητή t, που λέγεται συνιστώσα (argument)[6] *της* $\mathbf{F}$.

Σύμφωνα με τον Ορισμό 4.1 - 11, αν Oxy είναι ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων του χώρου των 2-διαστάσεων, αντίστοιχα $Oxyz$ του χώρου των 3-διαστάσεων, τότε η $\mathbf{F}$ εκφράζεται στις περιπτώσεις αυτές συναρτήσει των συνιστωσών ως εξής:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(t) &= f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j}, \quad \text{αντίστοιχα} \\ \mathbf{F}(t) &= f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j} + f_3(t)\mathbf{k}, \end{aligned} \tag{4.1 - 26}$$

όταν $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ και $\mathbf{k}$ τα μοναδιαία διανύσματα κατά μήκος των αξόνων $0x$, $0y$ και $0z$ αντίστοιχα.

Σημειώσεις 4.1 - 2

i) Ο προσδιορισμός του πεδίου ορισμού D της $\mathbf{F}$ δεν διαφέρει από εκείνον της συνάρτησης $f(x)$, εφόσον τελικά συνεπάγεται τον υπολογισμό των πεδίων ορισμού κάθε μιας συνιστώσας[7] και στη συνέχεια των κοινών τους σημείων.

Παράδειγμα 4.1 - 4

Έστω η διανυσματική συνάρτηση

$$\mathbf{F}(t) = \sqrt{t}\,\cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j} \quad (\text{Σχ. } 4.1 - 6).$$

Τότε $f_1(t) = \sqrt{t}\,\cos t$ με πεδίο ορισμού $D_1 = [0, +\infty)$ και $f_2(t) = \sin t$ με πεδίο ορισμού $D_2 = \Re$. Άρα το πεδίο ορισμού D της $\mathbf{F}$ είναι $D = D_1 \cap D_2 = [0, +\infty)$.

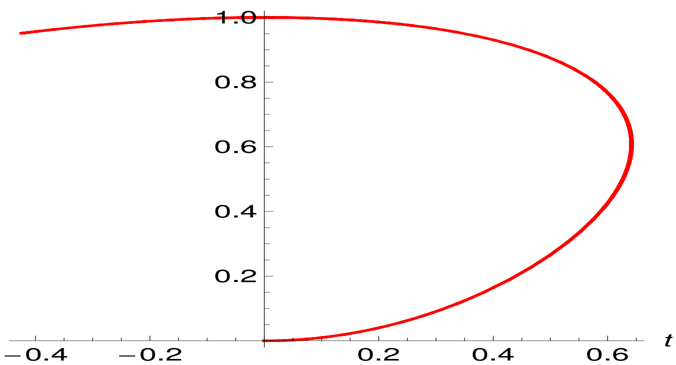
---

[6] Πολλές φορές, όταν απαιτείται, χρησιμοποιείται και η παράσταση των συνιστωσών με πίνακα διάνυσμα, δηλαδή

$$\begin{aligned} D \ni t \longrightarrow \mathbf{F}(t) = \mathbf{y} &= [f_1(t), f_2(t)]^\top \in T \subseteq \Re^2, \\ &\text{αντίστοιχα} \\ &\quad [f_1(t), f_2(t), f_3(t)]^\top \in T \subseteq \Re^3. \end{aligned}$$

Βλέπε βιβλιογραφία και Α. Μπράτσος [2] Κεφ. 3.

[7] Που είναι η ήδη γνωστή στον αναγνώστη συνάρτηση μια πραγματικής μεταβλητής.



Σχήμα 4.1 - 6: Παράδειγμα 4.1 - 4: η καμπύλη με παραμετρική εξίσωση $\mathbf{F}(t) = \sqrt{t}\,\cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j}$, όταν $t \in [0, 3\pi/5]$

ii) Η οριακή τιμή υπολογίζεται όμοια από την οριακή τιμή των συνιστωσών συναρτήσεων ως εξής:

$$\begin{aligned} \lim_{t \to t_0} \mathbf{F}(t) &= \lim_{t \to t_0} f_1(t)\,\mathbf{i} + \lim_{t \to t_0} f_2(t)\,\mathbf{j} \quad \text{αντίστοιχα} \\ \lim_{t \to t_0} \mathbf{F}(t) &= \lim_{t \to t_0} f_1(t)\,\mathbf{i} + \lim_{t \to t_0} f_2(t)\,\mathbf{j} + \lim_{t \to t_0} f_3(t)\,\mathbf{k}, \end{aligned} \tag{4.1 - 27}$$

όταν $t_0 \in D \subseteq \Re$.

