Μάθημα 5

SPLINES

5.1 Συνάρτηση spline

5.1.1 Ορισμοί και σχετικά θεωρήματα

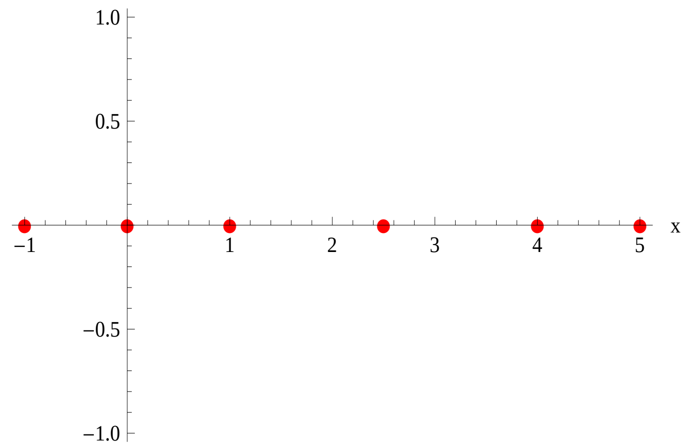
Στο Μάθημα 3 εξετάστηκε το πρόβλημα της εύρεσης των πολυωνύμων παρεμβολής, δηλαδή πολυωνύμων που συνέπιπταν ή διαφορετικά διέρχονταν από ένα σύνολο σημείων της μορφής $(x_i, f(x_i))\,;\ i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n$ όπου $f(x)$ μια συνάρτηση με άγνωστο στις περισσότερες περιπτώσεις τύπο. Στο μάθημα αυτό θα δοθεί απάντηση στο παραπάνω πρόβλημα με τμηματικά πολυώνυμα (piecewise polynomials), δηλαδή πολυώνυμα που είναι διαφορετικού γενικά βαθμού και ορίζονται σε διαστήματα της μορφής $[x_i, x_{i+1}]$, όταν $x_i;\ i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n$ είναι ένα σύνολο διατεταγμένων κατά αύξουσα σειρά δείκτη σημείων.

Τα πολυώνυμα αυτά ορίζονται ως εξής:

Ορισμός 5.1.1 - 1 (spline). *Έστω $x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n$ ένα σύνολο σημείων που είναι διατεταγμένα ως εξής (Σχ. 5.1.1 - 1):*

$$x_0 < x_1 < \ldots < x_n. \qquad (5.1.1 - 1)$$

Τότε μια συνάρτηση spline ή απλά στο εξής spline, έστω s, βαθμού m με κόμβους (knots ή breakpoints) στα σημεία $(5.1.1-1)$, είναι η συνάρτηση που πληροί τις παρακάτω δύο ιδιότητες:



Σχήμα 5.1.1 - 1: Σημεία: $x_0 = -1.0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2.5$, $x_4 = 4$, $x_5 = 5$

i) σε κάθε ένα από τα διαστήματα

$$(-\infty, x_0)\,, \quad [x_0, x_1)\,, \ldots, [x_{n-1}, x_n)\,, \quad [x_n, +\infty) \qquad (5.1.1 - 2)$$

η spline s είναι ένα πολυώνυμο βαθμού μικρότερου ή ίσου του m,

ii) η spline s και οι παράγωγοί της τάξης 1, 2, ..., $m-1$ είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $\Re$.

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό έχουμε:

Παρατηρήσεις 5.1.1 - 1

Η spline είναι:

i) ένα τμηματικό πολυώνυμο (piecewise polynomial), που αποτελείται από ένα σύνολο επί μέρους πολυωνύμων, που πληρούν τις παραπάνω δύο ιδιότητες.

ii) Σε κάθε ένα από τα υποδιαστήματα (5.1.1−2) είναι γενικά ένα διαφορετικού βαθμού πολυώνυμο.

iii) Ο μέγιστος όλων των βαθμών των επί μέρους πολυωνύμων που ορίζουν μια spline, ορίζει και το βαθμό της. Ειδικά, όταν $m = 3$, η spline θα λέγεται **κυβική** (cubic spline).

iv) Η **καμπυλότητα** (curvature) μια καμπύλης C με εξίσωση $y = f(x)$ δίνεται από τον τύπο

$$k = \frac{y''}{(1 + y'^{\,2})^{3/2}}\,. \tag{5.1.1 - 3}$$

Επειδή οι καμπύλες των επί μέρους πολυωνύμων θα πρέπει να διέρχονται από τα σημεία $(x_i, s\,(x_i))$; $i = 0, 1, \ldots, n$ κατά τρόπο τέτοιο που να ελαχιστοποιείται η κάμψη των, σύμφωνα και με την $(5.1.1 - 3)$ θα πρέπει στους κόμβους x_i; $i = 0, 1, \ldots, n$ η spline s να επαληθεύει, εκτός της συνθήκης $s\,(x_i - 0) = s\,(x_i + 0)$ που εξασφαλίζει τη διέλευση από το σημείο, **τουλάχιστον** επίσης και τις παρακάτω δύο συνθήκες:

$$s^{(1)}\,(x_i - 0) = s^{(1)}\,(x_i + 0) \quad \text{και} \quad s^{(2)}\,(x_i - 0) = s^{(2)}\,(x_i + 0)\,.$$

Αυτό όμως για να συμβαίνει θα πρέπει ο βαθμός της s να είναι τουλάχιστον 3, δηλαδή η s να είναι κυβική.

v) Η συνέχεια στο $\Re$ προϋποθέτει και τη μέγιστη δυνατή συνέχεια στα επί μέρους πολυώνυμα.

vi) Αν όλα τα διαστήματα $(5.1.1 - 2)$ έχουν το ίδιο μήκος, τότε έχουμε μια **ομοιόμορφη** (uniform) spline, διαφορετικά μια μη ομοιόμορφη (non uniform) spline.

