Μάθημα 1

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

1.1 Ορισμός και θεώρημα ύπαρξης

Ορισμός 1.1 - 1 (ορισμός μετασχηματισμού). *Έστω $f(t)$ μία πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού $[0, +\infty]$ και $\sigma > 0$ σταθερά. Τότε ορίζεται σαν μετασχηματισμός Laplace της f και συμβολίζεται με $\mathcal{L}[f(t)]$ ή συντομότερα $\mathcal{L}(f)$, η συνάρτηση που ορίζεται από την τιμή του γενικευμένου ολοκληρώματος του 1ου είδους*[1]

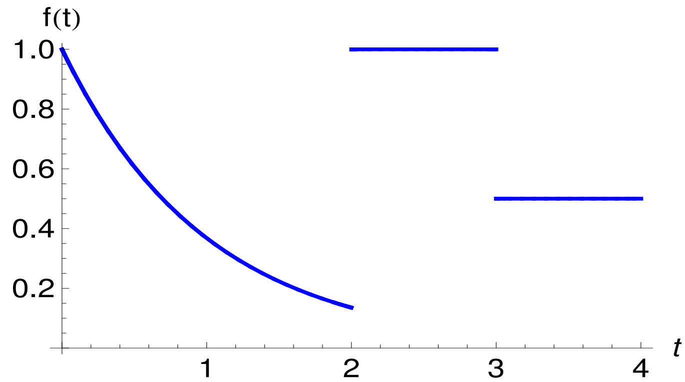
$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt \quad \mu\varepsilon \quad s \geq \sigma, \tag{1.1 - 1}$$

όταν το ολοκλήρωμα υπάρχει. Η παράμετρος s είναι δυνατόν να είναι και μιγαδικός αριθμός, αν υποτεθεί ότι $Re(s) \geq 0$.

Η φυσική σημασία του μετασχηματισμού εξαρτάται από τη συνάρτησης $f(t)$. Στην $(1.1 - 1)$ η $f(t)$ λέγεται τότε ο **αντίστροφος μετασχηματισμός** της $F(s)$ και συμβολίζεται με

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]. \tag{1.1 - 2}$$

[1] Βλέπε βιβλιογραφία και βιβλίο Α. Μπράτσος [2] Κεφ. 8.



Σχήμα 1.1 - 1: συνάρτηση $f(t)$ συνεχής για κάθε $t \in [0,2) \cup (2,3) \cup (3,4)$, ενώ παρουσιάζει ασυνέχεια στα σημεία $t = 2, 3$ με $\lim_{t\to 2-0} e^{-t} = e^{-1}$, $\lim_{t\to 2+0} f(t) = 1$, $\lim_{t\to 3-0} f(t) = 1$ και $\lim_{t\to 3+0} f(t) = 0.5$.

Στο εξής θα θεωρείται ότι το s είναι πραγματικός αριθμός και θα συμβολίζεται με τα κεφαλαία γράμματα F, X, I κ.λπ. οι μετασχηματισμένες κατά Laplace συναρτήσεις των f, x, i κ.λπ., αντίστοιχα.

Ορισμός 1.1 - 2. *Μια συνάρτηση $f(t)$ με πεδίο ορισμού το $[a,b]$ θα λέγεται* **κατά τμήματα συνεχής** *(Σχ. 1.1 - 1), όταν είναι ορισμένη για κάθε $t \in [a,b]$ και υποδιαιρώντας το διάστημα $[a,b]$ σε ν το πλήθος υποδιαστήματα της μορφής (a_k, b_k); $k = 1, 2, \ldots, \nu$ το όριό της στα άκρα του διαστήματος (a_k, b_k) είναι πεπερασμένο για κάθε $k = 1, 2, \ldots, \nu$.*

Ο ορισμός αυτός εύκολα γενικεύεται για την περίπτωση που η συνάρτηση $f(t)$ έχει πεδίο ορισμού το $[0, +\infty)$.

Ορισμός 1.1 - 3. *Μια συνάρτηση $f(t)$ λέγεται* **συνάρτηση εκθετικής τάξης** *(function of exponential order), όταν υπάρχουν σταθερές γ, t_0 και M με t_0, $M > 0$, έτσι ώστε*

$$|f(t)| < M\,e^{\gamma t} \quad \textit{για κάθε} \quad t > t_0. \tag{1.1 - 3}$$

Τότε το γ ορίζει την τάξη της f.