Παράδειγμα 4.1 - 5

Έστω η διανυσματική συνάρτηση

$$\mathbf{F}(t) = \left(3 - 2t^2\right)\,\mathbf{i} + e^t\,\mathbf{j} + \frac{\cos t - 1}{t}\,\mathbf{k}.$$

Τότε, αν $t_0 = 0$, σύμφωνα με την $(4.1 - 27)$ έχουμε

$$\begin{aligned} \lim_{t \to 0} \mathbf{F}(t) &= \lim_{t \to 0} \left(3 - 2t^2\right)\,\mathbf{i} + \lim_{t \to 0} e^t\,\mathbf{j} + \lim_{t \to 0} \frac{\overbrace{\cos t - 1}^{\text{De L'Hôspital}}}{t}\,\mathbf{k} \\ &= 3\,\mathbf{i} + \mathbf{j} + \lim_{t \to 0} \frac{-\sin t}{1}\,\mathbf{k} = 3\,\mathbf{i} + \mathbf{j} + 0\,\mathbf{k} = 3\,\mathbf{i} + \mathbf{j}. \end{aligned}$$

iii) Η συνέχεια σε ένα σημείο $t_0 \in D$ ορίζεται από τη συνθήκη

$$\lim_{t \to t_0} \mathbf{F}(t) = \mathbf{F}\left(t_0\right), \qquad (4.1 - 28)$$

όταν ο υπολογισμός του $\lim_{t \to t_0} \mathbf{F}(t)$ γίνεται από την $(4.1 - 27)$.

Παράδειγμα 4.1 - 6

Έστω η διανυσματική συνάρτηση

$$\mathbf{F}(t) = \ln\left(9 - t^2\right)\, \mathbf{i} + \frac{\mathbf{j}}{2 - t} + \sqrt{1 + t}\, \mathbf{k}.$$

Προφανώς κάθε συνιστώσα είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, οπότε η $\mathbf{F}(t)$ θα είναι συνεχής στο κοινό πεδίο ορισμού των, έστω D, όπου προφανώς θα ισχύει η $(4.1 - 28)$. Τότε, επειδή η $f_1(t) = \ln\left(9 - t^2\right)$ έχει πεδίο ορισμού το $D_1 = (-3, 3)$, η $f_2(t) = \frac{1}{2-t}$ το $D_2 = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$ και η $f_3(t) = \sqrt{1 + t}$ το $D_3 = [-1, +\infty)$, πρέπει $D = D_1 \cap D_2 \cap D_3 = [-1, 2) \cup (2, 3)$.

4.2 Παραμετρική παράσταση καμπυλών

Ο γνωστός μέχρι τώρα προσδιορισμός της αναλυτικής εξίσωσης μιας καμπύλης, έστω C, στο χώρο $\Re^2$, αντίστοιχα $\Re^3$ με καρτεσιανές συντεταγμένες, δηλαδή σε σύστημα συντεταγμένων Oxy του χώρου των 2-διαστάσεων, αντίστοιχα $Oxyz$ του χώρου των 3-διαστάσεων, πολλές φορές δημιουργεί δυσκολίες στον υπολογισμό διαφόρων φυσικών μεγεθών, όπως αυτό φαίνεται στο παρακάτω παράδειγμα.

Για να αντιμετωπιστούν οι δυσκολίες αυτές αναζητείται ένας άλλος τρόπος περιγραφής της εξίσωσης της παραπάνω καμπύλης C. Υπενθυμίζεται στο σημείο ότι:

Σημείωση 4.2 - 1

Ένα υλικό σημείο κινούμενο στο χώρο και έχοντας ένα βαθμό ελευθερίας διαγράφει γενικά μία καμπύλη γραμμή, ενώ όταν έχει δύο βαθμούς ελευθερίας μια επιφάνεια.