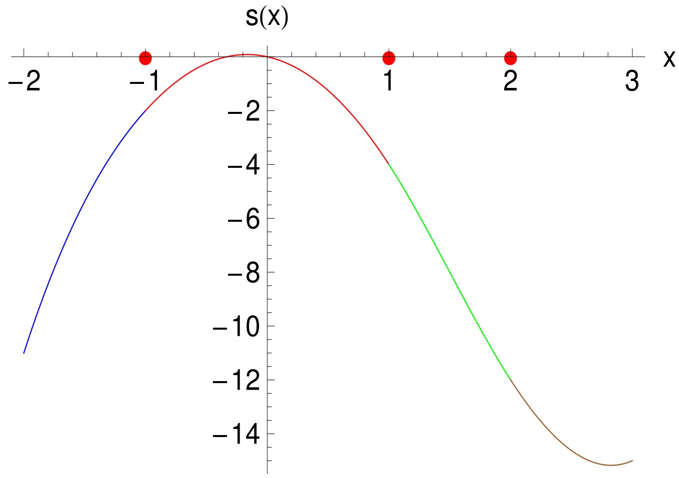
Παράδειγμα 5.1.1 - 1

Έστω η συνάρτηση (Σχ. 5.1.1 - 2):

$$s(x) = \begin{cases} x^3 + 2x + 1 & \text{αν} \quad x \in (-\infty, -1) \quad \text{βαθμός} \quad 3 \\ -3x^2 - x & \qquad\; x \in [-1, 1) \qquad\qquad\quad 2 \\ 2x^3 - 9x^2 + 5x - 2 & \qquad\; x \in [1, 2) \qquad\qquad\quad\;\; 3 \\ x^3 - 3x^2 - 7x + 6 & \qquad\; x \in [2, +\infty) \qquad\qquad 3. \end{cases}$$

Δείξτε ότι ορίζει μια κυβική spline.

Λύση. Παρατηρούμε ότι:



Σχήμα 5.1.1 - 2: Παράδειγμα 5.1.1 - 1

i) Οι κόμβοι είναι στα σημεία: -1, 1 και 2.

ii) Σε κάθε ένα από τα διαστήματα ορισμού της η $s(x)$ είναι ένα πολυώνυμο το πολύ 3ου βαθμού. Άρα ο βαθμός της $s(x)$ είναι $m = 3$. Τότε σύμφωνα με τον Ορισμό 5.1.1 - 1 (ii) για να ορίζει η $s(x)$ μια spline πρέπει η $s(x)$ και οι παράγωγοι τάξης 1, $m - 1 = 2$ να είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $\Re$. Έχουμε ότι:

$$
\begin{aligned}
&x \in (-\infty, -1) \quad && s(x) = x^3 + 2x + 1, \quad && s^{(1)}(x) = 3x^2 + 2,\\
& && && s^{(2)}(x) = 6x.\\
&x \in [-1, 1) \quad && s(x) = -3x^2 - x, \quad && s^{(1)}(x) = -6x - 1,\\
& && && s^{(2)}(x) = -6.
\end{aligned}
$$

Άρα

$$
\begin{aligned}
&s(-1-0) = -2 = s(-1+0),\\
&s^{(1)}(-1-0) = 5 = s^{(1)}(-1+0) \quad \text{και}\\
&s^{(2)}(-1-0) = -6 = s^{(2)}(-1+0),
\end{aligned}
$$

οπότε ισχύει ο Ορισμός 5.1.1 - 1 (ii) για το σημείο $x = -1$. Όμοια αποδεικνύεται ότι ο Ορισμός 5.1.1 - 1 ισχύει και για τα σημεία $x = 1,\ 2$.

Επομένως η s είναι μια κυβική spline (Παρατηρήσεις 5.1.1 - 1 iii).

ii) Η s είναι μια μη ομοιόμορφη spline (Παρατηρήσεις 5.1.1 - 1 v).

■

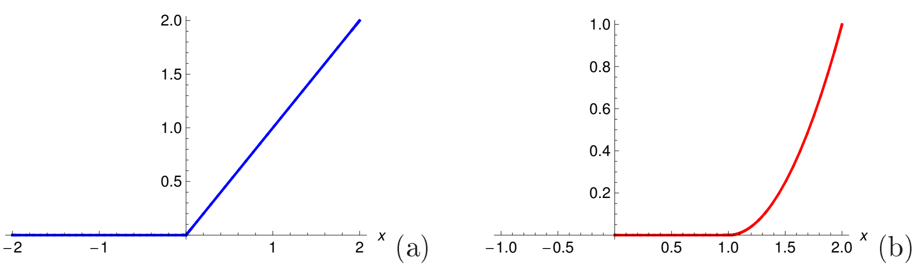
Εισάγεται στη συνέχεια η έννοια της συνάρτησης, που ορίζεται από μια αποκομμένη δύναμη (truncated power function) ως εξής:

Ορισμός 5.1.1 - 2 *Η αποκομμένη δύναμη της συνάρτησης x^m, συμβολίζεται με x_+^m και ορίζεται από τη σχέση (Σχ. 5.1.1 - 3a):*

$$x_+^m = \begin{cases} x^m & \alpha\nu \quad x \geq 0 \\ 0 & \alpha\nu \quad x < 0. \end{cases} \tag{5.1.1 - 4}$$

