Μάθημα 11

ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΜΕΡΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

11.1 Εισαγωγικές έννοιες

Στην παράγραφο αυτή θα ταξινομηθούν οι διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους 2ης τάξης και θα γίνει μια υπενθύμιση των τύπων προσέγγισης των παραγώγων.

11.1.1 Ταξινόμηση εξισώσεων 2ης τάξης

Ορισμός 11.1.1 - 1. *Η γενική μορφή μιας διαφορικής εξίσωσης 2ης τάξης με δύο ανεξάρτητες μεταβλητές, έστω x και t, είναι*

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + c\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = e \qquad (11.1.1 - 1)$$

όπου $u = u(x,t)$ μια επαρκώς διαφορίσιμη συνάρτηση και a, b, c, e είναι συναρτήσεις των x, t, u, $\partial u/\partial x$ και $\partial u/\partial t$, αλλά όχι των 2ης τάξης παραγώγων τους.

Έστω ότι

$$p = \frac{\partial u}{\partial x}\,, \quad q = \frac{\partial u}{\partial t}\,, \quad r = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \quad s = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \quad \text{και} \quad w = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,.$$

Τότε η $(11.1.1-1)$ γράφεται

$$ar + bs + cw = e. \tag{11.1.1 - 2}$$

Αν οι συναρτήσεις u, p και q είναι γνωστές σε κάθε σημείο (x, t) μίας λείας καμπύλης του επιπέδου, τότε οι τιμές αυτές θα πρέπει να επαληθεύουν τη σχέση που εκφράζει το ολικό διαφορικό της u, δηλαδή την

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\, dx + \frac{\partial u}{\partial t}\, dt = p\, dx + q\, d\,t. \tag{11.1.1 - 3}$$

Όμοια οι p και q τις σχέσεις

$$\begin{aligned} dp &= \frac{\partial p}{\partial x}\, dx + \frac{\partial p}{\partial t}\, dt = r\, dx + s\, d\,t, \quad \text{και} && (11.1.1 - 4)\\ dq &= \frac{\partial q}{\partial x}\, dx + \frac{\partial q}{\partial t}\, dt = s\, dx + w\, d\,t. && (11.1.1 - 5)\end{aligned}$$

Οι εξισώσεις $(11.1.1-3)$ - $(11.1.1-5)$ ορίζουν ένα σύστημα τριών εξισώσεων με αγνώστους r, s και w. Το σύστημα αυτό δε θα έχει μία ακριβώς λύση σε κάθε σημείο (x, t), όταν η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων είναι μηδέν, δηλαδή όταν

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ dx & d\,t & 0 \\ 0 & dx & d\,t \end{vmatrix} = 0. \tag{11.1.1 - 6}$$

Από την $(11.1.1-6)$ προκύπτει η εξίσωση

$$a\left(\frac{d\,t}{dx}\right)^2 - b\left(\frac{d\,t}{dx}\right) + c = 0. \tag{11.1.1 - 7}$$

Έστω $D = b^2 - 4ac$ η διακρίνουσα της $(11.1.1-7)$. Τότε η $(11.1.1-7)$, αν

- $D > 0$, λέγεται ότι ορίζει μια **υπερβολική**,
- $D = 0$, μια **παραβολική**, και
- $D < 0$, μια **ελλειπτική** εξίσωση.

Στη συνέχεια του μαθήματος θα εξεταστούν μόνον ορισμένες χαρακτηριστικές μορφές μονοδιάστατων παραβολικών εξισώσεων.[1]

[1] Ο αναγνώστης για μια εκτενέστερη μελέτη παραπέμπεται στη βιβλιογραφία [12, 15, 16].

11.1.2 Τύποι πεπερασμένων διαφορών

Είναι ήδη γνωστό από το Μάθημα 6 τύπος $(6.1.2-2)$ ότι ο τύπος του Taylor για συνάρτηση μιας μεταβλητής, έστω $f(x)$, γράφεται

$$f(x+h) \approx f(x) + \frac{h}{1\,!}\, f'(x) + \frac{h^2}{2\,!}\, f'(x) + \ldots + \frac{h^\nu}{\nu\,!}\, f^{(\nu)}(x),$$

όταν $h > 0$ η αύξηση της μεταβλητής x.

Επομένως για τη συνάρτηση $u = u(x,t)$ με πεδίο ορισμού, έστω D, όπου D είναι ένα κλειστό διάστημα στο οποίο η u είναι συνεχής και έχει παραγώγους μέχρι και ν-τάξη συνεχείς συναρτήσεις, ανάλογα τότε θα ισχύουν

$$\begin{aligned} u(x+h,t) \quad &\approx \quad u(x,t) + \frac{h}{1\,!}\,\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{h^2}{2\,!}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ &\quad + \ldots + \frac{h^n}{n\,!}\,\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\,, \end{aligned} \tag{11.1.2 - 1}$$

όταν $h > 0$ η αύξηση της μεταβλητής x του διαστήματος, ενώ, όταν η μεταβλητή συμβολίζει το χρόνο t και $\ell > 0$ η αύξησή της

$$\begin{aligned} u(x,t+\ell) \quad &= \quad u(x,t) + \frac{\ell}{1\,!}\,\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\ell^2}{2\,!}\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ &\quad + \ldots + \frac{\ell^n}{n\,!}\,\frac{\partial^n u}{\partial t^n}\,. \end{aligned} \tag{11.1.2 - 2}$$

Με συλλογισμούς ανάλογους του Μαθήματος 6 από την $(11.1.2-1)$ προκύπτουν οι παρακάτω προσεγγίσεις της $\partial u/\partial x$:

- $$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u(x+h,t) - u(x,t)}{h} \tag{11.1.2 - 3}$$

  που ορίζει την προς τα **εμπρός προσέγγιση** (forward-difference formula),

- $$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u(x,t) - u(x-h,t)}{h} \tag{11.1.2 - 4}$$

  την **ανάδρομη προσέγγιση** (backward-difference formula), και

- $$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u(x+h,t) - u(x-h,t)}{2h} \qquad (11.1.2 - 5)$$

  την **κεντρική προσέγγιση** (central-difference formula).

