Μάθημα 5

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

5.1 Εισαγωγή

Στο μάθημα αυτό δίνονται οι βασικές έννοιες του Διανυσματικού Διαφορικού Λογισμού, που είναι σχετικές με τις βαθμωτές ή τις διανυσματικές συναρτήσεις μιας ή περισσότερων μεταβλητών και οι οποίες σε ορισμένες περιπτώσεις θεωρούνται σαν μια γενίκευση των μέχρι τώρα ήδη γνωστών στον αναγνώστη αντίστοιχων κανόνων του Διαφορικού Λογισμού.

Κρίνεται σκόπιμο στο σημείο αυτό να γίνει μια υπενθύμιση ορισμένων στοιχείων της θεωρίας του Διανυσματικού Λογισμού

Ορισμός 5.1 - 1. *Λέγεται* **προσανατολισμένη ευθεία** *ή* **άξονας** *μια ευθεία, έστω ε, στην οποία έχει οριστεί ένα σταθερό σημείο O, ένα ευθύγραμμο τμήμα OA που το μήκος του θεωρείται σαν μονάδα μέτρησης, δηλαδή $(OA) = 1$ και θετική η φορά από το O προς το A.*

Ορισμός 5.1 - 2 (διανύσματος). *Ορίζεται σαν διάνυσμα κάθε προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα επί του ε ή παράλληλου προς αυτόν.*

Στο εξής, εκτός αν διαφορετικά γράφεται, τα διανύσματα θα συμβολίζονται με έντονα γράμματα, όπως $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ κ.λπ., αντί του συμβολισμού $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ κ.λπ.

Έστω ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων $Oxyz$. Τότε για την παράσταση ενός διανύσματος συναρτήσει των συντεταγμένων του διακρίνονται οι παρακάτω δύο περιπτώσεις:

i) Η αρχή του διανύσματος να συμπίπτει με την αρχή των συντεταγμένων O και το τέλος του να είναι ένα σημείο $M(x, y)$, αντίστοιχα $M(x, y, z)$. Στην περίπτωση αυτή το διάνυσμα αυτό λέγεται **διάνυσμα θέσης** ή **διανυσματική ακτίνα** του σημείου M και συμβολίζεται με $\mathbf{r}\,(x, y)$, αντίστοιχα $\mathbf{r}\,(x, y, z)$ ή απλά $\mathbf{r}$ (Σχ. 5.1 - 1a). Τότε οι συντεταγμένες του $\mathbf{r}$ ορίζονται από τις προβολές του στους άξονες συντεταγμένων και είναι προφανώς οι πραγματικοί αριθμοί x, y, αντίστοιχα x, y z, ενώ συμβολικά γράφεται

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(x, y) = \langle x, y\rangle, \quad \text{αντίστοιχα} \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(x, y, z) = \langle x, y, z\rangle.$$

Σύμφωνα με τον κανόνα του παραλληλογράμμου το άθροισμα των συνιστωσών διανυσμάτων $x\,\mathbf{i}$, $y\,\mathbf{j}$ και $z\,\mathbf{k}$ θα ορίζει το διάνυσμα $\mathbf{r}$, δηλαδή

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}, \quad \text{αντίστοιχα} \quad \mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}, \tag{5.1 - 1}$$

ενώ το μέτρο του $\mathbf{r}$ ισούται με

$$r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \left(x^2 + y^2\right)^{1/2},$$

αντίστοιχα (5.1 - 2)

$$r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{1/2}.$$

ii) Γενικά, όταν το $\mathbf{a}$ είναι ένα τυχόν διάνυσμα του $\Re^3$ με αρχή το σημείο $A\,(x_1, y_1, z_1)$ και τέλος το $B\,(x_2, y_2, z_2)$, όμοια με την περίπτωση (i), οι συντεταγμένες του ορίζονται από τις προβολές του στους άξονες συντεταγμένων και είναι οι πραγματικοί αριθμοί $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$ και $a_3 = z_2 - z_1$. Συμβολικά γράφεται στην περίπτωση αυτή ότι

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}\,\langle a_1, a_2, a_3\rangle = \mathbf{a}\,\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\rangle\,,$$

ενώ η αναλυτική έκφρασή του είναι

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} \\ &= (x_2 - x_1)\,\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\,\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\,\mathbf{k}. \end{aligned} \tag{5.1 - 3}$$

Το μέτρο του διανύσματος $\mathbf{a} = \mathbf{a}\langle a_1, a_2, a_3\rangle$ συναρτήσει των συντεταγμένων ισούται στην περίπτωση αυτή με

$$a = |\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}. \qquad (5.1 - 4)$$

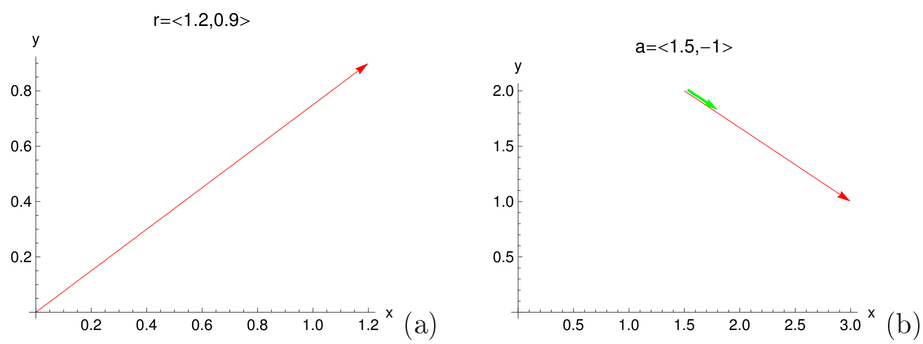
Αντίστοιχες εκφράσεις με τις $(5.1 - 3)$ και $(5.1 - 4)$ ισχύουν για το διάνυσμα $\mathbf{a} = \mathbf{a}\langle a_1, a_2\rangle$

Ορισμός 5.1 - 3. *Έστω* $\mathbf{a}$ *τυχαίο διάνυσμα με* $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$. *Τότε ορίζεται σαν* **μοναδιαίο διάνυσμα** *ή* **διανυσματική μονάδα** *κατά τη διεύθυνση του* $\mathbf{a}$ *και συμβολίζεται με* $\mathbf{n}$ *το διάνυσμα (Σχ. 5.1 - 1b)*

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}. \qquad (5.1 - 5)$$

Αν $\mathbf{a} = a_1\,\mathbf{i} + a_2\,\mathbf{j} + a_3\,\mathbf{k} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$, τότε το μοναδιαίο διάνυσμα ισούται με

$$\mathbf{n} = \frac{a_1\,\mathbf{i} + a_2\,\mathbf{j} + a_3\,\mathbf{k}}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} = \frac{1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}\,\langle a_1, a_2, a_3\rangle. \qquad (5.1 - 6)$$



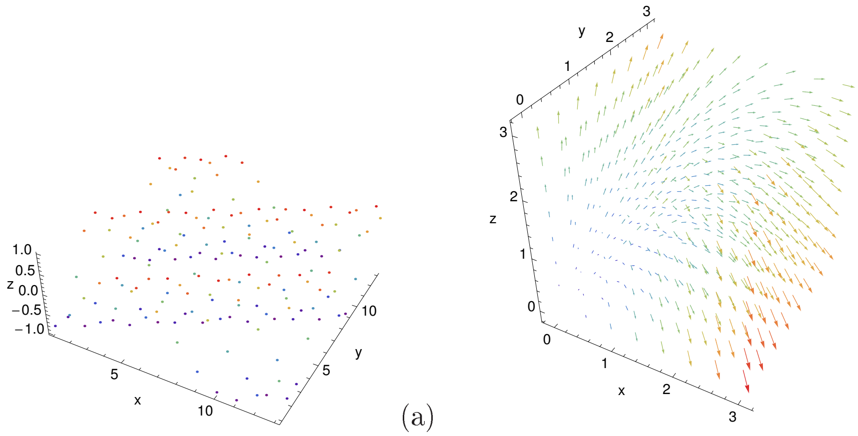
Σχήμα 5.1 - 1: (α) το διάνυσμα θέσης $\mathbf{r} =< 1.2, 0.9 >$. (b) το διάνυσμα $\mathbf{a} =< 1.5, -1 >$ με κόκκινη και το αντίστοιχο μοναδιαίο $\mathbf{n}$ με πράσινη γραμμή

5.2 Βαθμωτά και διανυσματικά πεδία

Για να γίνουν περισσότερο κατανοητές οι έννοιες του βαθμωτού και του διανυσματικού πεδίου, θεωρείται ότι σε τυχόν σημείο, έστω M, του χώρου που μας περιβάλλει αντιστοιχούν

- ένας πραγματικός αριθμός, έστω T, που συμβολίζει την τιμή της θερμοκρασίας και (Σχ. 5.2 - 1a)

- ένα διάνυσμα, έστω $\mathbf{v}$, που συμβολίζει την ταχύτητα του ανέμου στο σημείο αυτό (Σχ. 5.2 - 1b).