Ορισμός 5.1.1 - 3 *Η αποκομμένη δύναμη της συνάρτησης $(x - x_i)^m$, συμβολίζεται με $(x - x_i)_+^m$ και ορίζεται ως (Σχ. 5.1.1 - 3b):*

$$(x - x_i)_+^m = \begin{cases} (x - x_i)^m & \alpha\nu \quad x \geq x_i \\ 0 & \alpha\nu \quad x < x_i. \end{cases} \tag{5.1.1 - 5}$$



Σχήμα 5.1.1 - 3: (a) Η αποκομμένη δύναμη x_+ βαθμού $m = 1$ και (b) η $(x - 1)_+^2$ βαθμού $m = 2$

Η εντολή ορισμού της συνάρτησης $(5.1.1 - 4)$, αντίστοιχα της $(5.1.1 - 5)$ με το MATHEMATICA είναι:

```
f[x_]:=If[x<0,0,x^m]
g[x_]:=If[x<x_i,0,(x-x_i)^m]
```

Παρατήρηση 5.1.1 - 1

Η $s(x) = (x - x_i)_+^m$ είναι μια spline βαθμού m με κόμβο στο σημείο $x = x_i$, για την οποία ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} s^{(m)}(x) &= \frac{d^m\,(x - x_i)_+^m}{d\,x^m} = m\,!\,(x - x_i)_+^0 \\ &= \begin{cases} m\,! & \text{αν} \quad x \geq x_i \\ 0 & \text{αν} \quad x < x_i. \end{cases} \end{aligned} \tag{5.1.1 - 6}$$

Άρα η $s^{(m)}(x)$ είναι ασυνεχής στο x_i με πλάτος ασυνέχειας (jump discontinuity) $d = m\,!$.

Αποδεικνύεται ότι ισχύει το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 5.1.1 - 1 *Κάθε spline βαθμού m με κόμβους στα σημεία*

$$x_0 < x_1 < \ldots < x_n$$

γράφεται ως εξής:

$$\begin{aligned} s(x) &= a_0 + a_1\,x + \ldots + a_m\,x^m \\ &\quad + c_0\,(x - x_0)_+^m + c_1\,(x - x_1)_+^m + \ldots + c_n\,(x - x_n)_+^m \\ &= \sum_{i=0}^{m} a_i\,x^i + \sum_{j=0}^{n} c_j\,\,(x - x_j)_+^m\,, \end{aligned} \tag{5.1.1 - 7}$$

όταν

$$c_j = \frac{s^{(m)}\,(x_j + 0) - s^{(m)}\,(x_j - 0)}{m\,!} \tag{5.1.1 - 8}$$

για κάθε $j = 0,\,1,\,\ldots,\,n$.

Πόρισμα 5.1.1 - 1 *Όταν $x \in [x_0, x_n]$ η spline s έχει τη μορφή*

$$s(x) = b_0 + b_1\,x + \ldots + b_m\,x^m$$

$$
\begin{aligned}
& +c_1\,(x-x_1)_+^m + \ldots + c_{n-1}\,(x-x_{n-1})_+^m \\
= \;& \sum_{i=0}^{m} a_i\, x^i + \sum_{j=0}^{n-1} c_j\;(x-x_j)_+^m\,, \qquad (5.1.1 - 9)
\end{aligned}
$$

όταν οι συντελεστές c_j*;* $j = 0,\,1,\,\ldots,\,n$ *δίνονται από την* $(5.1.1-8)$.

Απόδειξη. Επειδή $x \in [x_0, x_n]$, από τον τύπο $(5.1.1-7)$ προκύπτει ότι:

- $x \geq x_0$, οπότε σύμφωνα με τον Ορισμό 5.1.1 - 3 είναι $(x-x_0)_+^m = (x-x_0)^m$, και
- $x \leq x_n$, οπότε $(x-x_n)_+^m = 0$.

Άρα ο τύπος $(5.1.1-7)$ στην περίπτωση αυτή γράφεται

$$
\begin{aligned}
s(x) \;&=\; \overbrace{a_0 + a_1\,x + \ldots + a_m\,x^m + c_0\,(x-x_0)_+^m}^{\text{τελικά μετά τις πράξεις:}\quad b_0+b_1\,x+\ldots+b_m\,x^m} \\
& \quad +c_1\,(x-x_1)_+^m + \ldots + c_{n-1}\,(x-x_{n-1})_+^m\,,
\end{aligned}
$$

δηλαδή η αποδεικτέα. ■

Εφαρμογές του πορίσματος θα δοθούν στην Παράγραφο 5.1.3.

Παράδειγμα 5.1.1 - 2

Έστω η spline του Παραδείγματος 5.1.1 - 1

$$
s(x) = \begin{cases}
x^3 + 2x + 1 & \text{αν} \quad x \in (-\infty, -1) \\
-3x^2 - x & \phantom{\text{αν}} \quad x \in [-1, 1) \\
2x^3 - 9x^2 + 5x - 2 & \phantom{\text{αν}} \quad x \in [1, 2) \\
x^3 - 3x^2 - 7x + 6 & \phantom{\text{αν}} \quad x \in [2, +\infty).
\end{cases}
$$

όπου οι κόμβοι είναι στα σημεία $x_0 = -1$, $x_1 = 1$ και $x_2 = 2$, ενώ ο βαθμός της s είναι $m = 3$. Τότε σύμφωνα με την $(5.1.1-7)$ είναι

$$
\begin{aligned}
s(x) \;&=\; x^3 + 2x + 1 + c_0\,(x-x_0)_+^3 + c_1\,(x-x_1)_+^3 + c_2\,(x-x_2)_+^3 \\
&=\; x^3 + 2x + 1 + c_0\,(x+1)_+^3 + c_1\,(x-1)_+^3 + c_2\,(x-2)_+^3
\end{aligned}
$$