Στο παρακάτω θεώρημα δίνεται η συνθήκη που πρέπει να ισχύει, έτσι ώστε να υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace μιας συνάρτησης.

Θεώρημα 1.1 - 1 (ύπαρξης του μετασχηματισμού). *Έστω η συνάρτηση $f(t)$ που είναι ορισμένη για κάθε $t \in [0, +\infty)$. Αν η f είναι*

i) κατά τμήματα συνεχής σε κάθε πεπερασμένο διάστημα της μορφής $[0, \alpha]$ όπου $\alpha > 0$,

ii) εκθετικής τάξης, δηλαδή υπάρχουν σταθερές γ, t_0 και M με t_0, $M > 0$, έτσι ώστε

$$|f(t)| \leq M e^{\gamma t} \quad \text{για κάθε } t \in [0, +\infty), \tag{1.1 - 4}$$

τότε ο μετασχηματισμός Laplace της $f(t)$ υπάρχει για κάθε $s > \gamma$.

Η απαίτηση της κατά τμήματα συνεχούς συνάρτησης και η ισχύς της (1.1−4) ορίζουν τις λεγόμενεςσυνθήκες Dirichlet. Το σύνολο των συναρτήσεων f με πεδίο ορισμού $[0, +\infty)$ που ικανοποιούν τις συνθήκες Dirichlet, δηλαδή των συναρτήσεων που υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace, θα συμβολίζεται στο εξής με $D_{\mathcal{L}}$.

Δίνονται στη συνέχεια υπολογισμοί του μετασχηματισμού Laplace με τον Ορισμό 1.1 - 1.

Παράδειγμα 1.1 - 1

Έστω $f(t) = A$ όπου A σταθερά. Τότε[2]

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t)] &= F(s) = \int_0^{+\infty} A e^{-st} dt = -\frac{A}{s} \lim_{x+\infty} e^{-st}\Big|_0^x \\ &= -\frac{A}{s}\left(\lim_{x+\infty} e^{-sx} - e^0\right) = \frac{A}{s} \quad \text{με} \quad s > 0. \end{aligned}$$

Άρα

$$\mathcal{L}(A) = \frac{A}{s} \quad \text{με} \quad s > 0. \tag{1.1 - 5}$$

[2] Η συνάρτηση e^x ορίζεται για κάθε $x \in \Re$ και ισχύει: $\lim_{x \to -\infty} = 0$ και $\lim_{x \to +\infty} = +\infty$.

Παράδειγμα 1.1 - 2

Όμοια, έστω $f(t) = e^{-at}$. Τότε

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[e^{-at}\right] &= \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-st}\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s+a)t}\, dt \\
&= -\frac{1}{s+a} \lim_{x\to+\infty} e^{-(s+a)t}\Big|_0^x = -\frac{1}{s+a}\left[\lim_{x\to+\infty} e^{-(s+a)x} - e^0\right] \\
&= \frac{1}{s+a}, \quad \text{όταν} \quad s+a>0.
\end{aligned}$$

Άρα

$$\mathcal{L}\left[e^{-at}\right] = \frac{1}{s+a} \quad \text{με} \quad s+a>0. \tag{1.1 - 6}$$

Επομένως

$$\mathcal{L}\left[e^{3t}\right] = \mathcal{L}\left[e^{-(-3)\,t}\right] = \frac{1}{s+3} \quad \text{με} \quad s+3>0.$$

1.2 Ιδιότητες του μετασχηματισμού

Αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace, που με τη χρήση τους υπολογίζονται οι μετασχηματισμοί των διαφόρων συναρτήσεων[3].

Θεώρημα 1.2 - 1 (γραμμική ιδιότητα). *Έστω $f,\, g \in D_{\mathcal{L}}$. Τότε αν $\kappa,\, \lambda \in \Re$ ισχύει*

$$\mathcal{L}[\kappa f(t) + \lambda g(t)] = \kappa \mathcal{L}[f(t)] + \lambda \mathcal{L}[g(t)]. \tag{1.2 - 1}$$

Το παραπάνω θεώρημα γενικεύεται για ν-το πλήθος συναρτήσεις.