(a) (b)

Σχήμα 5.2 - 1: (α) Η θερμοκρασία T (βαθμωτό πεδίο) και (b) η ταχύτητα $\mathbf{v}$ στα διάφορα σημεία M του χώρου (διανυσματικό πεδίο)

Έστω Δ το σύνολο των μετρήσεων της θερμοκρασίας, αντίστοιχα της ταχύτητας στα παραπάνω σημεία M του χώρου. Τότε, όπως είναι γνωστό από τη Φυσική, επειδή οι τιμές της θερμοκρασίας και της ταχύτητας ή θα μεταβάλλονται ή θα είναι σταθερές σε ορισμένα από τα σημεία του M, το σύνολο Δ θα αποτελείται από διαφορετικά εν γένει στοιχεία, που είναι στην πρώτη περίπτωση αριθμοί και στη δεύτερη διανύσματα. Τότε οι τιμές στο Δ είναι δυνατόν να θεωρηθούν σαν οι τιμές (πεδίο τιμών) μιας συνάρτησης $f(x, y, z)$ για την πρώτη, μιας διανυσματικής συνάρτησης $\mathbf{F}(x, y, z)$ για τη δεύτερη περίπτωση[1].

[1] Η διανυσματική συνάρτηση δύο μεταβλητών, αντίστοιχα τριών μεταβλητών, θεωρείται σαν επέκταση της ήδη γνωστής από το Μάθημα: Διανυσματική Συνάρτηση μιας μεταβλητής. Η παραγώγιση των διανυσματικών συναρτήσεων πολλών μεταβλητών γίνεται όμοια με εκείνων της μιας μεταβλητής, μόνον που η ολική παράγωγος $\mathbf{F}'(t)$ αντικαθίσταται στην περίπτωση αυτή από την μερική παράγωγο για κάθε μια από τις μεταβλητές.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, όταν περιγράφεται ένα βαθμωτό μέγεθος, όπως είναι η θερμοκρασία, θα λέγεται ότι έχουμε ένα **βαθμωτό** πεδίο και η συνάρτηση που το περιγράφει βαθμωτή συνάρτηση ή απλά για ευκολία στο εξής συνάρτηση, που θα συμβολίζεται με f, g κ.λπ. ενώ, όταν περιγράφεται διανυσματικό μέγεθος, όπως είναι η ταχύτητα, θα λέγεται ότι έχουμε **διανυσματικό** πεδίο και η συνάρτηση που το περιγράφει διανυσματική συνάρτηση και θα συμβολίζεται με $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$ κ.λπ.

Αν τώρα $Oxyz$ είναι ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων του χώρου $\Re^3$, τότε η συνάρτηση f γράφεται συναρτήσει των μεταβλητών x, y και z ως $f = f(x, y, z)$, ενώ η διανυσματική συνάρτηση ως $\mathbf{F}(x, y, z)$, που σε αντιστοιχία με την αναλυτική έκφραση του διανύσματος $\mathbf{a} = a_1\,\mathbf{i}+a_2\,\mathbf{j}+a_3\,\mathbf{k}$ της Παραγράφου 5.1 θα γράφεται ως εξής:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\,\mathbf{i} + Q(x, y, z)\,\mathbf{j} + R(x, y, z)\,\mathbf{k}, \qquad (5.2 \text{ - } 1)$$

όταν P, Q και R είναι οι συνιστώσες ως προς τον x, y και z-άξονα. Θα πρέπει να σημειωθεί στο σημείο αυτό ότι οι τιμές τόσον του βαθμωτού όσο και του διανυσματικού πεδίου είναι ανεξάρτητες από την εκλογή του συστήματος των αξόνων.

Η αντίστοιχη έκφραση της $(5.2 - 1)$ στο $\Re^2$ είναι

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\,\mathbf{i} + Q(x, y)\,\mathbf{j}. \qquad (5.2 \text{ - } 2)$$

Το μέτρο ή η απόλυτη τιμή της διανυσματικής συνάρτησης $(5.2{-}1)$ ορίζεται τότε από τη σχέση $|\mathbf{F}| = \left(P^2 + Q^2 + R^2\right)^{1/2}$, ενώ της $(5.2 - 2)$ από την $|\mathbf{F}| = \left(P^2 + Q^2\right)^{1/2}$.

Παράδειγμα 5.2 - 1

Σύμφωνα με την $(5.1 - 1)$ το διάνυσμα θέσης

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k} = \mathbf{F}(x, y, z),$$

είναι μια διανυσματική συνάρτηση τριών μεταβλητών, ενώ το μέτρο του

$$r = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{1/2} = f(x, y, z)$$

μια βαθμωτή συνάρτηση. Άλλα παραδείγματα διανυσματικών συναρτήσεων θα δοθούν στη συνέχεια του μαθήματος.

5.3 Κατευθυνόμενη παράγωγος

Είναι ήδη γνωστό στον αναγνώστη ότι η παράγωγος μιας συνάρτησης μιας μεταβλητής ή και γενικότερα πολλών μεταβλητών, έστω $f(x,y)$, αντίστοιχα $f(x,y,z)$, ορίζει το συντελεστή μεταβολής της f ως προς τον αντίστοιχο άξονα συντεταγμένων, δηλαδή η f_x ως προς τον x-άξονα, κ.λπ. Στην παράγραφο αυτή θα γίνει μια γενίκευση της μεταβολής αυτής, θεωρώντας ότι οι μεταβλητές x, y, αντίστοιχα x, y, z μεταβάλλονται ταυτόχρονα. Η έννοια της ταυτόχρονης μεταβολής δεν σημαίνει απαραίτητα ότι η μεταβολή είναι η ίδια για κάθε μεταβλητή, δηλαδή είναι δυνατόν να έχουμε διαφορετικές μεταβολές ως προς x, y και z.

Παράδειγμα 5.3 - 1

Έστω ένα υλικό σημείο που κινείται στο χώρο από το σημείο

$$A\left(x_0, y_0, z_0\right) = A\left(1, -2, 0\right)$$

στο

$$B\left(x_1, y_1, z_1\right) = B\left(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z\right) = B\left(2, 0, 6\right).$$

Τότε

$$\begin{aligned} \Delta x &= x_1 - x_0 = 2 - 1 = 1, \quad \Delta y = y_1 - y_0 = 0 - (-2) = 2 \quad \text{και} \\ \Delta z &= z_1 - z_0 = 6 - 3 = 3, \quad \text{δηλαδή} \quad \Delta x \neq \Delta y \neq \Delta z. \end{aligned}$$

Σύμφωνα με την Παράγραφο 5.1, η μεταβολή της θέσης του σημείου από το A στο B θα ορίζεται από τη διεύθυνση του διανύσματος

$$\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k} = \langle 1, 2, 3\rangle.$$

Επειδή όμως υπάρχουν άπειρα διανύσματα που έχουν την ίδια διεύθυνση με το διάνυσμα $\mathbf{a}$, ο ακριβής καθορισμός της διεύθυνσης της παραπάνω μεταβολής γίνεται από το αντίστοιχο μοναδιαίο διάνυσμα, έστω $\mathbf{n}$ του $\mathbf{a}$, δηλαδή στη συγκεκριμένη περίπτωση από το διάνυσμα

$$\mathbf{n} \;=\; \frac{1}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}}\,\left(\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} + 3\,\mathbf{k}\right) = \frac{1}{\sqrt{14}}\,\left(\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} + 3\,\mathbf{k}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right) = \left\langle \frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}} \right\rangle \\
&= \langle n_1, n_2, n_3 \rangle .
\end{aligned}
$$

Σημείωση 5.3 - 1

Σύμφωνα με το Παράδειγμα 5.3 - 1, αν $A(x_0, y_0)$, $B(x_1, y_1)$ αντίστοιχα $A(x_0, y_0, z_0)$, $B(x_1, y_1, z_1)$ είναι δύο διαφορετικά σημεία του $\Re^2$, αντίστοιχα του $\Re^3$ που βρίσκονται σε απόσταση s, τότε, αν $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$, σύμφωνα με την $(5.1-6)$ το μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{n}$ κατά τη διεύθυνση $\overrightarrow{AB}$ θα ορίζεται από τη σχέση

$$
\mathbf{n} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{\mathbf{a}}{s}\,.
$$