Έστω τώρα ότι ζητείται ο προσδιορισμός της εξίσωσης μιας καμπύλης C του $\Re^3$. Αν $Oxyz$ είναι ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων και $M_0\,(x_0, y_0, z_0)$ τυχόν σημείο της καμπύλης C, τότε στο σημείο αυτό αντιστοιχεί ακριβώς ένα **διάνυσμα θέσης**, έστω $\mathbf{r}_0$, όπου

$$\mathbf{r}_0 = x_0\,\mathbf{i} + y_0\,\mathbf{j} + z_0\,\mathbf{k} \tag{4.2 - 1}$$

και αντίστροφα στο $\mathbf{r}_0$ αντιστοιχεί το σημείο $M_0\,(x_0, y_0, z_0)$. Όμοια σε ένα άλλο σημείο $M_1\,(x_1, y_1, z_1)$ της C θα αντιστοιχεί το διάνυσμα θέσης

$$\mathbf{r}_1 = x_1\,\mathbf{i} + y_1\,\mathbf{j} + z_1\,\mathbf{k} \tag{4.2 - 2}$$

και γενικά στο τυχόν σημείο $M\,(x, y, z)$, το

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}. \tag{4.2 - 3}$$

Έχοντας υπ' όψιν και τον Ορισμό 4.1 - 11 τα διανύσματα $\mathbf{r}_0$ στην $(4.2-1)$, $\mathbf{r}_1$ στην $(4.2-2)$ και γενικά $\mathbf{r}$ στην $(4.2-3)$ είναι δυνατόν να θεωρηθούν σαν οι τιμές μιας κατάλληλης **διανυσματικής συνάρτησης**, έστω $\mathbf{r}(t)$, όταν $t \in [\alpha, \beta]$, με την έννοια ότι, αν $t = t_0$, τότε η $\mathbf{r}\,(t) = \mathbf{r}\,(t_0)$ θα ισούται με την $(4.2-1)$ (Σχ. 4.2 - 1), αν $t = t_1$, η $\mathbf{r}\,(t) = \mathbf{r}\,(t_1)$ με την $(4.2-2)$ και γενικά αν $t = t$, η $\mathbf{r}\,(t)$ με την $(4.2-3)$. Η αναλυτική έκφραση της διανυσματικής συνάρτησης $\mathbf{r}(t)$ είναι

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k} \qquad \text{με} \quad t \in [\alpha, \beta] \subset \Re. \tag{4.2 - 4}$$

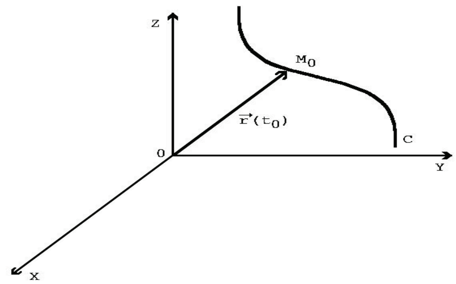
Η $(4.2-4)$ θα λέγεται τότε ότι ορίζει την **παραμετρική εξίσωση** της καμπύλης C με παράμετρο t.

Με όμοιον τρόπο ορίζεται η παραμετρική εξίσωση μιας επίπεδης καμπύλης C ως

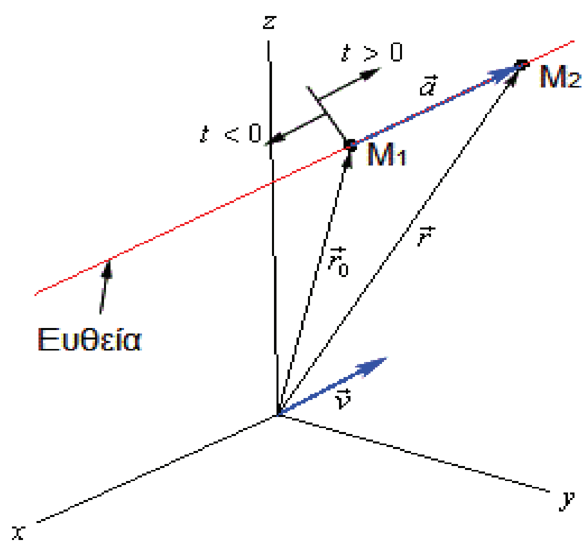
$$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} \qquad \text{με } t \in [\alpha, \beta]. \tag{4.2 - 5}$$

Οι παραμετρικές εξισώσεις των καμπυλών έχουν μεγάλη εφαρμογή στη Φυσική, κυρίως όταν η παράμετρος t συμβολίζει το χρόνο.

Δίνονται στη συνέχεια ορισμένες παραμετρικές παραστάσεις χρήσιμων καμπυλών απαραίτητων για τα επόμενα μαθήματα.