όπου από την $(5.1.1-8)$ προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}
c_0 &= \frac{s^{(3)}(x_0+0)-s^{(3)}(x_0-0)}{3\,!}=\frac{0-6}{6}=-1\\
c_1 &= \frac{s^{(3)}(x_1+0)-s^{(3)}(x_1-0)}{3\,!}=\frac{12-0}{6}=2\\
c_2 &= \frac{s^{(3)}(x_2+0)-s^{(3)}(x_2-0)}{3\,!}=\frac{6-12}{6}=-1.
\end{aligned}$$

Άρα

$$s(x)=x^3+2x+1-(x+1)_+^3+2\,(x-1)_+^3-(x-2)_+^3\,.$$

Επαλήθευση σύμφωνα με τον Ορισμό 5.1.1 - 3:

$x\in(-\infty,-1)$

$$\begin{aligned}
s(x) &= x^3+2x+1-\overbrace{(x+1)_+^3+2\,(x-1)_+^3-(x-2)_+^3}^{0}\\
&= x^3+2x+1,
\end{aligned}$$

$x\in[-1,1)$

$$\begin{aligned}
s(x) &= x^3+2x+1-(x+1)^3+\overbrace{2\,(x-1)_+^3-(x-2)_+^3}^{0}\\
&= x^3+2x+1-\left(x^3+3x^2+3x+1\right)=-3x^2-x,
\end{aligned}$$

$x\in[1,2)$

$$\begin{aligned}
s(x) &= x^3+2x+1-(x+1)^3+2\,(x-1)^3-\overbrace{(x-2)_+^3}^{0}\\
&= x^3+2x+1-\left(x^3+3x^2+3x+1\right)\\
&\quad +2\left(x^3-3x^2+3x-1\right)=2x^3-9x^2+5x-2,
\end{aligned}$$

$x\in[2,+\infty)$

$$s(x) = x^3+2x+1-(x+1)^3+2\,(x-1)^3-(x-2)^3$$

$$\begin{aligned} &= x^3+2x+1-\left(x^3+3x^2+3x+1\right) \\ &\quad +2\left(x^3-3x^2+3x-1\right)-\left(x^3-6x^2+12x-8\right) \\ &= x^3-3x^2-7x+6. \end{aligned}$$

Η εντολή ορισμού της spline $s(x)$ του Παραδείγματος 5.1.1 - 3 με το MATHEMATICA είναι:

```
s[x_]:=x^3+2x+1-If[x<-1,0,(x+1)^3]
       +2 If[x<1,0,(x-1)^3]-If[x<2,0,(x-2)^3]
```

Παρατήρηση 5.1.1 - 2

Σε πολλές εφαρμογές το πεδίο ορισμού μιας spline περιορίζεται στο διάστημα $[x_0, x_n]$. Στις περιπτώσεις αυτές ο Ορισμός 5.1.1 - 1 τροποποιείται κατάλληλα, έτσι ώστε να περιλαμβάνει τα άκρα σημεία x_0 και x_n. Επομένως ο Ορισμός 5.1.1 - 1 στην περίπτωση αυτή γράφεται:

Ορισμός 5.1.1 - 4. *Έστω $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ένα σύνολο σημείων ενός διαστήματος $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$, που είναι διατεταγμένα ως εξής:*

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b. \tag{5.1.1 - 10}$$

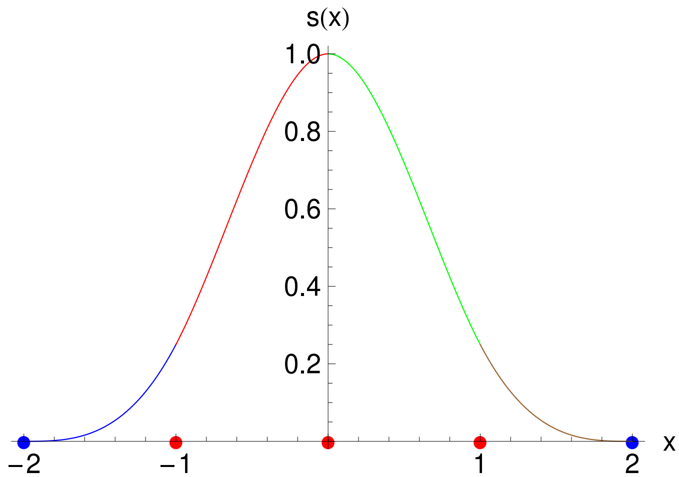
Τότε μια spline, έστω s, στο $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ βαθμού m με εξωτερικούς κόμβους στα σημεία $a = x_0$, $b = x_n$ και εσωτερικούς στα $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, είναι η συνάρτηση που πληροί τις παρακάτω δύο ιδιότητες:

i) σε κάθε ένα από τα διαστήματα

$$[x_0, x_1), \quad [x_1, x_2), \quad \ldots, \quad [x_{n-1}, x_n] \tag{5.1.1 - 11}$$

η συνάρτηση s είναι ένα πολυώνυμο βαθμού μικρότερου ή ίσου του m,

ii) η συνάρτηση s και οι παράγωγοί της τάξης $1, 2, \ldots, m-1$ είναι συνεχείς συναρτήσεις στους **εσωτερικούς** *κόμβους.*



Σχήμα 5.1.1 - 4: Παράδειγμα 5.1.1 - 3

Εφόσον η $s(x)$ είναι μια spline, τότε λόγω και της ιδιότητας (ii) του Ορισμού 5.1.1 - 4, η $(5.1.1-11)$ πολλές φορές γράφεται και

$$[x_0, x_1]\,, \quad [x_1, x_2]\,, \quad \ldots, \quad [x_{n-1}, x_n]\,. \tag{5.1.1 - 12}$$

Μια εφαρμογή του Ορισμού 5.1.1 - 4 και της $(5.1.1-11)$ δίνεται στο παράδειγμα, που ακολουθεί.