Επίσης αποδεικνύεται ότι

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)}{h^2} \qquad (11.1.2 - 6)$$

που ορίζει την **κεντρική προσέγγιση** της $\partial^2 u/\partial x^2$.

11.2 Εξίσωση διάδοσης θερμότητας

11.2.1 Ορισμός και μορφή συστήματος λύσης

Ορισμός 11.2.1 - 1. *Η εξίσωση διάδοσης θερμότητας σε μία διάσταση ορίζεται ως εξής:*[2]

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \alpha \, \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \quad \text{όπου} \quad a < x < b \quad \text{και} \quad t > 0, \qquad (11.2.1 - 1)$$

όταν α θετική σταθερά και $u(x,t)$ μια επαρκώς διαφορίσιμη συνάρτηση.

Παρατηρήσεις 11.2.1 - 1

- Η μεταβλητή t συμβολίζει το χρόνο και η x το διάστημα.
- Στη φυσική η συνάρτηση u περιγράφει τη μεταβολή της θερμοκρασίας.
- Ο α είναι ο συντελεστής **θερμικής διάχυσης** (thermal diffusivity) και στο εξής θα θεωρείται ότι είναι $\alpha = 1$.

Η εξίσωση θερμότητας είναι θεμελιώδους σημασίας σε διάφορους τομείς των θετικών επιστημών όπως: στα μαθηματικά ως το πρότυπο της λύσης παραβολικών PDE's, στη θεωρία πιθανοτήτων, στα οικονομικά μαθηματικά κ.λπ.

[2] Βλέπε βιβλιογραφία και *http://en.wikipedia.org/wiki/Heat_equation*

Για την προσεγγιστική λύση της $(11.2.1-1)$ θεωρούνται οι παρακάτω **συνοριακές συνθήκες** (boundary conditions)[3]

$$u\,(a,t)=u\,(b,t)=0 \quad \text{όπου} \quad t>0, \tag{11.2.1 - 2}$$

ενώ ως **αρχική συνθήκη** (initial condition) η

$$u(x,0)=u_0(x)=g(x) \quad \text{όπου} \quad a\le x\le b, \tag{11.2.1 - 3}$$

όταν $g(x)$ είναι μία γνωστή συνεχής συνάρτηση του x, που συνήθως συμπίπτει με τη θεωρητική λύση, όταν $t=0$.

Παρατήρηση 11.2.1 - 1

Δεν είναι πάντοτε γνωστό αν $u_0\,(a)=0$ ή $u_0\,(b)=0$, που σημαίνει ότι είναι δυνατό να υπάρχουν ασυνέχειες μεταξύ αρχικών και συνοριακών συνθηκών.

Διαμέριση

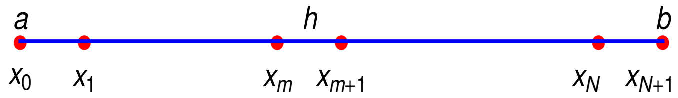
Για την προσεγγιστική λύση της $(11.2.1-1)$ το διάστημα

- $[a,b]$ της μεταβλητής x υποδιαιρείται σε $N{+}1$ ίσα υποδιαστήματα πλάτους h (Σχ. 11.2.1 - 1), και το
- $[0,T]$ της t, όταν $t=T$ συμβολίζει την τελική χρονική στιγμή λύσης της $(11.2.1-1)$,[4] σε υποδιαστήματα πλάτους ℓ.

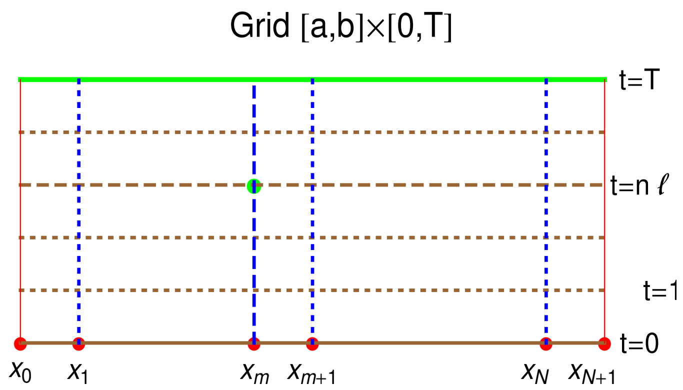
Τότε η ανοικτή περιοχή $\Omega=(a,b)\times(0,T]$ με το σύνορό της $\partial\Omega$, που αποτελείται από τον άξονα $t=0$ και τις ευθείες $x=a$ και $x=b$, καλύπτεται από ένα ορθογώνιο σύστημα σημείων (grid), έστω G (Σχ. 11.2.1 - 2), τα οποία έχουν συντεταγμένες $x_m=a+mh$, όταν $m=0,1,\ldots,N+1$ και $t_n=n\ell$ όταν $n=0,\,1,\,\ldots\,.$

[3]Για συνοριακές συνθήκες βλέπε Μάθημα 6 Παράγραφος 6.2.