Παράδειγμα 1.2 - 1

Είναι γνωστό ότι αν $f(t) = \sin t$, τότε $\sin t = \left(e^{it} - e^{-it}\right)/2i$ όπου i η φανταστική μονάδα. Σύμφωνα με τον τύπο $(1.1-6)$ και τη γραμμική ιδιότητα

[3] Οι ιδιότητες αυτές αποδεικνύεται ότι ισχύουν επίσης και για τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace - Μάθημα 2.

έχουμε

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\sin t) &= \frac{1}{2i}\,\mathcal{L}\left(e^{it}\right) - \frac{1}{2}\mathcal{L}\left(e^{-it}\right) = \frac{1}{2i}\,\mathcal{L}\left(e^{-(-\mathbf{i})\,t}\right) - \frac{1}{2}\mathcal{L}\left(e^{-it}\right)\\ &= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s+(-i)} - \frac{1}{s+i}\right) = \frac{1}{s^2+1}\,,\end{aligned}$$

δηλαδή

$$\mathcal{L}(\sin t) = \frac{1}{s^2+1}\,. \tag{1.2 - 2}$$

Όμοια αποδεικνύεται ότι

$$\mathcal{L}(\cos t) = \frac{1}{2}\mathcal{L}\left[e^{it}+e^{-it}\right] = \frac{s}{s^2+1} \tag{1.2 - 3}$$

και

$$\mathcal{L}(\sinh at) = \frac{1}{2}\mathcal{L}\left[e^{at}-e^{-at}\right] = \frac{s}{s^2-a^2}\,, \tag{1.2 - 4}$$

$$\mathcal{L}(\cosh at) = \frac{1}{2}\mathcal{L}\left[e^{at}+e^{-at}\right] = \frac{a}{s^2-a^2}\,, \tag{1.2 - 5}$$

όταν $s > a > 0$.

Θεώρημα 1.2 - 2. *Αν $f \in D_{\mathcal{L}}$ με $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, τότε*

$$\mathcal{L}[f(kt)] = \frac{1}{k}\,F\left(\frac{s}{k}\right) \quad \textit{με} \quad k > 0. \tag{1.2 - 6}$$

Παράδειγμα 1.2 - 2

Σύμφωνα με το Θεώρημα 1.2 - 2 και τον τύπο $(1.2-6)$ είναι

$$\mathcal{L}(\cos \omega t) = \frac{1}{\omega}\,\frac{\frac{s}{\omega}}{\left(\frac{s}{\omega}\right)^2+1} = \frac{s}{s^2+\omega^2}\,, \tag{1.2 - 7}$$

$$\mathcal{L}(\sin \omega t) = \frac{1}{\omega}\,\frac{1}{\left(\frac{s}{\omega}\right)^2+1} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \quad \text{με} \quad \omega > 0. \tag{1.2 - 8}$$

Επομένως

$$\mathcal{L}(\cos 2t) = \frac{s}{s^2+4}\,, \quad \mathcal{L}(\sin 2t) = \frac{2}{s^2+4}\,, \quad \text{κ.λπ.}$$

Θεώρημα 1.2 - 3 (προπορείας). *Αν* $f \in D_{\mathcal{L}}$ *και* $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, *τότε*

$$\mathcal{L}\left[e^{-at} f(t)\right] = F(s+a), \quad \textit{όταν} \quad s + a > 0 \ \textit{και} \ a > 0. \tag{1.2 - 9}$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 1.2 - 3 και τους τύπους $(1.2 - 7)$ - $(1.2 - 8)$ είναι:

$$\mathcal{L}\left[e^{-at} \cos \omega t\right] = \frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}, \tag{1.2 - 10}$$

$$\mathcal{L}\left[e^{-at} \sin \omega t\right] = \frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}. \tag{1.2 - 11}$$