Παράδειγμα 5.1.1 - 3

Έστω η συνάρτηση (Σχ. 5.1.1 - 4):

$$s(x)=\begin{cases} \frac{1}{4}(x+2)^3 & \text{αν} \quad x\in[-2,-1] \quad \text{βαθμός} \quad 3 \\ \frac{1}{4}\left(3|x|^3-6x^2+4\right) & \qquad x\in[-1,1] \qquad\qquad 3 \\ \frac{1}{4}(2-x)^3 & \qquad x\in[1,2] \qquad\qquad 3. \end{cases}$$

Δείξτε ότι ορίζει όμοια μια κυβική spline. Η καμπύλη της $s(x)$ περιγράφει στις Πιθανότητες και την Στατιστική την κατανομή (distribution) Irwin-Hall.

Λύση. Η $s(x)$ λόγω του $|x|^3$ γράφεται ως εξής:

$$s(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(x+2)^3 & \text{αν} \quad x \in [-2,-1] \quad \text{βαθμός} \quad 3 \\ \frac{1}{4}\left(-3x^3 - 6x^2 + 4\right) & \qquad x \in [-1,0] \qquad\qquad\quad 3 \\ \frac{1}{4}\left(3x^3 - 6x^2 + 4\right) & \qquad x \in [0,1] \qquad\qquad\quad\;\; 3 \\ \frac{1}{4}(2-x)^3 & \qquad x \in [1,2] \qquad\qquad\quad\;\; 3. \end{cases}$$

i) Οι εξωτερικοί κόμβοι είναι στα σημεία: -2 και 2, ενώ οι εσωτερικοί στα -1, 0 και 1.

ii) Σε κάθε ένα από τα διαστήματα ορισμού της η συνάρτηση $s(x)$ είναι ένα πολυώνυμο 3ου βαθμού. Άρα ο βαθμός της $s(x)$ είναι $m = 3$. Τότε σύμφωνα με τον Ορισμό 5.1.1 - 4 (ii) για να ορίζει η $s(x)$ μια spline, πρέπει η $s(x)$ και οι παράγωγοι τάξης 1, $m - 1 = 2$ να είναι συνεχείς στους εσωτερικούς κόμβους. Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} x \in [-2,-1] \quad & s(x) = \tfrac{1}{4}(x+2)^3, \\ & s^{(1)}(x) = \tfrac{3}{4}(x+2)^2, \\ & s^{(2)}(x) = \tfrac{6}{4}(x+2). \\ x \in [-1,0] \quad & s(x) = \tfrac{1}{4}\left(-3x^3 - 6x^2 + 4\right), \\ & s^{(1)}(x) = \tfrac{1}{4}\left(-9x^2 - 12x\right), \\ & s^{(2)}(x) = \tfrac{1}{4}\left(-18x - 12\right). \end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned} & s(-1-0) = \tfrac{1}{4} = s(-1+0), \\ & s^{(1)}(-1-0) = \tfrac{3}{4} = s^{(1)}(-1+0) \quad \text{και} \\ & s^{(2)}(-1-0) = \tfrac{3}{2} = s^{(2)}(-1+0), \end{aligned}$$

οπότε ισχύει ο Ορισμός 5.1.1 - 1 (ii) για το σημείο $x = -1$. Όμοια αποδεικνύεται ότι ισχύει και για τα σημεία $x = 0$, 1, οπότε η s είναι μια κυβική spline (Παρατηρήσεις 5.1.1 - 1 iii).

ii) Η s είναι μια ομοιόμορφη spline (Παρατηρήσεις 5.1.1 - 1 v).

■

5.1.2 Φυσική spline

Ορισμός 5.1.2 - 1 *Μια spline βαθμού m θα λέγεται* **φυσική** *(natural), όταν:*

i) είναι περιττού βαθμού, δηλαδή $2m-1$ όπου $m = 1, 2, \dots ,$

ii) στα άκρα διαστήματα

$$(-\infty, x_0) \quad \textit{και} \quad [x_n, +\infty)$$

η s είναι ένα πολυώνυμο βαθμού $\leq m-1$.

Παρατηρήσεις 5.1.2 - 1

i) Επειδή σύμφωνα με τον Ορισμό 5.1.1 - 1 (ii) η spline και οι παράγωγοί της τάξης

$$1,\, 2,\, \dots,\, \overbrace{(2m-1)-1}^{2(m-1)}$$

πρέπει να είναι συνεχείς συναρτήσεις, προκύπτει τότε ότι στους ακραίους κόμβους x_0 και x_n, όπου λόγω του Ορισμού 5.1.2 - 1 *(ii)* η s είναι βαθμού $m-1$, θα πρέπει να ισχύει

$$s^{(j)}\left(x_0\right) = s^{(j)}\left(x_n\right) = 0 \qquad (5.1.2 - 1)$$

για κάθε $j = m,\, m+1,\, \dots,\, 2(m-1)$.