Σχήμα 4.2 - 1: παραμετρική παράσταση καμπυλών



Σχήμα 4.2 - 2: παραμετρική παράσταση ευθείας

Ευθεία

Αν M είναι ένα τυχόν σημείο της ευθείας (Σχ. 4.2 - 2) που διέρχεται από τα σημεία $M_1\,(x_1, y_1, z_1)$ και $M_2\,(x_2, y_2, z_2)$, τότε, επειδή $\mathbf{M_1M_2} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$, αποδεικνύεται ότι στην περίπτωση αυτή είναι[8]

$$\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{r} + (1-t)\,\mathbf{r}_0, \quad \text{όταν} \quad t \in \Re. \tag{4.2 - 6}$$

Η $(4.2-6)$ ορίζει την **παραμετρική εξίσωση της ευθείας** που διέρχεται από τα σημεία M_1 και M_2. Χρησιμοποιώντας τις αναλυτικές εκφράσεις $\mathbf{r}_1 = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}$ και $\mathbf{r}_2 = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}$, η $(4.2-6)$ τελικά γράφεται

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= [tx_2 + (1-t)x_1]\;\mathbf{i} + [ty_2 + (1-t)y_1]\;\mathbf{j} \\ &\quad + [tz_2 + (1-t)z_1]\;\mathbf{k}, \quad \text{όταν} \quad t \in \Re. \end{aligned} \tag{4.2 - 7}$$

Σημείωση 4.2 - 2

Η $(4.2-7)$, ειδικά όταν $\mathbf{t} \in [\mathbf{0},\, \mathbf{1}]$, ορίζει την παραμετρική εξίσωση των σημείων του **ευθύγραμμου τμήματος** M_1M_2.

Παράδειγμα 4.2 - 1

Να υπολογιστεί η παραμετρική εξίσωση του ευθύγραμμου τμήματος M_1M_2, όταν $M_1 = (1, 2, 0)$ και $M_2(2, 4, 3)$ (Σχ.4.2 - 3).
Λύση. Σύμφωνα με την $(4.2-7)$ και την Παρατήρηση 4.2 - 2 είναι

$$\mathbf{r}(t) = (1+t)\;\mathbf{i} + 2(1+t)\,\mathbf{j} + 3t\;\mathbf{k}, \quad \text{όταν} \quad t \in [0, 1].$$

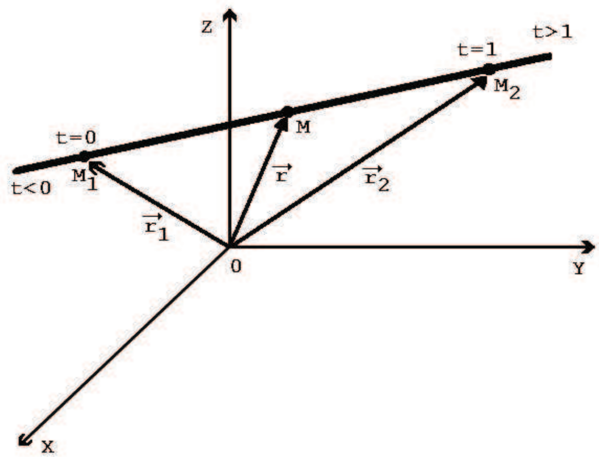
■

Περιφέρεια κύκλου

Έστω αρχικά ότι το κέντρο του κύκλου συμπίπτει με την αρχή των αξόνων. Τότε η εξίσωση των σημείων της περιφέρειας είναι

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

[8] Βλέπε βιβλιογραφία και βιβλίο Α. Μπράτσος [2] Κεφ. 1.



Σχήμα 4.2 - 3: Παράδειγμα 4.2 - 1: παραμετρική παράσταση του ευθύγραμμου τμήματος M_1M_2

Θέτοντας

$$\begin{aligned} x &= R\cos t \quad \text{και} \\ y &= R\sin t, \end{aligned}$$

έχουμε την παρακάτω **παραμετρική εξίσωση**

$$\mathbf{r}(t) = R\,\cos t\,\mathbf{i} + R\,\sin t\,\mathbf{j} \quad \text{με} \quad t \in [0, 2\pi). \tag{4.2 - 8}$$

Αν το κέντρο του κύκλου είναι το σημείο (α, β), τότε η εξίσωση των σημείων της περιφέρειας είναι