Έχοντας τώρα υπ' όψιν και τους αντίστοιχους ορισμούς των παραγώγων συνάρτησης μιας ή περισσότερων μεταβλητών, η παράγωγος της συνάρτησης f στο σημείο A κατά τη διεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος $\mathbf{n}$ ορίζεται ως εξής:

Ορισμός 5.3 - 1 (κατευθυνόμενη παράγωγος). *Έστω η συνάρτηση $f(x, y)$ $|S \subseteq \Re^2$, αντίστοιχα $f(x, y, z)$ $|S \subseteq \Re^3$ με S ανοικτό σύνολο, που υποτίθεται ότι η έχει πρώτης τάξης μερικές παραγώγους στο S. Αν $A(x_0, y_0)$, $B(x_1, y_1)$ αντίστοιχα $A(x_0, y_0, z_0)$, $B(x_1, y_1, z_1)$ είναι δύο διαφορετικά σημεία του S, που βρίσκονται σε απόσταση $s = \left|\overrightarrow{AB}\right| = |\mathbf{a}|$ και $\mathbf{n} = \langle n_1, n_2 \rangle$, αντίστοιχα $\mathbf{n} = \langle n_1, n_2, n_3 \rangle$ το μοναδιαίο διάνυσμα κατά τη διεύθυνση $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, η κατευθυνόμενη παράγωγος της f στο σημείο A συμβολίζεται με $(D_{\mathbf{n}} f)_A$ και ορίζεται από την παρακάτω οριακή τιμή*

$$
(D_{\mathbf{n}} f)_A = \lim_{s \to 0} \frac{f(x_0 + s\,n_1, y_0 + s\,n_2) - f(x_0, y_0)}{s}\,,
$$

αντίστοιχα (5.3 - 1)

$$
(D_{\mathbf{n}} f)_A = \lim_{s \to 0} \frac{f(x_0 + s\,n_1, y_0 + s\,n_2, z_0 + s\,n_3) - f(x_0, y_0, z_0)}{s}\,,
$$

εφόσον υπάρχει.

Ισοδύναμα ο παραπάνω ορισμός γράφεται:

Ορισμός 5.3 - 2 (κατευθυνόμενη παράγωγος). *Έστω η συνάρτηση $f(x,y)$ $|S \subseteq \Re^2$, αντίστοιχα $f(x,y,z)$ $|S \subseteq \Re^3$ με S ανοικτό σύνολο, που υποτίθεται ότι η έχει πρώτης τάξης μερικές παραγώγους στο S. Αν $A\,(x_0,y_0)$, $B\,(x_1,y_1)$ αντίστοιχα $A\,(x_0,y_0,z_0)$, $B\,(x_1,y_1,z_1)$ είναι δύο διαφορετικά σημεία του S, που βρίσκονται σε απόσταση $s = \left|\overrightarrow{AB}\right| = |\mathbf{a}|$ και $\mathbf{n}$ το μοναδιαίο διάνυσμα κατά τη διεύθυνση $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, η κατευθυνόμενη παράγωγος της f στο σημείο A συμβολίζεται με $\left(D_{\mathbf{n}} f\right)_A = \left.\frac{d\,f}{d\,s}\right|_{\mathbf{n},\,A}$ και ορίζεται από την παρακάτω οριακή τιμή*

$$\left(D_{\mathbf{n}} f\right)_A = \left.\frac{d\,f}{d\,s}\right|_{\mathbf{n},\,A} = \lim_{s \to 0} \frac{f\,(x_1,y_1) - f\,(x_0,y_0)}{s}\,,$$

αντίστοιχα (5.3 - 2)

$$\left(D_{\mathbf{n}} f\right)_A = \left.\frac{d\,f}{d\,s}\right|_{\mathbf{n},\,A} = \lim_{s \to 0} \frac{f\,(x_1,y_1,z_1) - f\,(x_0,y_0,z_0)}{s}\,,$$

εφόσον υπάρχει.

Ορισμός 5.3 - 3. *Έστω η συνάρτηση $f(x,y)$ $|S \subseteq \Re^2$, αντίστοιχα $f(x,y,z)$ $|S \subseteq \Re^3$ με S ανοικτό σύνολο, που υποτίθεται ότι η έχει πρώτης τάξης μερικές παραγώγους στο S. Αν η κατευθυνόμενη παράγωγος της f υπάρχει σε κάθε σημείο $A\,(x_0,y_0)$, αντίστοιχα $A\,(x_0,y_0,z_0)$ του S, τότε λέγεται ότι υπάρχει η κατευθυνόμενη παράγωγος (directional derivative) της f στο S και συμβολίζεται αυτό με*

$$D_{\mathbf{n}} f = \left(\frac{d\,f}{d\,s}\right)_{\mathbf{n}}. \tag{5.3 - 3}$$

Παρατήρησεις 5.3 - 1

i) Η $(5.3 - 2)$ ορίζει το συντελεστή μεταβολής της f στο σημείο A κατά τη διεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος $\mathbf{n}$.

ii) Ο τελεστής $\frac{d}{d\,s}$ στην περίπτωση αυτή έχει ερμηνεία ανάλογη των τελεστών $\frac{d}{d\,x}$ και $\frac{\partial}{\partial\,x}$, ενώ το απειροστό $d\,s$, όπως το αντίστοιχο $d\,x$, ορίζεται από το όριο $\lim_{s \to 0} s$ (βλέπε γεωμετρική ερμηνεία παραγώγου συνάρτησης μιας μεταβλητής).

iii) Η $(5.3-1)$, αντίστοιχα η $(5.3-2)$ είναι πραγματικοί αριθμοί, ενώ η $(5.3-3)$ συνάρτηση (βλέπε Παράδειγμα 5.4 - 3).

Στην επόμενη παράγραφο θα γίνει ο υπολογισμός της κατευθυνόμενης παραγώγου.

5.4 Κλίση συνάρτησης

Σύμφωνα με την $(5.1-1)$, αν

$$\mathbf{r}_A = x_0\,\mathbf{i} + y_0\,\mathbf{j} + z_0\,\mathbf{k} = \langle x_0, y_0, z_0\rangle$$

το διάνυσμα θέσης του σημείου $A\,(x_0, y_0, z_0)$, τότε έχοντας υπ' όψιν και τον κανόνα του παραλληλογράμμου για την πρόσθεση διανυσμάτων το διάνυσμα θέσης $\mathbf{r}_B$ του σημείου $B\,(x_1, y_1, z_1)$ θα δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + s\,\mathbf{n}$$

όταν $\mathbf{n} = \langle n_1, n_2, n_3\rangle$ το μοναδιαίο διάνυσμα κατά τη διεύθυνση $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$ και $s = \left|\overrightarrow{AB}\right|$. Άρα (βλέπε Σχ. 5.4 - 1 για την αντίστοιχη περίπτωση στο $\Re^2$)

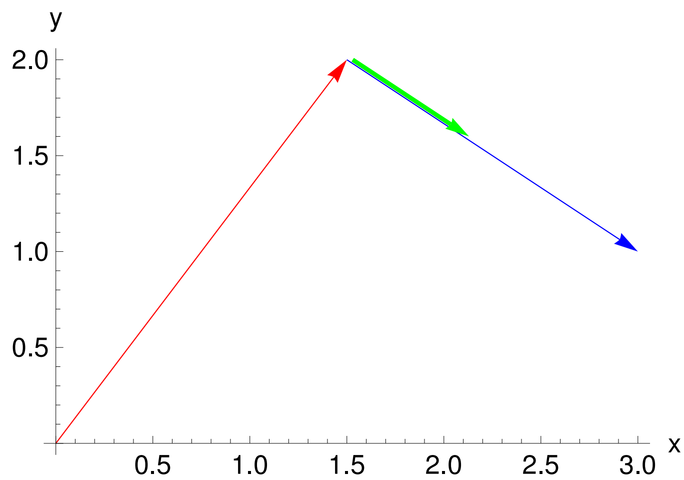
$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}_A + s\,\mathbf{n} \qquad (5.4\text{ - }1)\\ &= (x_0 + s\,n_1)\,\mathbf{i} + (y_0 + s\,n_2)\,\mathbf{j} + (z_0 + s\,n_3)\,\mathbf{k}\\ &= x(s)\,\mathbf{i} + y(s)\,\mathbf{j} + z(s)\,\mathbf{k} = \mathbf{r}(s). \end{aligned}$$