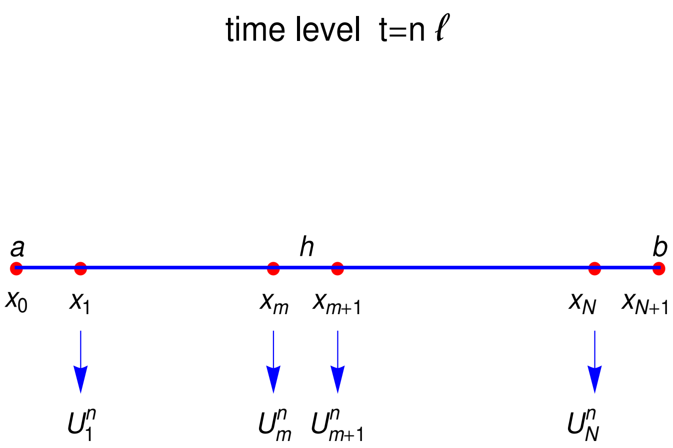
[4]Βλέπε αντίστοιχη χρονική στιγμή $t_N=b$ στο Μάθημα 9 Παράγραφος 9.1.3.



Σχήμα 11.2.1 - 1: Η διαμέριση του διαστήματος $[a, b]$: τα συνοριακά σημεία $x_0 = a$, $x_{N+1} = b$ και τα εσωτερικά σημεία $x_1, \ldots, x_N$ όπου υπολογίζεται η λύση της $(11.2.1 - 1)$



Σχήμα 11.2.1 - 2: Τα σημεία (mesh) της διαμέρισης (grid) G του διαστήματος $[a, b]$ και του χρόνου $[0, T]$. Το σύνορο $\partial\Omega$ ορίζεται από την ευθεία $t = 0$ (καφέ) και τις $x = a$, b (κόκκινες) ευθείες. Το (x_m, t_n) απεικονίζεται στο πράσινο σημείο, ενώ η τελική χρονική στιγμή λύσης της $(11.2.1 - 1)$ από την πράσινη ευθεία $t = T$



Σχήμα 11.2.1 - 3: Συμβολισμός των λύσεων: στα **συνοριακά** σημεία $x_0 = a$ και $x_{N+1} = b$ λόγω της $(11.2.1 - 2)$ είναι $U_0^n = U_{N+1}^n = 0$. Η προσεγγιστική λύση $U_1^n, U_2^n \ldots, U_N^n$ της $(11.2.1 - 1)$ υπολογίζεται στα **εσωτερικά** σημεία $x_1, \ldots, x_N$

Συμβολισμός λύσεων

Στα επόμενα

- η θεωρητική λύση $u\left(x_m, t_n\right)$ στο σημείο $\left(x_m, t_n\right)$ θα συμβολίζεται με u_m^n, και
- η αριθμητική λύση με U_m^n (Σχ. 11.2.1 - 3).

Σύμφωνα με τον παραπάνω συμβολισμό σε δεδομένη χρονική στιγμή $t = t_n = n\ell$ η θεωρητική λύση $u\left(x, t_n\right)$ της $(11.2.1 - 1)$ στα σημεία $x_1, x_2, \ldots, x_N$ θα είναι

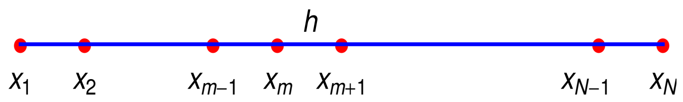
$$u\left(x_1, t_n\right), \quad u\left(x_2, t_n\right), \ldots, \quad u\left(x_N, t_n\right)$$

και θα προσεγγίζεται από τις τιμές

$$U_1^n, \quad U_2^n, \ldots, \quad U_N^n.$$

Τότε οι προσεγγίσεις αυτές είναι δυνατόν να θεωρηθούν σαν οι συντεταγμένες ενός διανύσματος, έστω $\mathbf{U}^n$, όπου

$$\mathbf{U}^n = \left[U_1^n, U_2^n \ldots, U_N^n\right]^T. \qquad (11.2.1 - 4)$$



Σχήμα 11.2.2 - 1: Εξίσωση θερμότητας: υπολογισμός της προσεγγιστικής λύσης στα **εσωτερικά** σημεία $x_1, \ldots, x_N$ σε επίπεδο χρόνου $t = n\ell$

Το διάνυσμα αυτό θα λέγεται στο εξής και **διάνυσμα λύσεων** της $(11.2.1-1)$.

11.2.2 Προσεγγιστικές λύσεις

Μέθοδος του Taylor

Για την προσεγγιστική λύση της εξίσωσης $(11.2.1-1)$ πρέπει σε κάθε χρονική στιγμή $t = \ell,\, 2\ell,\, \ldots$ η μερική παράγωγος ως προς τη μεταβλητή x να αντικατασταθεί σε καθένα από τα N εσωτερικά σημεία (Σχ. 11.2.2 - 1) της διαμέρισης G.[5] Η προσέγγιση αυτή θα προκύψει από τον γνωστό τύπο $(11.1.2-6)$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \approx \frac{u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)}{h^2}$$

[5] Σύμφωνα με την Παράγραφο 11.2.1 και τις συνοριακές συνθήκες $(11.2.1-2)$ - συνθήκες Dirichlet - η αντικατάσταση της μερικής παραγώγου ως προς x στα συνοριακά σημεία $x_0 = a$, αντίστοιχα $x_{N+1} = b$ απαιτεί να είναι γνωστές οι τιμές της λύσης στα σημεία $x_{-1} = a - h$, αντίστοιχα $x_{N+2} = b + h$. Οι τιμές όμως αυτές δεν είναι γνωστές στο συγκεκριμένο πρόβλημα.