ii) Στην ειδική περίπτωση που η spline είναι κυβική, δηλαδή βαθμού $3 = 2 \cdot 2 - 1$, οπότε $m = 2$, τότε, αν είναι και φυσική, στα άκρα διαστήματα πρέπει να είναι βαθμού $m - 1 = 2 - 1 = 1$. Άρα η συνθήκη $(5.1.2 - 1)$ στην περίπτωση αυτή, επειδή $2(m-1) = 2(2-1) = 2$, γράφεται

$$s^{(2)}\left(x_0\right) = s^{(2)}\left(x_n\right) = 0. \qquad (5.1.2 - 2)$$

Αποδεικνύεται ότι και στην περίπτωση της φυσικής spline ισχύει ανάλογο θεώρημα του 5.1.1 - 1. Συγκεκριμένα ισχύει ότι:

Θεώρημα 5.1.2 - 1 *Κάθε φυσική spline βαθμού $2m-1$ με κόμβους στα σημεία*

$$x_0 < x_1 < \ldots < x_n$$

γράφεται ως εξής:

$$\begin{aligned} s(x) &= a_0 + a_1\, x + \ldots + a_{m-1}\, x^{m-1} \\ &\quad + c_0\,(x-x_0)_+^{2m-1} + c_1\,(x-x_1)_+^{2m-1} + \ldots + c_n\,(x-x_n)_+^{2m-1} \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} a_i\, x^i + \sum_{j=0}^{n} c_j\ (x-x_j)_+^{2m-1}\,, \end{aligned} \qquad (5.1.2 - 3)$$

όταν

$$c_j = \frac{s^{(2m-1)}\,(x_j+0) - s^{(2m-1)}\,(x_j-0)}{(2m-1)\,!} \qquad (5.1.2 - 4)$$

για κάθε $j = 0,\, 1,\, \ldots,\, n,$, *ενώ οι συντελεστές* c_j *επαληθεύουν τις σχέσεις*

$$c_0\, x_0^i + c_1\, x_1^i + \ldots + c_n\, x_n^i = 0 \quad \text{για κάθε} \quad i = 0,\, 1,\, \ldots,\, m-1. \qquad (5.1.2 - 5)$$

Οι σχέσεις $(5.1.2-5)$ αναλυτικά γράφονται

$$\begin{aligned} c_0 + c_1 + \ldots + c_n &= 0 \\ c_0\, x_0 + c_1\, x_1 + \ldots + c_n\, x_n &= 0 \\ c_0\, x_0^2 + c_1\, x_1^2 + \ldots + c_n\, x_n^2 &= 0 \\ \vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\ c_0\, x_0^{m-1} + c_1\, x_1^{m-1} + \ldots + c_n\, x_n^{m-1} &= 0. \end{aligned} \qquad (5.1.2 - 6)$$

Πόρισμα 5.1.2 - 1 *Κάθε κυβική φυσική spline με κόμβους στα σημεία*

$$x_0 < x_1 < \ldots < x_n$$

γράφεται ως εξής:

$$\begin{aligned} s(x) &= a_0 + a_1\, x + c_0\, (x - x_0)_+^3 + c_1\, (x - x_1)_+^3 \\ &\quad + \ldots + c_n\, (x - x_n)_+^3\,, \end{aligned} \tag{5.1.2 - 7}$$

όταν

$$c_j = \frac{s^{(3)}\,(x_j + 0) - s^{(3)}\,(x_j - 0)}{3\,!} \tag{5.1.2 - 8}$$

για κάθε $j = 0,\, 1,\, \ldots,\, n$*, ενώ οι συντελεστές* c_j *επαληθεύουν τις σχέσεις*

$$\begin{aligned} c_0 + c_1 + \ldots + c_n &= 0 \\ c_0\, x_0 + c_1\, x_1 + \ldots + c_n\, x_n &= 0 \end{aligned} \tag{5.1.2 - 9}$$

Η απόδειξη προκύπτει άμεσα από το Θεώρημα 5.1.3 - 2. Όμοια όπως και στο Πόρισμα 5.1.1 - 1 εφαρμογές θα δοθούν στην Παράγραφο 5.1.3.

Παράδειγμα 5.1.2 - 1

Έστω η spline (Σχ. 5.1.2 - 1)

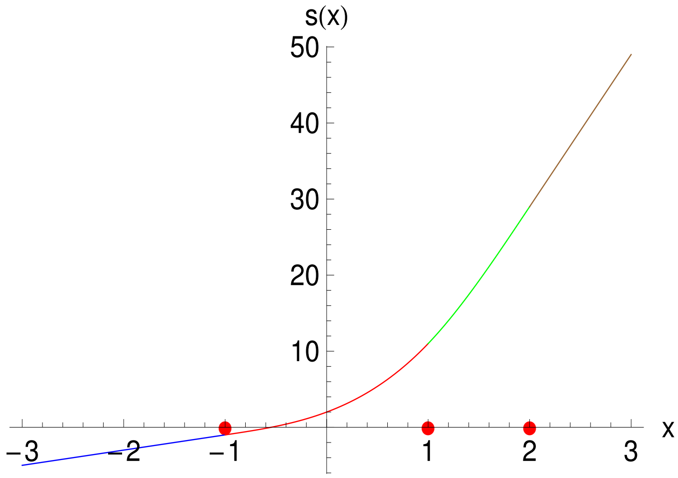
$$s(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{αν} \quad x \in (\infty, -1) \quad \text{βαθμός} \quad 1 \\ x^3 + 3x^2 + 5x + 2 & \qquad x \in [-1, 1) \qquad\qquad\quad 3 \\ -2x^3 + 12x^2 - 4x + 5 & \qquad x \in [1, 2) \qquad\qquad\qquad 3 \\ 20x - 11 & \qquad x \in [2, +\infty) \qquad\qquad\; 1. \end{cases}$$

Εύκολα αποδεικνύεται[1] ότι η s είναι μια κυβική spline με κόμβους στα σημεία $x_0 = -1$, $x_1 = 1$ και $x_2 = 2$. Επειδή στους άκρους κόμβους -1 και 2 η s είναι 1ου βαθμού, σύμφωνα με τον Ορισμό 5.1.2 - 1 η s θα είναι μια φυσική spline.