Τότε από την $(5.4-1)$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \frac{d\,\mathbf{r}}{d\,s} &= \frac{d}{d\,s}\left(\mathbf{r}_A + s\,\mathbf{n}\right)\\ &= \frac{d}{d\,s}\,(x_0 + s\,n_1)\,\mathbf{i} + \frac{d}{d\,s}\,(y_0 + s\,n_2)\,\mathbf{j} + \frac{d}{d\,s}\,(z_0 + s\,n_3)\,\mathbf{k}\\ &= n_1\,\mathbf{i} + n_2\,\mathbf{j} + n_3\,\mathbf{k} = \mathbf{n}. \qquad (5.4\text{ - }2) \end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας τον τύπο $(5.4-4)$ του Θεωρήματος 5.4 - 1 για τον αλυσιδωτό κανόνα παραγώγισης σύνθετης συνάρτησης[2] και υποθέτοντας ότι η f έχει

[2]



Σχήμα 5.4 - 1: Η Εξίσωση (5.4−2) στο $\Re^2$ όπου $\mathbf{r}_A$ το κόκκινο, $\mathbf{n}$ το πράσινο και $\mathbf{a}$ το μπλε διάνυσμα

τουλάχιστον 1ης τάξης μερικές παραγώγους στο S σύμφωνα και με τις (5.4−1) και (5.4 − 2) έχουμε

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\,f}{d\,s}\right)_{\mathbf{n}} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{d\,x(s)}{d\,s}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{d\,y(s)}{d\,s}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{d\,z(s)}{d\,s}\\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}\right)\cdot\left(\frac{d\,x(s)}{d\,s}\mathbf{i}+\frac{d\,y(s)}{d\,s}\mathbf{j}+\frac{d\,z(s)}{d\,s}\mathbf{k}\right)\end{aligned}$$

Θεώρημα 5.4 - 1 *Έστω η συνάρτηση $f(x,y)\,|\,S\subseteq\Re^2$, αντίστοιχα $f(x,y,z)\,|\,S\subseteq\Re^3$ και $x=x(s)$, $y=y(s)$, αντίστοιχα $x=x(s)$, $y=y(s)$, $z=z(s)$ για κάθε $s\in A\subseteq\Re$, όπου A ανοικτό σύνολο με τις αντίστοιχες τιμές της f να ανήκουν στο S για κάθε $s\in A$ και επί πλέον ότι υπάρχει η παράγωγος της f στο $(x(s),y(s))$, αντίστοιχα $(x(s),y(s),z(s))$ για κάθε $s\in A$. Τότε η συνάρτηση $f=f(s)$ παραγωγίζεται στο s και ισχύει*

$$\frac{d\,f(t)}{d\,s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{d\,s}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{d\,s}=f_x\,\frac{dx}{d\,s}+f_y\,\frac{dy}{d\,s}, \qquad (5.4\text{ - }3)$$

αντίστοιχα

$$\frac{d\,f(t)}{d\,s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{d\,s}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{d\,s}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{d\,s}=f_x\,\frac{dx}{d\,s}+f_y\,\frac{dy}{d\,s}+f_z\,\frac{dz}{d\,s}. \qquad (5.4\text{ - }4)$$

$$= \left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right) f\right]\cdot\left[\frac{d}{d\,s}\overbrace{(x(s)\,\mathbf{i}+y(s)\,\mathbf{j}+z(s)\,\mathbf{k})}^{(5.4-1)}\right]$$

$$= (\nabla f)\cdot\frac{\overbrace{d\,\mathbf{r(s)}}^{(5.4-2)}}{d\,s} = (\nabla f)\cdot\mathbf{n} \qquad (5.4 - 5)$$

όπου το σύμβολο ∇ ορίζεται ως εξής:

Ορισμός 5.4 - 1 (διαφορικός τελεστής). *Ορίζεται σαν διαφορικός τελεστής (del) στο* $\Re^2$ *ο*

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\,\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}\,\mathbf{j} = \left\langle\frac{\partial}{\partial x}\,,\frac{\partial}{\partial y}\right\rangle, \qquad (5.4 - 6)$$

ενώ στο $\Re^3$ *ο*

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k} = \left\langle\frac{\partial}{\partial x}\,,\frac{\partial}{\partial y}\,,\frac{\partial}{\partial z}\right\rangle. \qquad (5.4 - 7)$$

Από την $(5.4-5)$ και τις $(5.4-6)$, αντίστοιχα $(5.4-7)$ έχουμε τον παρακάτω **τύπο υπολογισμού της κατευθυνόμενης παραγώγου**

$$D_{\mathbf{n}}f = \left(\frac{d\,f}{d\,s}\right)_{\mathbf{n}} = (\nabla f)\cdot\mathbf{n} = \langle f_x, f_y\rangle\cdot\langle n_1, n_2\rangle$$

$$= f_x\,n_1 + f_y\,n_2, \qquad (5.4 - 8)$$

αντίστοιχα

$$D_{\mathbf{n}}f = \left(\frac{d\,f}{d\,s}\right)_{\mathbf{n}} = (\nabla f)\cdot\mathbf{n} = \langle f_x, f_y, f_z\rangle\cdot\langle n_1, n_2, n_3\rangle$$

$$= f_x\,n_1 + f_y\,n_2 + f_z\,n_3. \qquad (5.4 - 9)$$

Το **ανάδελτα** ∇ (nabla), είναι ένα συμβολικό διάνυσμα με πολλές εφαρμογές στην περιγραφή των εξισώσεων διαφόρων προβλημάτων όπως του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου (εξισώσεις του Maxwell)[3], υδροδυναμικής, κυματικής, κ.λπ. και έχει ιδιότητες ανάλογες με εκείνες των γνωστών διανυσμάτων.

Σύμφωνα τώρα και με τους τύπους $(5.4-8)$, αντίστοιχα $(5.4-9)$ η κλίση ενός βαθμωτού πεδίου ορίζεται στη συνέχεια ως εξής:

[3]Βλέπε βιβλιογραφία και βιβλίο Α. Μπράτσος [1] Κεφ. 4.

Ορισμός 5.4 - 2 (κλίση). *Έστω η συνάρτηση $f(x, y)|S \subseteq \Re^2$, αντίστοιχα $f(x, y, z)|S \subseteq \Re^3$ με S ανοικτό σύνολο, που έχει τουλάχιστον 1ης τάξης μερικές παραγώγους στο S. Τότε ορίζεται σαν κλίση (gradient) της f η διανυσματική συνάρτηση*

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = f_x\,\mathbf{i} + f_y\,\mathbf{j} = \langle f_x\,,\, f_y\rangle\,, \tag{5.4 - 10}$$

αντίστοιχα

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = f_x\,\mathbf{i} + f_y\,\mathbf{j} + f_z\,\mathbf{k} = \langle f_x\,,\, f_y\,,\, f_z\rangle\,. \tag{5.4 - 11}$$

Παρατήρησεις 5.4 - 1

i) Σύμφωνα με τον Ορισμό 5.4 - 2 η κλίση εφαρμόζεται σε βαθμωτή συνάρτηση, δηλαδή συνάρτηση που περιγράφει βαθμωτό πεδίο και δημιουργεί τη διανυσματική συνάρτηση ∇f, δηλαδή συνάρτηση που περιγράφει διανυσματικό πεδίο. Είναι προφανές ότι η κλίση σε σημείο $\nabla f|_A$ είναι διάνυσμα.

ii Με τη βοήθεια της κλίσης οι αναγκαίες συνθήκες για την ύπαρξη ακρότατων της συνάρτησης $f(x, y)$ αντίστοιχα της $f(x, y, z)$ γράφονται

$$\begin{aligned} \nabla f &= \langle f_x\,,\, f_y\rangle = \mathbf{0}, \\ &\text{αντίστοιχα} \\ \nabla f &= \langle f_x\,,\, f_y\,,\, f_z\rangle = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Ιδιότητες

Έστω $f,\ g|S \subseteq \Re^2$, αντίστοιχα $f,\ g|S \subseteq \Re^3$ και $\lambda \in \Re$ σταθερά. Τότε:

Κατευθυνόμενης παραγώγου	Κλίσης
1. $D_{\mathbf{n}} f = 0$	$\nabla f = \mathbf{0}$, όταν f σταθερά
2. $D_{\mathbf{n}} (f+g) = D_{\mathbf{n}} f + D_{\mathbf{n}} g$	$\nabla (f+g) = \nabla f + \nabla g$
3. $D_{\mathbf{n}} (f\,g) = f\,D_{\mathbf{n}}\,g + g\,D_{\mathbf{n}} f$	$\nabla (f\,g) = f\nabla g + g\nabla f$
4. $D_{\mathbf{n}} (\lambda f) = \lambda D_{\mathbf{n}} f$	$\nabla (\lambda f) = \lambda \nabla f$
5. $D_{\mathbf{n}} \left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{g D_{\mathbf{n}}\,f - f D_{\mathbf{n}}\,g}{g^2}$	$\nabla \left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}$, όταν $g(\mathbf{x}) \neq 0$.