θεωρώντας για τη χρονική στιγμή t είναι $t = t_n = n\ell$ και εφαρμόζοντας τον παραπάνω τύπο σε κάθε ένα εσωτερικό σημείο, δηλαδή

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right|_{t=t_n,\, x=x_m} &\approx \frac{u\left(x_m+h, t_n\right) - 2u\left(x_m, t_n\right) + u\left(x_m-h, t_n\right)}{h^2} \\ &= \frac{u\left(x_{m+1}, t_n\right) - 2u\left(x_m, t_n\right) + u\left(x_{m-1}, t_n\right)}{h^2},\end{aligned}$$

όταν $m = 1, 2, \ldots, N$. Επομένως έχοντας υπ' όψιν και με τους συμβολισμούς της Παραγράφου 11.2.1 προκύπτει ότι

$$\left.\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right|_{t=t_n,\, x=x_m} \approx \frac{U^n_{m+1} - 2U^n_m + U^n_{m-1}}{h^2}. \qquad (11.2.2\text{ - }1)$$

Άρα η $(11.2.1-1)$ σύμφωνα με την $(11.2.2-1)$, όταν εφαρμοστεί σε κάθε ένα εσωτερικό σημείο $x_1, \ldots, x_N$ (Σχ. 11.2.1 - 3), ορίζει το παρακάτω σύστημα N διαφορικών εξισώσεων 1ης τάξης

$$\begin{aligned}\frac{dU^n_1}{dt} &= \frac{U^n_0 - 2U^n_1 + U^n_2}{h^2}, \\ \frac{dU^n_m}{dt} &= \frac{U^n_{m-1} - 2U^n_m + U^n_{m+1}}{h^2} \quad \text{για } m = 2, 3, \ldots, N-1, \\ \frac{dU^n_N}{dt} &= \frac{U^n_{N-1} - 2U^n_N + U^n_{N+1}}{h^2}\end{aligned}$$

το οποίο, επειδή σύμφωνα με τις συνοριακές συνθήκες $(11.2.1-2)$ είναι $U^n_0 = 0$ και $U^n_{N+1} = 0$, τελικά γράφεται

$$\begin{aligned}\frac{dU^n_1}{dt} &= \frac{-2U^n_1 + U^n_2}{h^2}, \\ \frac{dU^n_m}{dt} &= \frac{U^n_{m-1} - 2U^n_m + U^n_{m+1}}{h^2} \quad \text{για } m = 2, 3, \ldots, N-1, \\ \frac{dU^n_N}{dt} &= \frac{U^n_{N-1} - 2U^n_N}{h^2}.\end{aligned} \qquad (11.2.2\text{ - }2)$$

Το σύστημα $(11.2.2-2)$, όταν χρησιμοποιηθεί το διάνυσμα των λύσεων $(11.2.1-4)$, γράφεται με χρήση πινάκων σε διανυσματική μορφή ως εξής:

$$\frac{d\mathbf{U}(t)}{dt} = A\mathbf{U}(t) \quad \text{με} \quad \mathbf{U}^0 = \mathbf{g}, \qquad (11.2.2\text{ - }3)$$

όπου ο A είναι ένας τριδιαγώνιος πίνακας της μορφής

$$A = h^{-2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -2 & 1 \\ & & & 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad (11.2.2 - 4)$$

και

$$\mathbf{g} = \mathbf{U}^0 = \left[U_1^0, U_2^0, \ldots, U_N^0\right]^T$$

το διάνυσμα των **αρχικών τιμών** της προσεγγιστικής λύσης, που προκύπτει από την αρχική συνθήκη $(11.2.1 - 3)$.[6]

Έστω

$$D = \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{d}{dt} \end{bmatrix} \qquad (11.2.2 - 5)$$

ένας διαγώνιος πίνακας τάξης N που συμβολίζει το διαφορικό τελεστή 1ης τάξης για το σύστημα $(11.2.2 - 3)$. Τότε το σύστημα $(11.2.2 - 3)$ τελικά γράφεται

$$D\,\mathbf{U}(t) = A\mathbf{U}(t) \quad \text{με} \quad \mathbf{U}^0 = \mathbf{g}. \qquad (11.2.2 - 6)$$

Παρατηρήσεις 11.2.2 - 1

i) Το σύστημα $(11.2.2 - 6)$ έχει ανάλογη μορφή με το πρόβλημα αρχικής τιμής $(9.1.1 - 3)$ του Μαθήματος 9.

ii) Η παραπάνω μέθοδος προσδιορισμού της λύσης είναι γνωστή σαν η **μέθοδος των ευθειών** (method of lines ή MOL ή NMOL).[7] Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή η λύση του προβλήματος προσεγγίζεται σε κάθε χρονική στιγμή t - ευθείες $t = \ell, \ldots$ (Σχ. 11.2.1 - 2) και τελικά η προσεγγιστική λύση δίνεται με τη μορφή ενός συστήματος συνήθων

[6] Βλέπε αντίστοιχη αρχική $y_0 = y(a) = y(t_0)$ στα Μαθήματα 9 και 10, αλλά και ανάλογες αρχικές τιμές που χρησιμοποιήθηκαν στα Μαθήματα 1 και 2.

[7] Βλέπε βιβλιογραφία και *http://en.wikipedia.org/wiki/Method_of_lines*.

διαφορικών εξισώσεων ανάλογου της μορφής $(11.2.2-6)$, όπου η τάξη του συστήματος εξαρτάται από την τάξη των μερικών παραγώγων ως προς t. Διευκρινίζεται ότι στην $(11.2.2-2)$, εφόσον η μεταβλητή x αντικαθίσταται από τις τιμές x_m; $m = 1, \ldots, N$, η U είναι συνάρτηση του t, οπότε η παραγώγιση θα συμβολίζεται με $\frac{dU}{dt}$ αντί της $\frac{\partial U}{\partial t}$.

Από το σύστημα $(11.2.2-6)$ προκύπτει τότε ότι

$$D = A \qquad (11.2.2 \text{ - } 7)$$

που ορίζει και την προσέγγιση του τελεστή D για το πρόβλημα $(11.2.1-1)$ - $(11.2.1-3)$. Η έκφραση αυτή θα χρησιμοποιηθεί στη συνέχεια του μαθήματος.