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2,$$

οπότε στην περίπτωση αυτή έχουμε σαν παραμετρική εξίσωση την

$$\mathbf{r}(t) = (\alpha + R\,\cos t)\,\mathbf{i} + (\beta + R\,\sin t)\,\mathbf{j} \quad \text{με} \quad t \in [0, 2\pi). \tag{4.2 - 9}$$

Έλλειψη

Όμοια για την έλλειψη με εξίσωση

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

έχουμε σαν **παραμετρική εξίσωση** την

$$\mathbf{r}(t) = \alpha\,\cos\,t\mathbf{i} + \beta\,\sin t\,\mathbf{j} \quad \text{με} \quad t \in [0, 2\pi). \tag{4.2 - 10}$$

Παραβολή

Αν η εξίσωση της παραβολής είναι

$$y = \alpha x^2,$$

τότε μία παραμετρική εξίσωσή της προκύπτει θέτοντας $x = t$, οπότε $y = \alpha\, t^2$ και κατά συνέπεια

$$\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + \alpha\, t^2\,\mathbf{j} \quad \text{με} \quad t \in \Re. \tag{4.2 - 11}$$

Σημειώσεις 4.2 - 1

i) Αν είναι γνωστή η εξίσωση της καμπύλης σε καρτεσιανές συντεταγμένες, τότε οι συντεταγμένες της παραμετρικής εξίσωσης που θα προσδιοριστεί, πρέπει να επαληθεύουν την αρχική εξίσωση της καμπύλης.

ii) Από την παραμετρική εξίσωση της καμπύλης είναι δυνατόν να προσδιοριστεί η αντίστοιχη εξίσωση σε καρτεσιανές συντεταγμένες, θέτοντας $x = x(t)$, $y = y(t)$ και $z = z(t)$ και απαλείφοντας την παράμετρο t, εφόσον αυτό είναι δυνατόν.

Παράδειγμα 4.2 - 2

Έστω η καμπύλη που δίνεται με παραμετρική εξίσωση ως

$$\mathbf{r}(t) = (1 + \cos t)\mathbf{i} + (2 + \sin t)\mathbf{j} \quad \text{με} \quad t \in [0, \pi].$$

Θέτοντας $x = 1 + \cos t$, $y = 2 + \sin t$, οπότε $x - 1 = \cos t$, $y - 2 = \sin t$ και απαλείφοντας την παράμετρο t, προκύπτει ότι η εξίσωση σε καρτεσιανές συντεταγμένες είναι $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$. Επειδή $t \in [0, \pi]$ πρόκειται για το άνω μέρος της περιφέρειας, που έχει κέντρο το σημείο $(1, 2)$ και ακτίνα 1.

4.3 Παράγωγος διανυσματικής συνάρτησης

Σύμφωνα με τον Ορισμό 4.1 - 11 και την $(4.1-27)$ η μέχρι τώρα ήδη γνωστή έννοια της παραγώγου πραγματική συνάρτησης μιας πραγματικής μεταβλητής επεκτείνεται και στην περίπτωση των διανυσματικών συναρτήσεων ως εξής:

Ορισμός 4.3 - 1 *Έστω $\mathbf{F}(t)$ μία διανυσματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο $D = (\alpha, \beta) \subseteq \Re$ και σημείο $t_0 \in D$. Τότε η διανυσματική συνάρτηση*

$$\mathbf{G}(t) = \frac{\mathbf{F}(t) - \mathbf{F}(t_0)}{t - t_0} \tag{4.3 - 1}$$

έχει έννοια για κάθε $t \in D - \{t_0\}$ και ορίζει το **συντελεστή μεταβολής** *της συνάρτησης $\mathbf{F}$ στο σημείο t_0. Ορίζεται σαν* **1ης τάξης παράγωγος** *της $\mathbf{F}$ στο t_0 και συμβολίζεται με $\mathbf{F}'(t_0)$ η τιμή του ορίου*

$$\mathbf{F}'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{\mathbf{F}(t) - \mathbf{F}(t_0)}{t - t_0}, \tag{4.3 - 2}$$

ή ισοδύναμα

$$\mathbf{F}'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{F}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{F}(t_0)}{\Delta t}, \tag{4.3 - 3}$$

όταν αυτό υπάρχει.

Η $\mathbf{F}'(t_0)$ είναι στην περίπτωση αυτή **διάνυσμα**.