Επομένως

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[e^{-t} \cos 2t\right] &= \frac{s+1}{(s+1)^2 + 2^2} = \frac{s+1}{s^2 + 2s + 5}, \\
\mathcal{L}\left[e^{3t} \sin 2t\right] &= \mathcal{L}\left[e^{-(\mathbf{-3})\,t} \sin 2t\right] = \frac{2}{[s + (-3)]^2 + 2^2} \\
&= \frac{2}{s^2 - 6s + 13}, \\
\mathcal{L}\left[e^{t} \sin\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)\right] &= \mathcal{L}\left[e^{t}\left(\sin 2t \cos\frac{\pi}{4} + \cos 2t \sin\frac{\pi}{4}\right)\right] \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\mathcal{L}\left[e^{t} \sin 2t\right] + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathcal{L}\left[e^{t} \cos 2t\right] \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\mathcal{L}\left[e^{-(-\,\mathbf{t})} \sin 2t\right] + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathcal{L}\left[e^{-(-\,\mathbf{t})} \cos 2t\right] \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{2}{(s-1)^2 + 2^2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{s-1}{(s-1)^2 + 2^2} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{s+1}{s^2 - 2s + 5}.
\end{aligned}$$

Θεώρημα 1.2 - 4 (υστέρησης). *Αν* $f \in D_{\mathcal{L}}$ *με* $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ *και*

$$g(t) = \begin{cases} f(t-a) & \textit{αν} \quad t > a \\ 0 & \textit{αν} \quad t < a, \end{cases}$$

τότε

$$\mathcal{L}[g(t)] = e^{-as}F(s), \quad \text{όταν} \quad t > a > 0. \tag{1.2 - 12}$$

Με το θεώρημα αυτό δίνεται η δυνατότητα να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace μιας συνάρτησης, που ορίζεται για $t > a$ με $a > 0$. Παραδείγματα τέτοιων συναρτήσεων έχουμε στη μελέτη συστημάτων που ενεργοποιούνται τη χρονική στιγμή $t = a$ αντί της $t = a$.

Παράδειγμα 1.2 - 3

Επειδή $\mathcal{L}\left[t^3\right] = \frac{3\,!}{s^{3+1}} = \frac{6}{s^4}$, σύμφωνα με το Θεώρημα 1.2 - 4 ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης

$$g(t) = \begin{cases} (t-1)^3 & \text{αν} \quad t > 1 \\ 0 & \text{αν} \quad t < 1 \end{cases} \qquad \text{είναι} \quad \mathcal{L}[g(t)] = \frac{6\,e^{-s}}{s^4}\,.$$

Άλλες εφαρμογές του Θεωρήματος 1.2 - 3 θα δοθούν στην επόμενη παράγραφο.

Θεώρημα 1.2 - 5. *Αν $f \in D_{\mathcal{L}}$ με $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, τότε*

$$\mathcal{L}[t f(t)] = -\frac{d\,F(s)}{ds} = -F'(s).$$

Εφαρμόζοντας διαδοχικά n φορές το Θεώρημα 1.2 - 5, τελικά προκύπτει

$$\mathcal{L}\left[t^n f(t)\right] = (-1)^n \frac{d^n\,F(s)}{ds^n} = (-1)^n F^{(n)}(s), \tag{1.2 - 13}$$

όταν $n = 1,\, 2,\, \ldots\,.$

Παράδειγμα 1.2 - 4

Σύμφωνα με τον τύπο $(1.2-8)$ είναι: $\mathcal{L}(\sin 3t) = \frac{3}{s^2+9}$. Εφαρμόζοντας τον τύπο $(1.2-13)$ για $n = 1,\, 2$, έχουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[t\,\sin 3t\right] &= (-1)^1 \frac{d}{ds}\left(\frac{3}{s^2+9}\right) = \frac{6s}{\left(s^2+9\right)^2}\,, \\ \mathcal{L}\left[t^2\,\sin 3t\right] &= (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{3}{s^2+9}\right) = \frac{d}{ds}\left[\frac{6s}{\left(s^2+9\right)^2}\right] = \frac{18\left(s^2-3\right)}{\left(s^2+9\right)^3}\,. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 1.2 - 5