Από το ανάπτυγμα της $\mathbf{U}(t+\ell)$ κατά Taylor

$$U(t+\ell) \approx U(t) + \frac{\ell}{1\,!}\, DU(t) + \frac{\ell^2}{2\,!}\, D^2U(t) + \ldots + \frac{\ell^\nu}{\nu\,!}\, D^\nu U(t), \quad (11.2.2 \text{ - } 8)$$

αν παραλειφθούν οι όροι $\mathcal{O}\left(\ell^2\right)$, έχουμε

$$\mathbf{U}(t+\ell) = \mathbf{U}(t) + \ell\, D\, \mathbf{U}(t)$$

που σύμφωνα με την $(11.2.2-7)$ γράφεται

$$\mathbf{U}(t+\ell) = \mathbf{U}(t) + \ell\, A\, \mathbf{U}(t),$$

δηλαδή

$$\mathbf{U}(t+\ell) = (I + \ell A)\mathbf{U}(t) \qquad (11.2.2 \text{ - } 9)$$

όταν I ο μοναδιαίος πίνακας τάξης N.

Έστω $p = \ell/h^2$. Τότε για τη λύση του προβλήματος $(11.2.1-1)$ - $(11.2.1-3)$ από την $(11.2.2-9)$ προκύπτει η παρακάτω **αναλυτική** (explicit) μέθοδος των 4 σημείων

$$\begin{bmatrix} U_1^{n+1} \\ U_2^{n+1} \\ \vdots \\ U_N^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2p & p & & & \\ p & 1-2p & p & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & p & 1-2p & p \\ & & & p & 1-2p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^n \\ U_2^n \\ \vdots \\ U_N^n \end{bmatrix},$$

δηλαδή

$$
\left\|
\begin{aligned}
U_1^{n+1} &= (1-2p)U_1^n + pU_2^n, \\
U_m^{n+1} &= (1-2p)U_m^n + p\left(U_{m-1}^n + U_{m+1}^n\right) \\
&\quad \text{για} \quad m = 2,\, 3,\, \ldots,\, N-1, \\
U_N^{n+1} &= pU_{N-1}^n + (1-2p)U_N^n.
\end{aligned}
\right. \tag{11.2.2 - 10}
$$

Παρατήρηση 11.2.2 - 1

Αποδεικνύεται ότι για τη λύση του προβλήματος $(11.2.1-1)$ - $(11.2.1-3)$ με τη μέθοδο αυτή απαιτείται να ισχύει η συνθήκη

$$\ell \leq \frac{1}{2}\, h^2. \tag{11.2.2 - 11}$$

Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα ότι το βήμα του χρόνου ℓ που χρησιμοποιείται, πρέπει να είναι πολύ μικρό. Επομένως η μέθοδος αυτή, αν και απλή σαν αναλυτική, απαιτεί ένα μεγάλο αριθμό πράξεων για τον υπολογισμό της λύσης τη χρονική στιγμή $t = T$.

Μέθοδος των Crank - Nicolson

Οι Crack[8]-Nicolson[9] (1947) πρότειναν μια μέθοδο, που περιορίζει τον αριθμό των υπολογισμών και είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί για ένα μεγάλο εύρος τιμών των h και ℓ, ακριβέστερα όπως αποδεικνύεται του λόγου

$$r = \frac{\ell}{h}\,.$$

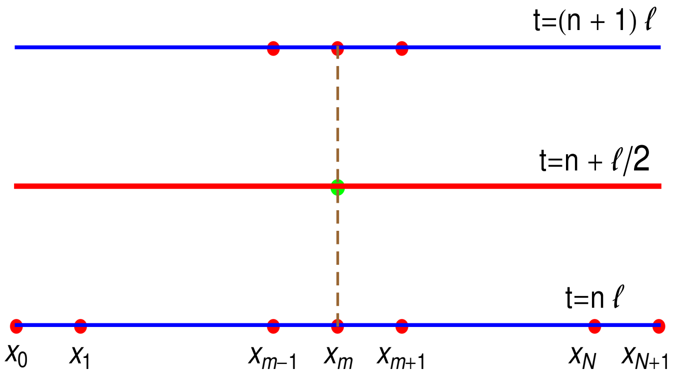
Σύμφωνα με τη μέθοδο η εξίσωση $(11.2.1-1)$, δηλαδή η

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,,$$

---

[8]JOHN CRANK (1916-2006): Άγγλος μαθηματικός, γνωστός κυρίως για την ομώνυμη μέθοδο.

[9]PHYLLIS NICOLSON (1917-1968): Αγγλίδα μαθηματικός, γνωστή για την ομώνυμη μέθοδο με τον Crank.



Σχήμα 11.2.2 - 2: Μέθοδος των Crank-Nicolson

προσεγγίζεται στην

ενδιάμεση των $t = n\ell$ και $t = (n+1)\ell$ χρονική στιγμή,

δηλαδή την

$$t = \left(n + \frac{1}{2}\right)\ell,$$

ενώ η $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ προσεγγίζεται από το **μέσο όρο** των τιμών της στις χρονικές στιγμές $t = (n+1)\ell$ και $t = n\ell$ (Σχ. 11.2.2 - 2). Άρα

$$\frac{\partial U_m^{n+\frac{1}{2}}}{\partial t} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 U_m^{n+1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_m^{n}}{\partial x^2}\right). \qquad (11.2.2 - 12)$$

Επειδή σύμφωνα με την $(11.1.2 - 5)$ είναι

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \approx \frac{u(x,t+\ell) - u(x,t-\ell)}{2\ell},$$