Τότε από την $(5.1.2 - 7)$ έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} s(x) &= 2x + 1 + c_0\, (x - x_0)_+^3 + c_1\, (x - x_1)_+^3 + c_2\, (x - x_2)_+^3 \\ &= 2x + 1 + c_0\, (x + 1)_+^3 + c_1\, (x - 1)_+^3 + c_2\, (x - 2)_+^3\,, \end{aligned}$$

[1] Η απόδειξη αφήνεται σαν άσκηση (βλέπε Παράδειγμα 5.1.1 - 1).



Σχήμα 5.1.2 - 1: Παράδειγμα 5.1.2 - 1

όπου από την $(5.1.2-8)$ προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{s^{(3)}\left(x_0+0\right)-s^{(3)}\left(x_0-0\right)}{3\,!}=\frac{6-0}{6}=1, \\ c_1 &= \frac{s^{(3)}\left(x_1+0\right)-s^{(3)}\left(x_1-0\right)}{3\,!}=\frac{-12-6}{6}=-3, \\ c_2 &= \frac{s^{(3)}\left(x_2+0\right)-s^{(3)}\left(x_2-0\right)}{3\,!}=\frac{0+12}{6}=2. \end{aligned}$$

Άρα

$$s(x)=2x+1+(x+1)_+^3-3\,(x-1)_+^3+2\,(x-2)_+^3\,.$$

Τότε προφανώς ισχύει η $(5.1.2-8)$, δηλαδή

$$s^{(2)}\left(-1\right)=s^{(2)}\left(2\right)=0$$

ενώ σύμφωνα με την $(5.1.2-9)$ είναι

$$\begin{aligned} c_0+c_1+c_2 &= 1-3+2=0 \\ c_0(-1)+c_2(1)+c_2(2) &= -1-3+4=0. \end{aligned}$$

Η εντολή ορισμού της spline $s(x)$ με το MATHEMATICA είναι:

```
s[x_]:=2x+1+If[x<-1,0,(x+1)^3]
       -3 If[x<1,0,(x-1)^3]+2 If[x<2,0,(x-2)^3]
```

5.1.3 Υπολογισμός κυβικής spline

Ορισμός 5.1.3 - 1 (spline παρεμβολής). *Η spline $s(x)$ θα λέγεται ότι ορίζει μια παρεμβολή (spline interpolation) στα σημεία*

$$S = \{(x_i, y_i) \quad \mu\varepsilon \quad i = 0,\, 1,\, \ldots,\, n\},$$

όπου $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$, όταν

$$s\,(x_i) = y_i \quad \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon \quad i = 0,\, 1,\, \ldots,\, n. \tag{5.1.3 - 1}$$

Ορισμός 5.1.3 - 2. *Η spline $s(x)$ θα λέγεται ότι παρεμβάλλεται ή ότι ορίζει μια παρεμβολή στη συνάρτηση $f(x)$ στους κόμβους $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$, όταν*

$$s\,(x_i) = f\,(x_i) \quad \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon \quad i = 0,\, 1,\, \ldots,\, n. \tag{5.1.3 - 2}$$

Παρατήρηση 5.1.3 - 1

Οι $(5.1.3 - 1)$, αντίστοιχα $(5.1.3 - 2)$ θα λέγονται στο εξής και **συνθήκες παρεμβολής**.

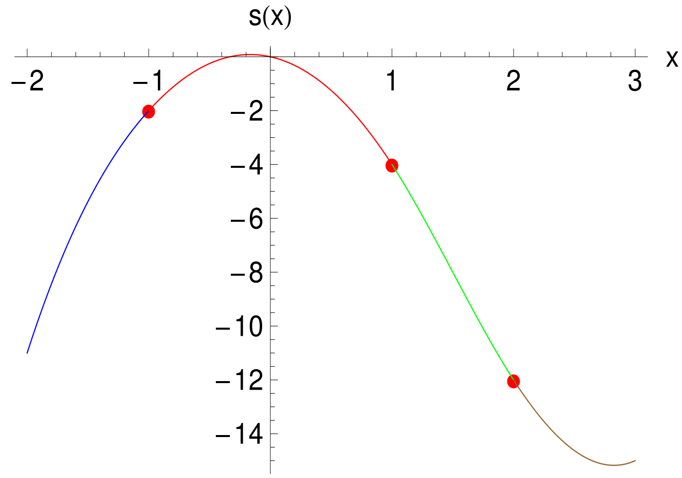
Παράδειγμα 5.1.3 - 1

Έστω η κυβική spline $s(x)$ του Παραδείγματος 5.1.1 - 1:

$$s(x) = \begin{cases} x^3 + 2x + 1 & \text{αν} \quad x \in (-\infty, -1) \\ -3x^2 - x & \quad\;\; x \in [-1, 1) \\ 2x^3 - 9x^2 + 5x - 2 & \quad\;\; x \in [1, 2) \\ x^3 - 3x^2 - 7x + 6 & \quad\;\; x \in [2, +\infty). \end{cases}$$

Τότε, επειδή

$$s(-1-0) = -2 = y_0, \quad s(1-0) = -4 = y_1 \quad \text{και} \quad s(2-0) = -12 = y_2,$$