Η απόδειξη των ιδιοτήτων αφήνεται σαν άσκηση.

Παράδειγμα 5.4 - 1

Αν

$$f(x,y,z) = 3x^2 y - y^3 z^2,$$

να υπολογιστεί η κλίση στο σημείο $P(1,-2,-1)$.

Λύση. Είναι

$$f_x = 6xy, \quad f_y = 3x^2 - 3y^2 z^2 \quad \text{και} \quad f_z = -2y^3 z.$$

Άρα (Σχ. 5.4 - 2a)

$$\nabla f = 6xy\,\mathbf{i} + 3\left(x^2 - y^2 z^2\right)\mathbf{j} - 2y^3 z\,\mathbf{k},$$

οπότε (Σχ. 5.4 - 2b)

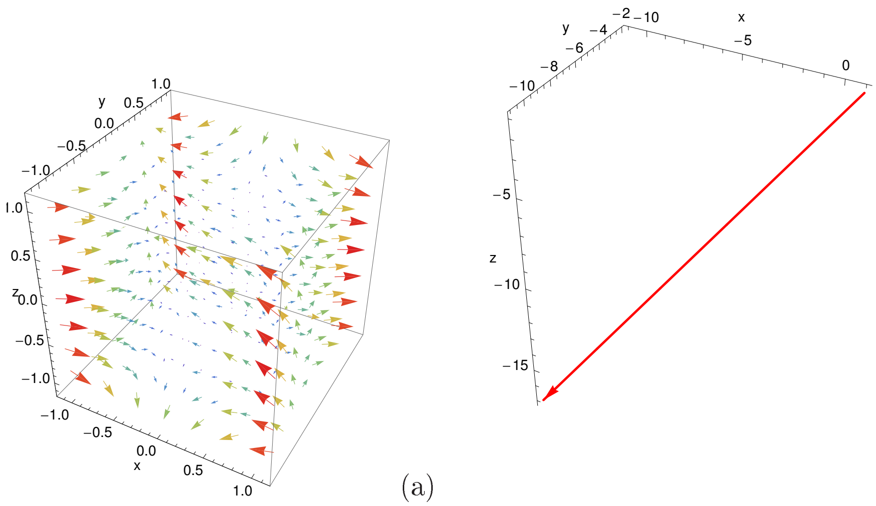
$$\nabla f_{P(1,-2,-1)} = -12\,\mathbf{i} - 9\,\mathbf{j} - 16\,\mathbf{k} = \langle -12, -9, -16 \rangle.$$

■

Παράδειγμα 5.4 - 2

Όμοια, αν

$$f(x,y,z) = \ln|\mathbf{r}|,$$



(a) (b)

Σχήμα 5.4 - 2: (α) Η γραφική παράσταση της κλίσης $\nabla f = 6xy\,\mathbf{i} + 3\left(x^2 - y^2 z^2\right)\mathbf{j} - 2y^3 z\,\mathbf{k}$, όταν $x,\ y,\ z \in [-1, 1]$ και (b) το διάνυσμα $\nabla f_{P(1,-2,-1)} = -12\,\mathbf{i} - 9\,\mathbf{j} - 16\,\mathbf{k} = \langle -12, -9, -16 \rangle$

όπου $\mathbf{r}$ διάνυσμα θέσης, να υπολογιστεί η κλίση της f.

Λύση. Επειδή

$$|\mathbf{r}| = r = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{1/2} \quad \text{είναι} \quad f(x, y, z) = \frac{1}{2}\,\ln\left(x^2 + y^2 + z^2\right).$$

Τότε

$$f_x = \frac{1}{2}\,\frac{\overbrace{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)_x}^{2x}}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}\,,$$

ενώ λόγω της συμμετρίας της f ανάλογοι τύποι υπολογίζονται για τις παραγώγους f_y και f_z. Άρα

$$\nabla f = f_x\,\mathbf{i} + f_y\,\mathbf{j} + f_z\,\mathbf{k} = \frac{x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{\mathbf{r}}{r^2}\,.$$

■

Παράδειγμα 5.4 - 3

Να υπολογιστεί η κατευθυνόμενη παράγωγος της συνάρτησης

$$f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$$

στο σημείο $P(2,1,3)$ κατά τη διεύθυνση του διανύσματος $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{i} - 2\,\mathbf{j}$.
Λύση. Αρχικά υπολογίζεται η κλίση της f ως εξής:

$$\nabla f = f_x\,\mathbf{i} + f_y\,\mathbf{j} + f_z\,\mathbf{k} = 2x\,\mathbf{i} + 4y\,\mathbf{j} + 6z\,\mathbf{k}, \tag{1}$$

οπότε στο σημείο $P(2,1,3)$ θα έχουμε

$$\nabla f|_{P(2,1,3)} = 2\cdot 2\,\mathbf{i} + 4\cdot 1\,\mathbf{j} + 6\cdot 3\,\mathbf{k} = 4\,\mathbf{i} + 4\,\mathbf{j} + 18\,\mathbf{k} = \langle 4, 4, 18\rangle. \tag{2}$$

Το μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{n}$ κατά τη διεύθυνση του διανύσματος $\boldsymbol{\alpha}$ είναι

$$\mathbf{n} = \frac{\boldsymbol{\alpha}}{|\boldsymbol{\alpha}|} = \frac{\mathbf{i} - 2\,\mathbf{j}}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\,\mathbf{i} - \frac{2}{\sqrt{5}}\,\mathbf{j} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right\rangle. \tag{3}$$

Επομένως σύμφωνα και με τη γνωστή ιδιότητα του εσωτερικού γινομένου από τις (2) και (3) προκύπτει

$$\begin{aligned}
(D_{\mathbf{n}}f)_{P(2,1,3)} &= (4\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 18\mathbf{k})\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\,\mathbf{i} - \frac{2}{\sqrt{5}}\,\mathbf{j}\right) \\
&= \langle 4, 4, 18\rangle \cdot \left\langle \frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right\rangle = \frac{4\cdot 1}{\sqrt{5}} + \frac{4\cdot(-2)}{\sqrt{5}} + 18\cdot 0 \\
&= -\frac{4}{\sqrt{5}} \approx -1.78885,
\end{aligned}$$

δηλαδή σύμφωνα και με τις Παρατηρήσεις 5.3 - 1 (iii) πραγματικός αριθμός.

Έστω τώρα ότι ζητείται η κατευθυνόμενη παράγωγος κατά τη διεύθυνση του διανύσματος $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{i} - 2\,\mathbf{j}$ γενικά και όχι σε συγκεκριμένο σημείο. Τότε από την (1) και την (3) έχουμε

$$\begin{aligned}
D_{\mathbf{n}}f &= (2x\,\mathbf{i} + 4y\,\mathbf{j} + 6z\,\mathbf{k})\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\,\mathbf{i} - \frac{2}{\sqrt{5}}\,\mathbf{j}\right) \\
&= \langle 2x, 4y, 6z\rangle \cdot \left\langle \frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right\rangle = \frac{2x\cdot 1}{\sqrt{5}} + \frac{4y\cdot(-2)}{\sqrt{5}} + 6z\cdot 0 \\
&= \frac{2}{\sqrt{5}}\,(x - 4y)\,,
\end{aligned}$$

δηλαδή όμοια σύμφωνα με τις Παρατηρήσεις 5.3 - 1 (iii) βαθμωτή συνάρτηση.
■

Παράδειγμα 5.4 - 4

Όμοια της συνάρτησης

$$f(x,y) = x\,e^{xy} + y$$

στο σημείο $P(2,0)$ κατά τη διεύθυνση της γωνίας $\theta = 2\pi/3$.