η εφαρμογή της στην $(11.2.2 - 12)$ για $t + \ell/2$ δίνει

$$\begin{aligned}\frac{\partial u\left(x, t+\frac{\ell}{2}\right)}{\partial t} &\approx \frac{u\left[x, \left(t+\frac{\ell}{2}\right)+\frac{\ell}{2}\right] - u\left[x, \left(t+\frac{\ell}{2}\right)-\frac{\ell}{2}\right]}{2\,\frac{\ell}{2}} \\ &= \frac{u(x,t+\ell) - u(x,t)}{\ell}.\end{aligned}$$

Επομένως

$$\frac{\partial U_m^{n+\frac{1}{2}}}{\partial t} = \frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{\ell}\,. \tag{11.2.2 - 13}$$

Είναι ήδη γνωστό από την $(11.2.2 - 1)$ ότι

$$\left.\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right|_{t=t_n,\, x=x_m} \approx \frac{U_{m+1}^n - 2U_m^n + U_{m-1}^n}{h^2}\,. \tag{11.2.2 - 14}$$

Η $(11.2.2 - 14)$, όταν εφαρμοστεί για τη χρονική στιγμή $t = (n+1)\ell$, δίνει την προσέγγιση

$$\left.\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right|_{t=t_{n+1},\, x=x_m} \approx \frac{U_{m+1}^{n+1} - 2U_m^{n+1} + U_{m-1}^{n+1}}{h^2}\,. \tag{11.2.2 - 15}$$

Άρα τελικά η $(11.2.2 - 12)$ σύμφωνα με τις $(11.2.2 - 14)$, $(11.2.2 - 15)$ και $(11.2.2 - 13)$ γράφεται

$$\frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{\ell} = \frac{1}{2}\left(\frac{U_{m+1}^{n+1} - 2U_m^{n+1} + U_{m-1}^{n+1}}{h^2} + \frac{U_{m+1}^{n+1} - 2U_m^{n+1} + U_{m-1}^{n+1}}{h^2}\right)$$

δηλαδή

$$\begin{aligned} U_m^{n+1} &- \frac{1}{2}p\left(U_{m+1}^{n+1} - 2U_m^{n+1} + U_{m-1}^{n+1}\right) = U_m^n \\ &+ \frac{1}{2}p\left(U_{m+1}^n - 2U_m^n + U_{m-1}^n\right) \end{aligned} \tag{11.2.2 - 16}$$

όπου επίσης είναι $p = \ell/h^2$. Η $(11.2.2 - 15)$, όταν εφαρμοστεί σε κάθε ένα εσωτερικό σημείο $x_1, \ldots, x_N$ (Σχ. 11.2.1 - 3) της διαμέρισης G, έχοντας υπ' όψιν και τις συνοριακές συνθήκες $(11.2.1 - 2)$, ορίζει την παρακάτω **πεπλεγμένη** μέθοδο των 6 σημείων

$$\left\|\begin{aligned} &(1+p)U_1^{n+1} - \frac{1}{2}p\,U_2^{n+1} = (1-p)U_1^n + \frac{1}{2}p\,U_2^n, \\ &(1+p)U_m^{n+1} - \frac{1}{2}p\left(U_{m-1}^{n+1} + U_{m+1}^{n+1}\right) \\ &= (1-p)U_m^n + \frac{1}{2}p\left(U_{m-1}^n + U_{m+1}^n\right) \\ &\text{για} \quad m = 2,\,3,\,\ldots,\,N-1, \\ &-\frac{1}{2}p\,U_{N-1}^{n+1} + (1+p)U_N^{n+1} = \frac{1}{2}p\,U_{N-1}^n + (1-p)U_N^n. \end{aligned}\right. \tag{11.2.2 - 17}$$

Η μέθοδος αυτή, που είναι γνωστή σαν **μέθοδος των Crank-Nicolson**,[10] είναι λόγω της ακρίβειας (accuracy) των αποτελεσμάτων της μια από τις περισσότερο χρησιμοποιούμενες μεθόδους στη λύση πολλών άλλων μορφών των PDE's.

Η μέθοδος γράφεται επίσης με χρήση πινάκων ως εξής:

$$\begin{bmatrix} 1+p & -\frac{p}{2} & & & \\ -\frac{p}{2} & 1+p & -\frac{p}{2} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -\frac{p}{2} & 1+p & -\frac{p}{2} \\ & & & -\frac{p}{2} & 1+p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^{n+1} \\ U_2^{n+1} \\ \vdots \\ U_N^{n+1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-p & \frac{p}{2} & & & \\ \frac{p}{2} & 1-p & \frac{p}{2} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \frac{p}{2} & 1-p & \frac{p}{2} \\ & & & \frac{p}{2} & 1-p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^{n} \\ U_2^{n} \\ \vdots \\ U_N^{n} \end{bmatrix},$$

ή τελικά ως

$$\left(I - \frac{1}{2}\ell A\right)\mathbf{U}(t+\ell) = \left(I + \frac{1}{2}\ell A\right)\mathbf{U}(t), \qquad (11.2.2 - 18)$$

όταν ο πίνακας A δίνεται από την $(11.2.2 - 4)$.

Παρατηρήσεις 11.2.2 - 2

- Ο προσδιορισμός του $\mathbf{U}(t+\ell)$ στην $(11.2.2 - 18)$ απαιτεί τη λύση ενός συστήματος, όπου ο πίνακας των αγνώστων $\left(I - \frac{1}{2}\ell A\right)$ είναι τριδιαγώνιος.
- Πολλές φορές για τον περιορισμό των πράξεων χρησιμοποιείται ο παρακάτω τρόπος υπολογισμού της λύσης $\mathbf{U}(t+\ell)$:

$$\begin{aligned} \left(I - \frac{1}{2}\ell A\right)\mathbf{U}^* &= 2\,\mathbf{U}(t) \\ \mathbf{U}(t+\ell) &= \mathbf{U}^* - \mathbf{U}(t). \end{aligned}$$

[10] Βλέπε βιβλιογραφία και *http://en.wikipedia.org/wiki/Crank-nicholson_method*

Ο υπολογισμός αυτός απαιτεί τη χρήση ενός βοηθητικού διανύσματος $\mathbf{U}^*$, αλλά έχει $3N-2$ λιγότερες πράξεις από την απευθείας λύση του συστήματος $(11.2.2-18)$.