Όμοια σύμφωνα με τον τύπο $(1.2-8)$ είναι: $\mathcal{L}\left[e^{-at}\right]=\frac{1}{s+a}$ με $s+a>0$. Εφαρμόζοντας τώρα διαδοχικά τον τύπο $(1.2-13)$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[t\,e^{-at}\right] &= (-1)^1\,\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s+\alpha}\right)=\frac{1}{(s+a)^2}\,,\\
\mathcal{L}\left[t^2\,e^{-at}\right] &= (-1)^2\,\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{s+a}\right)=\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{(s+a)^2}\right]=\frac{\overbrace{2}^{2\,!}}{(s+a)^3}\,,\\
\mathcal{L}\left[t^3\,e^{-at}\right] &= (-1)^3\,\frac{d^3}{ds^3}\left(\frac{1}{s+a}\right)=\frac{d}{ds}\left[\frac{2\,!}{(s+a)^3}\right]=\frac{\overbrace{2\cdot 3}^{3\,!}}{(s+a)^4}\,,\\
\cdots\quad & \quad \cdots\\
\mathcal{L}\left[t^n\,e^{-at}\right] &= (-1)^n\,\frac{d^n}{ds^n}\left(\frac{1}{s+a}\right)=\frac{d}{ds}\left[\frac{(n-1)\,!}{(s+a)^n}\right]=\frac{n\,!}{(s+a)^{n+1}}\,.
\end{aligned}$$

Άρα

$$\mathcal{L}\left[t^n\,e^{-at}\right]=\frac{n\,!}{(s+a)^{n+1}}\,, \qquad (1.2\text{ - }14)$$

όταν $n=0,\,1,\,\ldots$ και $s+a>0$.

Αν στην $(1.2-14)$ είναι $a=0$, τότε

$$\mathcal{L}\left[t^n\right]=\frac{n\,!}{s^{n+1}}\,,\quad \text{όταν}\quad n=0,\,1,\,\ldots\,. \qquad (1.2\text{ - }15)$$

Επομένως σύμφωνα με τους τύπους $(1.2-14)$ και $(1.2-15)$ έχουμε

$$\mathcal{L}\left[t^2\,e^{3t}\right]=\frac{2\,!}{(s-3)^{2+1}}=\frac{2}{(s-3)^3}\,,\quad \text{και}\quad \mathcal{L}\left[t^3\right]=\frac{3\,!}{s^{3+1}}=\frac{6}{s^4}\,.$$

Θεώρημα 1.2 - 6 (παραγώγου 1ης τάξης). *Αν $f\in D_{\mathcal{L}}$ και υπάρχει η πρώτης τάξης παράγωγος της f και είναι συνεχής συνάρτηση ή κατά τμήματα συνεχής για κάθε $t\geq 0$, τότε υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace της παραγώγου f' και ισχύει*

$$\mathcal{L}\left[f'(t)\right]=s\,\mathcal{L}[f(t)]-f(0)\quad \textit{με}\quad s>a. \qquad (1.2\text{ - }16)$$

Εφαρμόζοντας τώρα την $(1.2-16)$ για τη δεύτερης τάξης παράγωγο της f, υποθέτοντας ότι η f'' είναι συνεχής ή κατά τμήματα συνεχής για κάθε $t \geq 0$, έχουμε

$$\mathcal{L}\left[f''(t)\right] = s\,\mathcal{L}\left[f'(t)\right] - f'(0) = s\left\{s\,\mathcal{L}[f(t)] - f(0)\right\} - f'(0),$$

δηλαδή

$$\mathcal{L}\left[f''(t)\right] = s^2\mathcal{L}[f(t)] - sf(0) - f'(0). \qquad (1.2 - 17)$$

Παράδειγμα 1.2 - 6

Έστω $f(t) = t\sin t$. Τότε $f(0) = 0$, ενώ $f'(t) = \sin t + t\cos t$, οπότε $f'(0) = 0$. Άρα σύμφωνα με την $(1.2-17)$ και με τύπο $(1.2-13)$ για $n = 1$ έχουμε

$$\mathcal{L}\left[f''(t)\right] = s^2\mathcal{L}[t\sin t] - sf(0) - f'(0) = s^2\mathcal{L}[t\sin t] = \frac{2s^3}{\left(s^2+1\right)^2}\,.$$

Άλλες εφαρμογές του θεωρήματος θα δοθούν στη λύση των διαφορικών εξισώσεων (Μάθημα 4).

Το παρακάτω θεώρημα και το πόρισμα να παραλειφθούν σε πρώτη ανάγνωση.