Λύση. Για τον υπολογισμό της κλίση της f έχουμε

$$\begin{aligned} f_x &= \overbrace{(x)_x}^{1}\, e^{xy} + x\, \overbrace{(xy)_x}^{y}\, e^{xy} = (1+xy)\,e^{xy}, \\ f_y &= x\,\overbrace{(xy)_y}^{x}\, e^{xy} + 1 = x^2 e^{xy} + 1, \quad \text{οπότε} \\ \nabla f &= (1+xy)\,e^{xy}\,\mathbf{i} + \left(x^2 e^{xy} + 1\right)\mathbf{j}. \end{aligned}$$

Άρα στο σημείο $P(2,0)$ θα είναι

$$\nabla f|_{P(2,0)} = (1+0)e^0\,\mathbf{i} + \left(1 + 2^2 e^0\right)\mathbf{j} = \mathbf{i} + 5\,\mathbf{j} = \langle 1, 5\rangle.$$

Το διάνυσμα κατά τη διεύθυνση της γωνίας $\theta = 2\pi/3$ είναι

$$\mathbf{a} = \cos\theta\,\mathbf{i} + \sin\theta\,\mathbf{j} = \cos\frac{2\pi}{3}\,\mathbf{i} + \sin\frac{2\pi}{3}\,\mathbf{j} = -\frac{1}{2}\,\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathbf{j} = \left\langle -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right\rangle$$

όπου προφανώς $|\mathbf{a}| = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$. Τότε το μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{n}$ κατά τη διεύθυνση του $\mathbf{a}$ είναι

$$\mathbf{n} = \frac{\boldsymbol{\alpha}}{|\boldsymbol{\alpha}|} = -\frac{1}{2}\,\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathbf{j} = \left\langle -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right\rangle.$$

Επομένως

$$\begin{aligned} (D_{\mathbf{n}} f)_{P(2,0)} &= (\mathbf{i} + 5\,\mathbf{j}) \cdot \left(-\frac{1}{2}\,\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathbf{j}\right) = \langle 1, 5\rangle \cdot \left\langle -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right\rangle \\ &= 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 5 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\sqrt{3} - 1}{2} \approx 3.830127. \end{aligned}$$

■

Σημείωση 5.4 - 1

Γενικότερα το διάνυσμα $\mathbf{a}$ κατά τη διεύθυνση της γωνίας θ είναι

$$\mathbf{a} = \cos\theta\,\mathbf{i} + \sin\theta\,\mathbf{j} = \langle\cos\theta\,, \sin\theta\rangle$$

όπου προφανώς $|\mathbf{a}| = 1$, οπότε το μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{n} = \mathbf{a}$.

Πρόταση 5.4 - 1. *Η μέγιστη τιμή της κατευθυνόμενης παραγώγου $D_{\mathbf{n}}f$ μιας συνάρτησης f κατά τη διεύθυνση $\mathbf{n}$ ισούται με $|\nabla f\,|$ και συμβαίνει, όταν τα ∇f και $\mathbf{n}$ έχουν την ίδια διεύθυνση.*

Απόδειξη. Έστω θ η γωνία των ∇f και $\mathbf{n}$. Τότε από την (5.4−5), σύμφωνα και με τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου έχουμε

$$D_{\mathbf{n}}f = \nabla f \cdot \mathbf{n} = |\nabla f\,|\;|\mathbf{n}|\cos\theta = |\nabla f\,|\cos\theta. \tag{5.4 - 12}$$

Άρα το μέγιστο συμβαίνει, όταν $\cos\theta = 1$ ή $\theta = 0$, δηλαδή τα ∇f και $\mathbf{n}$ έχουν την ίδια διεύθυνση και η μέγιστη τιμή προφανώς ισούται με $|\nabla f\,|$. ∎

Παράδειγμα 5.4 - 5

Αν το ύψος h ενός λόφου δίνεται από τον τύπο

$$h = 1000 - 0.01x^2 - 0.02y^2,$$

να υπολογιστεί η διεύθυνση της μέγιστης μεταβολής στο σημείο $(60, 100)$ και η τιμή του.

Λύση. Έστω

$$f(x, y) = 1000 - 0.01x^2 - 0.02y^2.$$

Τότε σύμφωνα με την Πρόταση 5.4 - 1 η μέγιστη μεταβολή γίνεται στη διεύθυνση

$$\nabla f = f_x\,\mathbf{i} + f_y\,\mathbf{j} = \langle f_x, f_y\rangle = \langle -0.02\,x, -0.04\,y\rangle\,,$$

οπότε στο σημείο $(60, 100)$ η διεύθυνση είναι

$$\nabla f|_{(60,100)} = \nabla f(60, 100) = -1.2\,\mathbf{i} - 4\,\mathbf{j} = \langle -1.2, -4\rangle$$

με τιμή $|\nabla f(60, 100)| = \sqrt{(-1.2)^2 + (-4)^2} \approx 4.176.$ ∎

Παράδειγμα 5.4 - 6

Όμοια της συνάρτησης

$$f(x,y,z) = (x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2$$

στο σημείο $(2,-1,2)$.

Λύση. Έχουμε $f_x = 4x + 2y + 2z$ και λόγω της συμμετρίας της f θα είναι $f_y = 4y + 2z + 2x$ και $f_z = 4z + 2x + 2y$. Άρα

$$\nabla f = f_x\,\mathbf{i} + f_y\,\mathbf{j} + f_z\,\mathbf{k} = \langle 4x + 2y + 2z, 4y + 2z + 2x, 4z + 2x + 2y\rangle\,,$$

οπότε στο σημείο $(2,-1,2)$ η διεύθυνση είναι

$$\nabla f(2,-1,2) = 10\,\mathbf{i} + 4\,\mathbf{j} + 10\,\mathbf{k} = \langle 10, 4, 10\rangle$$

με τιμή $|\nabla f(2,-1,2)| = \sqrt{10^2 + 4^2 + 10^2} \approx 14.69694.$ ■

Πρόταση 5.4 - 2. *Το διάνυσμα της κλίσης $\nabla f\,(x_0,y_0)$ είναι κάθετο στην επιφάνεια $f\,(x,y) - k = 0$ στο σημείο (x_0,y_0), αντίστοιχα το $\nabla f\,(x_0,y_0,z_0)$ στην $f\,(x,y,z) - k = 0$ στο (x_0,y_0,z_0). (Σχ. 5.4 - 3)*

Άμεση συνέπεια της Πρότασης 5.4 - 2 είναι το πόρισμα:

Πόρισμα 5.4 - 1. *Το εφαπτόμενο επίπεδο στην επιφάνεια $f\,(x,y) - k = 0$ στο σημείο (x_0,y_0), αντίστοιχα στην $f\,(x,y,z) - k = 0$ στο (x_0,y_0,z_0) είναι κάθετο στο διάνυσμα της κλίσης $\nabla f\,(x_0,y_0)$, αντίστοιχα $\nabla f\,(x_0,y_0)$.*

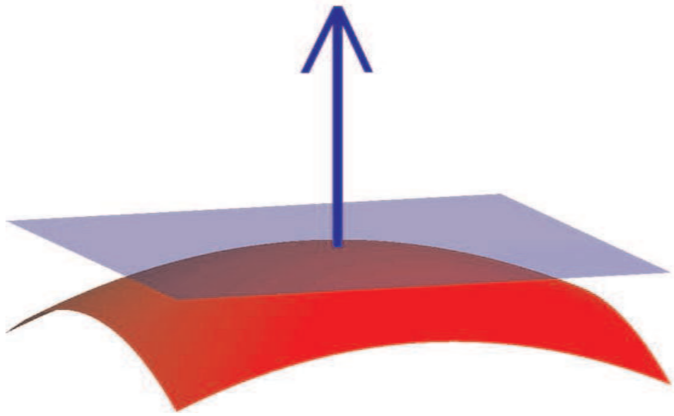
Σύμφωνα με το παραπάνω πόρισμα αποδεικνύεται ότι:

Πόρισμα 5.4 - 2. *Έστω το επίπεδο π με εξίσωση $f(x,y,z) = Ax + By + Cy + D = 0$. Τότε το διάνυσμα $\nabla f = \langle A, B, C\rangle$ είναι κάθετο στο π.*

Παράδειγμα 5.4 - 7

Να δειχθεί ότι η κατευθυνόμενη παράγωγος της $g(x,y) = \frac{y^2}{x}$ σε κάθε σημείο της έλλειψης $2x^2 + y^2 = 1$, με $x \neq 0$, στην κατεύθυνση του μοναδιαίου κάθετου στην έλλειψη στο σημείο αυτό είναι ίση με μηδέν.