Αν η $\mathbf{F}'(t_0)$ υπάρχει για κάθε $t_0 \in D$, τότε ορίζεται η 1ης τάξης παράγωγος της $\mathbf{F}$ στο D και συμβολίζεται με

$$\mathbf{F}'(t) = \frac{d\,\mathbf{F}(t)}{d\,t}.$$

Η $\mathbf{F}'(t)$ είναι **διανυσματική συνάρτηση**.

Όμοια ορίζεται η παράγωγος της $\mathbf{F}'(t)$ που λέγεται **2ης τάξης παράγωγος** της $\mathbf{F}$ στο D και συμβολίζεται με

$$\mathbf{F}''(t) = \frac{d^2\mathbf{F}(t)}{d\,t^2}$$

και επαγωγικά η **ν-τάξης παράγωγος** ως

$$\mathbf{F}^{(\nu)}(t) = \frac{d^\nu \mathbf{F}(t)}{dt^\nu} = \frac{d}{d\,t}\left[\frac{d^{\nu-1}\mathbf{F}(t)}{dt^{\nu-1}}\right] \quad \text{για κάθε} \quad \nu = 2,\, 3,\, \ldots . \tag{4.3 - 4}$$

Ειδικά ορίζεται ότι $\mathbf{F}^{(0)}(t) = \mathbf{F}(t)$.

Αν τώρα Oxy, αντίστοιχα $Oxyz$ είναι ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων, τότε σύμφωνα με την $(4.1-26)$ είναι

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(t) &= f_1(t)\,\mathbf{i} + f_2(t)\,\mathbf{j}, \quad \text{αντίστοιχα} \\ \mathbf{F}(t) &= f_1(t)\,\mathbf{i} + f_2(t)\,\mathbf{j} + f_3(t)\,\mathbf{k} \quad \text{για κάθε} \quad t \in D. \quad (4.3\text{ - }5)\end{aligned}$$

Αποδεικνύεται ότι:

Πρόταση 4.3 - 1. *Η* $\mathbf{F}$ *θα έχει πρώτης τάξης παράγωγο στο* D *τότε και μόνο, όταν υπάρχουν στο* D *οι παράγωγοι των συναρτήσεων* $f_1(t)$, $f_2(t)$ *και* $f_3(t)$. *Στην περίπτωση αυτή ισχύει*

$$\begin{aligned}\mathbf{F}'(t) &= f_1'(t)\,\mathbf{i} + f_2'(t)\,\mathbf{j}, \quad \textit{αντίστοιχα} \\ \mathbf{F}'(t) &= f_1'(t)\,\mathbf{i} + f_2'(t)\,\mathbf{j} + f_3'(t)\,\mathbf{k} \quad \textit{για κάθε} \quad t \in D. \quad (4.3\text{ - }6)\end{aligned}$$

Κανόνες παραγώγισης

Έστω οι διανυσματικές συναρτήσεις $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$ και $\mathbf{W}$ με κοινό πεδίο ορισμού D και παραγωγίσιμες στο D. Τότε, αν φ είναι μία πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού όμοια το D, αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι παρακάτω κανόνες παραγώγισης

i) Αν $\mathbf{F} = \mathbf{c}$ σταθερά, τότε $\mathbf{F}' = \mathbf{0}$

ii) $(\mathbf{F} + \mathbf{G})' = \mathbf{F}' + \mathbf{G}'$

iii) $(k\,\mathbf{F})' = k\mathbf{F}'$ όταν k σταθερά

iv) $(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G})' = \mathbf{F}' \cdot \mathbf{G} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{G}'$

v) $(\mathbf{F} \times \mathbf{G})' = \mathbf{F}' \times \mathbf{G} + \mathbf{F} \times \mathbf{G}'$

vi) $(\varphi\mathbf{F})' = \varphi'\mathbf{F} + \varphi\mathbf{F}'$ όταν φ βαθμωτή συνάρτηση

vii) $(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G} \times \mathbf{W})' = \mathbf{F} \cdot \mathbf{G} \times \mathbf{W}' + \mathbf{F} \cdot \mathbf{G}' \times \mathbf{W} + \mathbf{F}' \cdot \mathbf{G} \times \mathbf{W}$

viii) $[\mathbf{F} \times (\mathbf{G} \times \mathbf{W})]' = \mathbf{F} \times (\mathbf{G} \times \mathbf{W}') + \mathbf{F} \times (\mathbf{G}' \times \mathbf{W}) + \mathbf{F}' \times (\mathbf{G} \times \mathbf{W})$.