Θεώρημα 1.2 - 7 (ολοκλήρωση του μετασχηματισμού). *Αν $f \in D_{\mathcal{L}}$ με $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ και υπάρχει το $\lim_{t->0} \frac{f(t)}{t}$, τότε*

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^{+\infty} F(x)\,dx. \qquad (1.2 - 18)$$

Πόρισμα 1.2 - 1. *Επειδή $\lim_{s\to 0} e^{-st} = 1$, από την $(1.2-18)$ προκύπτει*

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt = \int_0^{+\infty} F(x)\,dx. \qquad (1.2 - 19)$$

Παράδειγμα 1.2 - 7

Από τον τύπο $(1.2-2)$ και τη σχέση $(1.2-18)$ προκύπτει

$$\mathcal{L}\left(\frac{\sin t}{t}\right) = \int_s^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} s,$$

δηλαδή
$$\mathcal{L}\left(\frac{\sin t}{t}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{s}\right).$$
Τότε από την $(1.2-19)$ έχουμε
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}\,. \qquad (1.2 - 20)$$

Ο υπολογισμός του μετασχηματισμού Laplace μιας συνάρτησης $f(t)$ με το πρόγραμμα MATHEMATICA γίνεται με την εντολή:

```
LaplaceTransform[f(t),t,s]
```

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace των παρακάτω συναρτήσεων $f(t)$:[4]

$i)$	$t^3 - t + 2$	$v)$	$e^{-2t}\cos 3t$
$ii)$	$\sin(2t)$	$vi)$	$t\cos 2t$
$iii)$	$t\sin 2t$	$vii)$	$\sin^2 3t$ (Υπ: $2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$)
$iv)$	$t^2 \sin 3t$	$viii)$	$\cos^2 2t$ (Υπ: $2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$).

2. Όμοια των συναρτήσεων[5]

$i)$	$t\,e^{-t}\cos t$	$v)$	$t\,e^{-t}\sin 2t$
$ii)$	$t\,e^{-t}\cos\omega t$	$vi)$	$t^2\,e^{-2t}$
$iii)$	$t^3 e^{-2t}$	$vii)$	$t\,e^{-t}\sin\omega t$.

[4] $(i)\ \frac{6}{s^4} - \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s}$, $(i)\ \frac{2}{4+s^2}$,$(iii)\ \frac{4s}{\left(4+s^2\right)^2}$ $(iv)\ \frac{18\left(-3+s^2\right)}{\left(9+s^2\right)^3}$, $(v)\ \frac{2+s}{13+4s+s^2}$ $(vi)\ \frac{-4+s^2}{\left(4+s^2\right)^2}$, $(vii)\ \frac{18}{36s+s^3}$, $(viii)\ \frac{8+s^2}{16s+s^3}$.

[5] $(i)\ \frac{2s+s^2}{\left(2+2s+s^2\right)^2}$, $(ii)\ \frac{1-\omega^2-2s+s^2}{\left(1+\omega^2-2s+s^2\right)^2}$, $(iii)\ \frac{6}{(2+s)^4}$, $(iv)\ \frac{4(1+s)}{\left(5+2s+s^2\right)^2}$ $(v)\ \frac{2}{(2+s)^3}$, $(vi)\ \frac{2\omega(1+s)}{\left(1+\omega^2+2s+s^2\right)^2}$.

6

Βιβλιογραφία

[1] Μπράτσος, Α. (2011), Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, ISBN 978–960–351–874–7.

[2] Μπράτσος, Α. (2002), Ανώτερα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, ISBN 960–351–453–5/978–960–351–453–4.

[3] Αθανασιάδη, Α. (1993), Μετασχηματισμός Laplace και Σειρές Fourier, Εκδόσεις Ζήτη, ISBN 960–431–219–7.

[4] Don, E., Schaum's Outlines – Mathematica (2006), Εκδόσεις Κλειδάριθμος, ISBN 978–960–461–000–6.

[5] Spiegel M., Schaum's Outlines – Laplace Transforms (1965), McGraw-Hill Education – Europe, ISBN 978–007–060–231–1.

Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm
- http://mathworld.wolfram.com/
- http://eom.springer.de/