Λύση. Έστω $P = P\,(x_0,y_0)$ τυχόν σημείο της έλλειψης. Σύμφωνα με την



Σχήμα 5.4 - 3: Το διάνυσμα της κλίσης είναι κάθετο στην επιφάνεια και στο εφαπτόμενο επίπεδο

Πρόταση 5.4 - 2 το διάνυσμα της κλίσης $\nabla f\,(x_0, y_0)$ είναι κάθετο στην έλλειψη $f(x, y) = 2x^2 + y^2 - 1$ στο σημείο αυτό. Τότε, επειδή

$$\nabla f\,(x_0, y_0) = \langle f_x, f_y \rangle = \langle 4\,x_0, 2\,y_0 \rangle\,,$$

το αντίστοιχο μοναδιαίο $\mathbf{n} = \langle n_1, n_2 \rangle$ ισούται με

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \frac{4\,x_0\,\mathbf{i} + 2\,y_0\,\mathbf{j}}{\sqrt{16\,x_0^2 + 4\,y_0^2}} = \frac{4\,x_0\,\mathbf{i} + 2\,y_0\,\mathbf{j}}{2\,\sqrt{4\,x_0^2 + y_0^2}} \\ &= \left\langle \frac{2\,x_0}{\sqrt{4\,x_0^2 + y_0^2}}\,, \frac{y_0}{\sqrt{4\,x_0^2 + y_0^2}} \right\rangle = \langle n_1, n_2 \rangle \end{aligned} \tag{1}$$

Η κλίση της συνάρτησης $g(x, y)$ στο σημείο (x_0, y_0) είναι

$$\nabla g\,(x_0, y_0) = \langle g_x, g_y \rangle = \left\langle -\frac{y_0^2}{x_0^2}\,, \frac{2\,y_0}{x_0} \right\rangle. \tag{2}$$

Από τις (1) και (2) σύμφωνα και με την $(5.4 - 8)$ - τύπος υπολογισμού - προκύπτει ότι

$$(D_{\,\mathbf{n}}g)_{P(x_0, y_0)} = \frac{2\,x_0}{\sqrt{4\,x_0^2 + y_0^2}} \left(-\frac{y_0^2}{x_0^2} \right) + \frac{y_0}{\sqrt{4\,x_0^2 + y_0^2}}\,\frac{2\,y_0}{x_0} = 0,$$

δηλαδή η αποδεικτέα. ∎

5.4.1 Συντηρούμενα διανυσματικά πεδία

Τα πεδία αυτά συναντώνται στη Φυσική και εφαρμογές των θα δοθούν στα επικαμπύλια ολοκληρώματα.

Ορισμός 5.4 - 3 (συντηρούμενο πεδίο). *Το διανυσματικό πεδίο που περιγράφεται από τη διανυσματική συνάρτηση* $\mathbf{F}$ *θα λέγεται συντηρούμενο (conservative field), όταν*

$$\mathbf{F} = \nabla\varphi. \tag{5.4 - 15}$$

Στις περιπτώσεις αυτές η βαθμωτή συνάρτηση φ ορίζεται σαν το **δυναμικό** (potential) του διανυσματικού πεδίου.

Παράδειγμα 5.4 - 8

Έστω το διανυσματικό πεδίο που περιγράφεται από τη διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Ζητείται να υπολογιστεί το δυναμικό του, εφόσον υπάρχει.

Λύση. Έστω $\varphi(x, y, z)$ το δυναμικό του πεδίου. Τότε

$$\mathbf{F} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k} = \nabla\varphi = \varphi_x\,\mathbf{i} + \varphi_y\,\mathbf{j} + \varphi_z\,\mathbf{k},$$

οπότε

$$\varphi_x = x, \quad \varphi_y = y \quad \text{και} \quad \varphi_z = z,$$

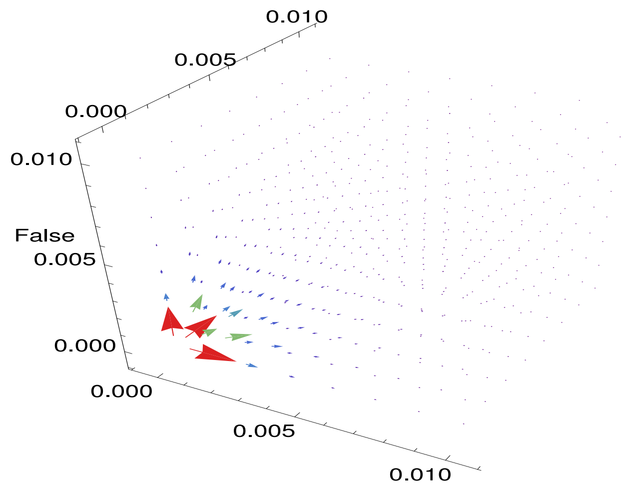
δηλαδή

$$\begin{aligned} d\varphi &= \varphi_x\,dx + \varphi_y\,dy + \varphi_z\,dz = x\,dx + y\,dy + z\,dz \\ &= \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)_x\,dx + \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)_y\,dy \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)_z\,dz = d\left(x^2 + y^2 + z^2\right). \end{aligned}$$

Άρα

$$\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + c,$$

όταν c σταθερά. ■



Σχήμα 5.4 - 4: Παράδειγμα 5.4 - 9: η μορφή του πεδίου Coulomb

Παράδειγμα 5.4 - 9

Έστω το πεδίο Coulomb (Σχ. 5.4 - 4), που περιγράφεται από τη διανυσματική συνάρτηση

$$\mathbf{F} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{r}}{r^3} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,.$$

Τότε η $\mathbf{F}$ είναι δυνατόν να θεωρηθεί σαν η κλίση της βαθμωτής συνάρτησης

$$\varphi = \varphi(x,y,z) = -\frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} = -\frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1/2},$$

οπότε η φ ορίζει στην περίπτωση αυτή το δυναμικό του πεδίου Coulomb.

Είναι προφανές ότι υπάρχουν και διανυσματικά πεδία που δεν είναι οι κλίσεις βαθμωτών πεδίων. Του είδους αυτού τα πεδία λέγονται **μη συντηρούμενα**.

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστεί η κλίση των παρακάτω συναρτήσεων

$i)$	$e^x \sin y$	$vi)$	$e^{-x^2} - y^{1/2}$
$ii)$	$\ln\left(x^2+y^2-z^2\right)$	$vii)$	$\sin\left(x^2+y^2\right) - z^2$

2. Να υπολογιστεί η διευθυνόμενη παράγωγος των παρακάτω συναρτήσεων f στο σημείο P κατά τη διεύθυνση του διανύσματος $\mathbf{a}$, όταν

i) $f = x^2 + y^2 + z^2$, $P(1, 2, 3)$, $\quad \mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$

ii) $f = e^{x-y}$, $P(0, -1)$, $\quad \mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\,\mathbf{j}$

iii) $f = e^x \cos 2y$, $P(1, \pi, 0)$, $\quad \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$.

3. Να βρεθεί η σταθερά γ, έτσι ώστε σε κάθε σημείο τομής των δύο σφαιρών

$$(x - \gamma)^2 + y^2 + z^2 = 3, \quad x^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 1$$

τα αντίστοιχα εφαπτόμενα επίπεδα να είναι κάθετα μεταξύ τους.

4. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων της επιφάνειας $(y + z)^2 + (z - x)^2 = 16$, στα οποία η ευθεία που είναι κάθετη στην επιφάνεια, να είναι παράλληλη στο yz-επίπεδο.

5. Να βρεθούν τα a, b, c, έτσι ώστε οι σφαίρες

$$(x - b)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = 1 \quad \text{και} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

να τέμνονται κάθετα.

5.5 Απόκλιση

Ορισμός 5.5 - 1 (απόκλιση). *Έστω ένα διανυσματικό πεδίο που περιγράφεται από τη διανυσματική συνάρτηση* $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$, *όταν* P, Q *και* R *οι συνιστώσες της* $\mathbf{F}$ *ως προς το ορθογώνιο σύστημα αξόνων* $Oxyz$ *και ότι η* $\mathbf{F}$ *έχει τουλάχιστον πρώτης τάξης μερικές παραγώγους σε κάθε σημείο* (x, y, z) *του πεδίου ορισμού της. Τότε ορίζεται σαν απόκλιση (divergence) της* $\mathbf{F}$ *και συμβολίζεται με* $div\mathbf{F}$ *ή* $\nabla \cdot \mathbf{F}$, *η βαθμωτή συνάρτηση*

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\,. \tag{5.5 - 1}$$

Αντίστοιχος ορισμός δίνεται όταν $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$.