Οι ιδιότητες (ii)-(iv) γενικεύονται για ν-το πλήθος συναρτήσεις.

Παράδειγμα 4.3 - 1

Έστω η διανυσματική συνάρτηση

$$\mathbf{F}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \sin^2 t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}.$$

Τότε σύμφωνα με την Πρόταση 4.3 - 1 και τους γνωστούς τύπους παραγώγισης σύνθετων συναρτήσεων (Πίνακας 4.3 - 1) είναι

$$\begin{aligned} \mathbf{F}'(t) &= (\cos t)'\,\mathbf{i} + \left(\sin^2 t\right)'\,\mathbf{j} + t'\,\mathbf{k} = -\sin t\,\mathbf{i} + \overbrace{2\,\sin t\cos t}^{\sin 2t}\,\mathbf{j} + \mathbf{k}, \\ \mathbf{F}''(t) &= -(\sin t)'\,\mathbf{i} + (\sin 2t)'\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k} = -\cos t\,\mathbf{i} + 2\,\cos 2t\,\mathbf{j}, \quad \text{κ.λπ.} \end{aligned}$$

Παράδειγμα 4.3 - 2

Όμοια, έστω οι διανυσματικές συναρτήσεις

$$\mathbf{F}(t) = t\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} \quad \text{και} \quad \mathbf{G}(t) = t^3\,\mathbf{i} + t\,\mathbf{j}.$$

Τότε σύμφωνα με τον κανόνα παραγώγισης (iv) είναι

$$\begin{aligned} (\mathbf{F}\cdot\mathbf{G})' &= \mathbf{F}'\cdot\mathbf{G} + \mathbf{F}\cdot\mathbf{G}' \\ &= (\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j})\cdot\left(t^3\,\mathbf{i} + t\,\mathbf{j}\right) + (t\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j})\cdot\left(3\,t^2\,\mathbf{i} + \mathbf{j}\right) \\ &= \left(1\cdot t^3 + 0\cdot t\right) + \left(t\cdot 3\,t^2 + 2\cdot 1\right) = 4\,t^3 + 2. \end{aligned}$$

[9]

E-mail: bratsos@teiath.gr URL: http://users.teiath.gr/bratsos/

Πίνακας 4.3 - 1: παραγώγων των κυριότερων σύνθετων συναρτήσεων

α / α	Συνάρτηση	Παράγωγος
1	$f^a(x)$	$af'(x)f^{a-1}(x)$
2	$e^{f(x)}$	$f'(x)e^{f(x)}$
3	$\ln f(x)$	$\dfrac{f'(x)}{f(x)}$
4	$\sin f(x)$	$f'(x)\cos f(x)$
5	$\cos f(x)$	$-f'(x)\sin f(x)$
6	$\tan f(x)$	$\dfrac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}$
7	$\cot f(x)$	$-\dfrac{f'(x)}{\sin^2 f(x)}$
8	$\tan^{-1} f(x)$	$\dfrac{f'(x)}{1+f^2(x)}$
9	$\sin^{-1} f(x)$	$\dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$
10	$\cos^{-1} f(x)$	$-\dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$
11	$\sinh f(x)$	$f'(x)\cosh f(x)$
12	$\cosh f(x)$	$f'(x)\sinh f(x)$
13	$\tanh f(x)$	$\dfrac{f'(x)}{\cosh^2 f(x)} = f'(x)\left[1-\tanh^2 f(x)\right]$
14	$\coth f(x)$	$-\dfrac{f'(x)}{\sinh^2 f(x)} = f'(x)\left[1-coth^2 f(x)\right]$

Βιβλιογραφία

[1] Μπράτσος, Α. (2011), Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, ISBN 978–960–351–874–7.

[2] Μπράτσος, Α. (2002), Ανώτερα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, ISBN 960–351–453–5/978–960–351–453–4.

[3] Finney R. L., Giordano F. R. (2004), Απειροστικός Λογισμός II, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, ISBN 978–960–524–184–1 .

[4] Don, E., Schaum's Outlines – Mathematica (2006), Εκδόσεις Κλειδάριθμος, ISBN 978–960–461–000–6.

[5] Spiegel M., Wrede R. (2006), Ανώτερα Μαθηματικά, Εκδόσεις Τζιόλα, ISBN 960–418–087–8.

Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm
- http://mathworld.wolfram.com/
- http://eom.springer.de/