- Σύμφωνα με όσα έχουν γραφεί στην εισαγωγή, η μέθοδος είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί για ένα μεγάλο εύρος τιμών του λόγου $r = \ell/h$. Έχει αποδειχθεί[11] ότι για να υπάρχει μια λεία συμπεριφορά της λύση πλησίον των συνοριακών τιμών $x = a,\ b$, πρέπει να ισχύει
$$r = \frac{\ell}{h} < \frac{k}{\pi},$$
όταν k κατάλληλη σταθερά.

Παράδειγμα 11.2.2 - 1

Η μέθοδος των Crank-Nicolson εξετάστηκε στο πρόβλημα

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{όπου } 0 < x < 2 \text{ και } t > 0 \tag{11.2.2 - 19}$$

με συνοριακές συνθήκες

$$u\,(0,t) = u\,(2,t) = 0, \quad \text{όταν} \quad t > 0 \tag{11.2.2 - 20}$$

αρχική συνθήκη

$$u(x,0) = 1, \quad \text{όταν} \quad 0 \le x \le 2 \tag{11.2.2 - 21}$$

και θεωρητική λύση

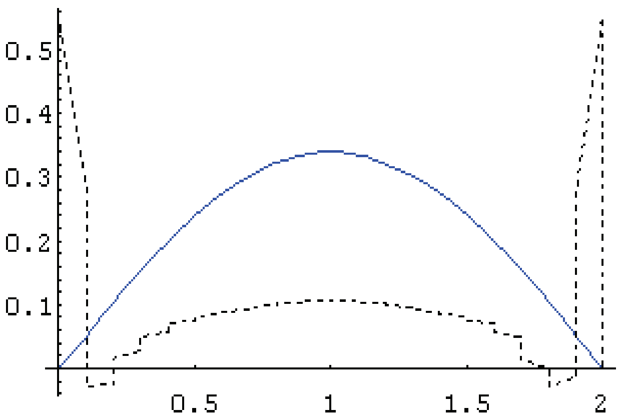
$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left[1-(-1)^k\right] \frac{2}{k\pi} \sin\left(\frac{1}{2}k\pi x\right) \exp\left(-\frac{1}{4}k^2\pi^2 t\right). \tag{11.2.2 - 22}$$

Τα αποτελέσματα για τις διάφορες τιμές των h και ℓ σε χρόνο $t = 1$ και με μέτρο μέτρησης των σφαλμάτων το $\|u_m^n - U_m^n\|_\infty = \max_{m=1,\,2,\,\dots,\,N} |u_m^n - U_m^n|$ δίνονται στον Πίνακα 11.2.2 - 1, ενώ η γραφική παράσταση της θεωρητικής και της προσεγγιστικής λύσης στο Σχ. 11.2.2 - 3, όπου άμεσα προκύπτει ότι το μέγιστο σφάλμα της μεθόδου είναι πλησίον των άκρων του διαστήματος $[0,2]$.

[11] Lawson, J. D. and Morris, J. Ll., The extrapolation of first order methods for parabolic partial differential equations. I, SIAM J. Numer. Anal. 15(6), (1978), pp. 1212–1224.

Πίνακας 11.2.2 - 1: Παράδειγμα 11.2.2 - 1

Μέθοδος	ℓ	h	$e = \|u_m^n - U_m^n\|_\infty$
	0.1	0.1	0.56E-01
		0.025	0.55E+00
	0.01	0.1	0.31E-03
		0.025	0.67E-04



Σχήμα 11.2.2 - 3: Μέθοδος των Crank-Nickolson. Η διακεκομμένη καμπύλη δείχνει την αριθμητική και η συνεχής τη θεωρητική λύση του Παραδείγματος 11.2.2 - 1

Ασκήσεις

1. Να λυθεί το Παράδειγμα 11.2.2 - 1 με τη μέθοδο $(11.2.2-10)$ και να γίνει σύγκριση των αποτελεσμάτων με τα αντίστοιχα του Πίνακα 11.2.2 - 1.

2. Παραλείποντας τους όρους $\mathcal{O}\left(\ell^3\right)$ στο ανάπτυγμα κατά Taylor της $\mathbf{U}(t+\ell)$ δείξτε ότι ορίζεται η παρακάτω μέθοδος λύσης της $(11.2.1-1)$

$$\mathbf{U}(t+\ell)=(I+\ell A+\frac{\ell^2 A^2}{2})\mathbf{U}(t).$$

όταν ο πίνακας A δίνεται από την $(11.2.2-4)$ και I ο μοναδιαίος πίνακας τάξης N.

Εφαρμόστε τη μέθοδο αυτή στη λύση του Παραδείγματος 11.2.2 - 1 και συγκρίνατε τα αποτελέσματα με τα αντίστοιχα του Πίνακα 11.2.2 - 1.

3. Η γραμμική μορφή της εξίσωσης **διάχυσης-μεταφοράς** (diffusion-convection) σε μία διάσταση έχει τη μορφή

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\mu\frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{όπου } 0<x<X \text{ και } t>0 \qquad (11.2.2 - 23)$$

όπου $\mu>0$ είναι η **παράμετρος μεταφοράς** (convection parameter).