Σημείωση 5.5 - 1

Είναι $\nabla \cdot \mathbf{F} \neq \mathbf{F} \cdot \nabla$, διαφορετικά το $\nabla \cdot \mathbf{F}$ είναι συμβολισμός και δεν έχει την έννοια του εσωτερικού γινομένου.

Ιδιότητες της απόκλισης

i) $\nabla \cdot (\lambda \mathbf{F} + \mu \mathbf{G}) = \lambda \nabla \cdot \mathbf{F} + \mu \nabla \cdot \mathbf{G}$ για κάθε $\lambda, \mu \in \Re$,

ii) $\nabla \cdot (f\mathbf{G}) = (\nabla f) \cdot \mathbf{G} + f\,(\nabla \cdot \mathbf{G})\,,$ όταν η f είναι βαθμωτή συνάρτηση.

Παράδειγμα 5.5 - 1

Αν $\mathbf{F} = x^2 z\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} - z^3\mathbf{k}$, να υπολογισθεί η απόκλιση στο σημείο $(1, -1, 2)$.
Λύση. Είναι $P(x, y, z) = x^2 z$, $Q(x, y, z) = y^2$ και $R(x, y, z) = -z^3$, οπότε

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = 2xz + 2y - 3z^2.$$

Τότε $\nabla \cdot \mathbf{F}_{(1,-1,2)} = -10.$ ■

5.6 Τελεστής Laplace

Έστω ότι η συνάρτηση $f(x, y, z)$ έχει μερικές παραγώγους τουλάχιστον 2ης τάξης σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της. Τότε η κλίση της είναι

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k},$$

οπότε για την απόκλιση της διανυσματικής συνάρτησης ∇f έχουμε

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla f) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\,. \qquad (5.6 - 1) \end{aligned}$$

Δίνονται στη συνέχεια οι παρακάτω ορισμοί.

Ορισμός 5.6 - 1 (τελεστής Laplace). *Ο τελεστής Laplace είναι ένας διαφορικός τελεστής 2ης τάξης και ορίζεται στο $\Re^2$ ως εξής:*

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\,, \qquad (5.6 - 2)$$

ενώ αντίστοιχα στο $\Re^3$ ως:

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\,. \qquad (5.6 - 3)$$

Σύμφωνα και με την (5.6 − 1) έχουμε τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 5.6 - 2 (Laplacian συνάρτησης). *Έστω η συνάρτηση $f(x, y)$ $|S \subseteq \Re^2$, αντίστοιχα $f(x, y, z)|S \subseteq \Re^3$ με S ανοικτό σύνολο, που έχει τουλάχιστον 2ης τάξης μερικές παραγώγους στο S. Τότε η Laplacian της f ορίζεται ως*

$$\nabla \cdot (\nabla f) = \nabla^2 f = \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \qquad (5.6 - 4)$$

αντίστοιχα

$$\nabla \cdot (\nabla f) = \nabla^2 f = \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}. \qquad (5.6 - 5)$$

Ειδικά, όταν

$$\nabla^2 f = 0 \qquad (5.6 - 6)$$

η f λέγεται **αρμονική** και η (5.6 − 6) ορίζει την **εξίσωση του Laplace**.

5.7 Στροβιλισμός

Ορισμός 5.7 - 1 (στροβιλισμός). *Έστω ένα διανυσματικό πεδίο που περιγράφεται από τη διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$ όπου P, Q και R οι συνιστώσες της $\mathbf{F}$ ως προς ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων $Oxyz$ και για την οποία υποτίθεται ότι υπάρχουν τουλάχιστον οι πρώτης τάξης μερικές παράγωγοι σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της. Τότε ορίζεται σαν στροβιλισμός (curl) της $\mathbf{F}$ και συμβολίζεται με $\operatorname{curl}\mathbf{F}$ ή $\operatorname{rot}\mathbf{F}$ ή και $\nabla\times\mathbf{F}$, η διανυσματική συνάρτηση*

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}. \qquad (5.7 - 1)$$

Από την (5.7 − 1) προκύπτει ότι[4]

$$\nabla \times \mathbf{F} = (R_y - Q_z)\,\mathbf{i} + (P_z - R_x)\,\mathbf{j} + (Q_x - P_y)\,\mathbf{k}. \qquad (5.7 - 2)$$

[4] Βλέπε Μάθημα: Διανυσματικές Συναρτήσεις μιας μεταβλητής, Ορισμός 4.1 − 9.

Ιδιότητες του στροβιλισμού

Οι περισσότερο χρησιμοποιούμενες είναι:

i) $\nabla \times (\mathbf{F}+\mathbf{G}) = \nabla \times \mathbf{F} + \nabla \times \mathbf{G}$,

ii) $\nabla \times (\lambda \mathbf{F}) = \lambda \nabla \times \mathbf{F}$ για κάθε $\lambda \in \Re$,

iii) $\nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0}$, δηλαδή **ο στροβιλισμός της κλίσης είναι μηδέν**,

iv) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$ **η απόκλιση του στροβιλισμού είναι μηδέν**

Η απόδειξη αφήνεται σαν άσκηση.

Παράδειγμα 5.7 - 1

Έστω $\mathbf{F} = yz\mathbf{i} + zx\mathbf{j} + 2xy\mathbf{k}$. Τότε

$$P(x,y,z) = yz, \quad Q(x,y,z) = zx \quad \text{και} \quad R(x,y,z) = 2xy,$$

οπότε

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ yz & xz & 2xy \end{vmatrix} = x\mathbf{i} - y\mathbf{j},$$

δηλαδή το διάνυσμα $\nabla \times \mathbf{F}$ ανήκει στο xy-επίπεδο.

5.7.1 Αστρόβιλα διανυσματικά πεδία

Ορισμός 5.7 - 2 (αστρόβιλο πεδίο). *Έστω ένα διανυσματικό πεδίο που περιγράφεται από τη διανυσματική συνάρτηση* $\mathbf{F}$*. Τότε το πεδίο θα λέγεται αστρόβιλο (irrotational field), όταν ισχύει*

$$\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}. \tag{5.7 - 3}$$

Σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση το πεδίο θα λέγεται στροβιλό (vortex field).

Παράδειγμα 5.7 - 2

Το διανυσματικό πεδίο

$$\mathbf{F} = 4x^3y^3z^2\,\mathbf{i} + 3x^4y^2z^2\,\mathbf{j} + 2x^4y^3z\,\mathbf{k}$$

είναι αστρόβιλο, επειδή

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 4x^3y^3z^2 & 3x^4y^2z^2 & 2x^4y^3z \end{vmatrix} = \mathbf{0}.$$

Αποδεικνύεται ότι ισχύει το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 5.7 - 1. *Ένα διανυσματικό πεδίο είναι αστρόβιλο, όταν είναι συντηρούμενο και αντίστροφα.*

Εφαρμογές του θεωρήματος θα δοθούν στο Μάθημα των Επικαμπύλιων Ολοκληρωμάτων.

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστεί ο στροβιλισμός των διανυσματικών πεδίων που περιγράφονται από τις παρακάτω διανυσματικές συναρτήσεις $\mathbf{F}$:

i) $x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$,

ii) $x\mathbf{i} + yz\mathbf{j} - \left(x^2 + z^2\right)\mathbf{k}$.

2. Δείξτε ότι το παρακάτω πεδίο είναι αστρόβιλο

$$\mathbf{F} = 6xy\mathbf{i} + \left(3x^2 - 3y^2z^2\right)\mathbf{j} - 2y^3z\mathbf{k}.$$

5

[5]Απαγορεύεται η αναδημοσίευση ή αναπαραγωγή του παρόντος στο σύνολό του ή τμημάτων του χωρίς τη γραπτή άδεια του Καθ. Α. Μπράτσου.

E-mail: bratsos@teiath.gr URL: http://users.teiath.gr/bratsos/

Βιβλιογραφία

[1] Μπράτσος, Α. (2011), Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, ISBN 978–960–351–874–7.

[2] Μπράτσος, Α. (2002), Ανώτερα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, ISBN 960–351–453–5/978–960–351–453–4.

[3] Finney R. L., Giordano F. R. (2004), Απειροστικός Λογισμός ΙΙ, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, ISBN 978–960–524–184–1 .

[4] Don, E., Schaum's Outlines – Mathematica (2006), Εκδόσεις Κλειδάριθμος, ISBN 978–960–461–000–6.

[5] Spiegel M., Wrede R. (2006), Ανώτερα Μαθηματικά, Εκδόσεις Τζιόλα, ISBN 960–418–087–8.

Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm
- http://mathworld.wolfram.com/
- http://eom.springer.de/