Η **αρχική συνθήκη** του προβλήματος είναι

$$u(x,0)=g(x) \quad \text{με} \quad 0<x<X \qquad (11.2.2 - 24)$$

και οι **συνοριακές συνθήκες**

$$u(0,t) = v(t) \quad \text{με } t>0 \qquad (11.2.2 - 25)$$

$$\frac{\partial u(X,t)}{\partial x} = 0 \quad \text{με } t>0. \qquad (11.2.2 - 26)$$

i) Με κατάλληλη διαμέριση του διαστήματος $[0,X]$ δείξτε ότι, όταν η εξίσωση $(11.2.2-23)$ με τις προσεγγίσεις $(11.1.2-5)$, $(11.1.2-6)$ και τις συνοριακές συνθήκες $(11.2.2-25)$, $(11.2.2-26)$ - δηλαδή $U_{N+1}^n=U_{N-1}^n$ - εφαρμοστεί στα N εσωτερικά σημεία της διαμέρισης σε επίπεδο χρόνου $t=n\ell$ όπου $n=1,\,2,\,\ldots,$ προκύπτει το παρακάτω σύστημα των N διαφορικών εξισώσεων

$$\frac{dU_1}{dt} = -\frac{2}{h^2}U_1^n+\frac{1}{h^2}\left(1-\frac{1}{2}\mu h\right)U_2^n+\frac{1}{h^2}\left(1+\frac{1}{2}\mu h\right)v_t,$$

$$\begin{aligned}
\frac{dU_m^n}{dt} &= \frac{1}{h^2}\left(1+\frac{1}{2}\mu h\right)U_{m-1}^n - \frac{2}{h^2}U_2^n + \frac{1}{h^2}\left(1-\frac{1}{2}\mu h\right)U_{m+1}^n \\
&\quad \text{για} \quad m = 2,\, 3,\, \ldots,\, N-1, \\
\frac{dU_N^n}{dt} &= \frac{2\left(U_{N-1}^n - U_N^n\right)}{h^2}
\end{aligned}$$

που γράφεται επίσης σε διανυσματική μορφή ως

$$\frac{d\mathbf{U}(t)}{dt} = A\,\mathbf{U}(t) + \mathbf{b} \quad \text{με} \quad \mathbf{U}^0 = \mathbf{g} \qquad (11.2.2 - 27)$$

όπου

$$A = \begin{bmatrix}
-2 & 1-\frac{1}{2}\mu h & & & \\
1+\frac{1}{2}\mu h & -2 & 1-\frac{1}{2}\mu h & & \\
& \ddots & \ddots & \ddots & \\
& & 1+\frac{1}{2}\mu h & -2 & 1-\frac{1}{2}\mu h \\
& & & 2 & -2
\end{bmatrix}$$

και $\mathbf{b} = h^{-2}\left[\left(1+\frac{1}{2}\mu h\right)U_t(n\ell), 0, \ldots, 0\right]^T$. Δώστε τη μορφή της μεθόδου $(11.2.2-10)$ για την περίπτωση αυτή.

ii) Ποια είναι η μορφή της μεθόδου των Crank-Nicolson για τη λύση του προβλήματος $(11.2.2-23)$ με συνοριακές συνθήκες $(11.2.2-25)$ και $(11.2.2-26)$;

12

Βιβλιογραφία

[1] Ακρίβης, Γ., Δουγαλής, Β. (1995), Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Αθήνα, ISBN 978–960–524–022–6.

[2] Μπράτσος, Α. (2011), Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, ISBN 978–960–351–874–7.

[3] Μπράτσος, Α. (2002), Ανώτερα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, ISBN 960–351–453–5/978–960–351–453–4.

[4] Στεφανάκος, Χ., Προγραμματισμός Η/Υ με MATLAB, Γκούρδας Εκδοτική, ISBN 978–960–387–856–8.

[5] Burden, Richard L. and Faires, J. Douglas (2000), Numerical Analysis (7th ed.), Brooks/Cole, ISBN 978–0–534–38216–2.

[6] Conte, S. D., Carl de Boor (1981), Elementary Numerical Analysis: An Algorithmic Approach (3rd ed.), McGraw-Hill Book Company, ISBN 978–0–07–012447–9.

[7] Don, E., Schaum's Outlines – Mathematica (2006), Εκδόσεις Κλειδάριθμος, ISBN 978–960–461–000–6.

[8] Henrici, P. (1966), Elements of Numerical Analysis, John Wiley & Sons, New York, ISBN 978–0–471–37238–7.

[9] Kendell A. Atkinson (1989), An Introduction to Numerical Analysis (2nd ed.), John Wiley & Sons, ISBN 0–471–50023–2.

[10] Leader, Jeffery J. (2004), Numerical Analysis and Scientific Computation, Addison Wesley, ISBN 978–0–201–73499–7.

[11] Schatzman, M. (2002), Numerical Analysis: A Mathematical Introduction, Clarendon Press, Oxford, ISBN 978–0–19–850279–1.

[12] Smith, G. D. (1986), Numerical Solution of Partial-Differential Equations: Finite Difference Methods (3rd ed.), Oxford University Press, Oxford, ISBN 978–0–19–859650–9.

[13] Stoer, Josef; Bulirsch, Roland (2002), Introduction to Numerical Analysis (3rd ed.), Springer, ISBN 978–0–387–95452–3.

[14] Sli, E. and Mayers, D. (2003), An Introduction to Numerical Analysis, Cambridge University Press, ISBN 978–0–521–00794–8.

[15] Twizell, E. H. (1984), Computational Methods for Partial Differential Equations. Ellis Horwood Ltd., Chichester, West Sussex, England, ISBN 978–0–85312–383–5 .

[16] Twizell, E. H. (1988), Numerical Methods, with Applications in the Biomedical Sciences, Ellis Horwood, Chichester, ISBN 978–0–7458–0027–1.

Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm
- http://mathworld.wolfram.com/
- http://eom.springer.de/