Σχήμα 5.1.3 - 1: Παράδειγμα 5.1.3 - 1

η $s(x)$ ορίζει μια κυβική spline παρεμβολής, που διέρχεται από τα σημεία (Σχ. 5.1.3 - 1):

$$(x_0, y_0) = (-1, -2), \quad (x_1, y_1) = (1, -4) \quad \text{και} \quad (x_2, y_2) = (2, -12).$$

Παράδειγμα 5.1.3 - 2

Όμοια έστω η κυβική spline $s(x)$ του Παραδείγματος 5.1.1 - 3:

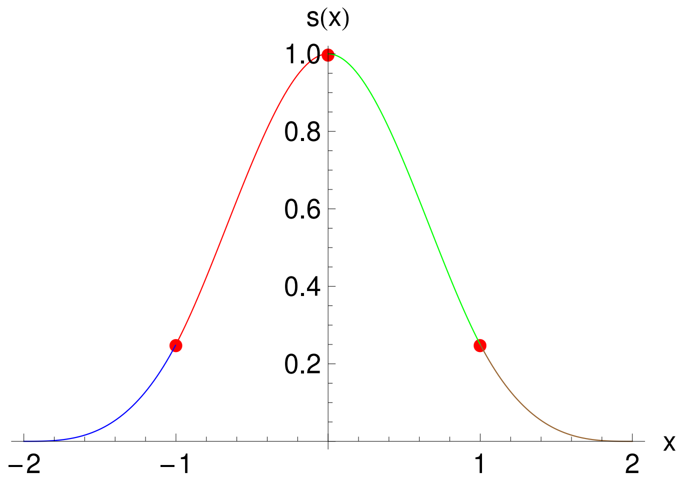
$$s(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(x+2)^3 & \text{αν} \quad x \in [-2, -1] \\ \frac{1}{4}\left(3|x|^3 - 6x^2 + 4\right) & \quad x \in [-1, 1] \\ \frac{1}{4}(2-x)^3 & \quad x \in [1, 2]. \end{cases}$$

Τότε, επειδή

$$s(-1-0) = \frac{1}{4} = y_0, \quad s(0-) = 1 = y_1 \quad \text{και} \quad s(1-0) = \frac{1}{4} = y_2,$$

η $s(x)$ ορίζει μια κυβική spline παρεμβολής, που διέρχεται από τα σημεία (Σχ. 5.1.3 - 2):

$$(x_0, y_0) = \left(-1, \frac{1}{4}\right), \quad (x_1, y_1) = (0, 1) \quad \text{και} \quad (x_2, y_2) = \left(1, \frac{1}{4}\right).$$



Σχήμα 5.1.3 - 2: Παράδειγμα 5.1.3 - 2

Σχετικά με την ύπαρξη των spline παρεμβολής αποδεικνύεται ότι ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 5.1.3 - 1 (ύπαρξης spline παρεμβολής). *Υπάρχει ακριβώς μια spline s βαθμού $2m-1$, που ορίζεται στο $[\mathrm{a},\mathrm{b}]$ με κόμβους τα σημεία*

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b,$$

όταν

$$\mathbf{n+1 \geq m}, \tag{5.1.3 - 3}$$

που επαληθεύει τις συνθήκες παρεμβολής

$$s\left(x_i\right) = y_i \quad \textit{για κάθε} \quad i = 0,\, 1,\, \ldots,\, n \tag{5.1.3 - 4}$$

και τις συνθήκες στα άκρα $a = x_0$ και $b = x_n$

$$s^{(j)}\left(x_0\right) = u_j \quad \textit{και} \quad s^{(j)}\left(x_n\right) = w_j, \tag{5.1.3 - 5}$$

όταν $j = 1,\, 2,\, \ldots,\, m-1$ ή $j = m,\, m+1,\, \ldots,\, 2(m-1)$.

Παρατηρήσεις 5.1.3 - 1

Οι $(5.1.3-5)$:

- θα λέγονται στο εξής επίσης και **συνοριακές** συνθήκες παρεμβολής,
- για την περίπτωση μιας κυβικής spline $(m=2)$ γράφονται

$$s^{(1)}\left(x_0\right)=u_j \quad \text{και} \quad s^{(1)}\left(x_n\right)=w_j. \tag{5.1.3 - 6}$$

Παράδειγμα 5.1.3 - 3

Να υπολογιστεί η κυβική spline s με κόμβους στα σημεία $x_0=-1$, $x_1=1$ και $x_2=2$, που επαληθεύει τις συνθήκες παρεμβολής $(5.1.3-4)$:

$$s(-1)=-2, \quad s(1)=-4, \quad s(2)=-12 \tag{5.1.3 - 7}$$

και τις συνοριακές $(5.1.3-5)$:

$$s^{(1)}(-1)=5, \qquad s^{(1)}(2)=-7. \tag{5.1.3 - 8}$$

Λύση. Σύμφωνα με τα δεδομένα για τους κόμβους έχουμε ότι:

$$x_0=-1, \quad x_1=1 \ \text{(εσωτερικός κόμβος)} \quad \text{και} \quad x_2=2.$$

Άρα ο αριθμός των κόμβων είναι $n=3$ και ο βαθμός της spline επίσης 3. Επειδή ο βαθμός γράφεται

$$3=2\cdot\overbrace{2}^{m}-1, \quad \text{οπότε} \quad m=2$$

η συνθήκη $(5.1.3-3)$, όπου: $n+1=3+1=4\geq 2=m$, επαληθεύεται και η spline υπάρχει.

Από το [2]Πόρισμα 5.1.1 - 1 προκύπτει ότι επειδή ο βαθμός της είναι 3 και ο εσωτερικός κόμβος το x_1, η $s(x)$ θα είναι της μορφής

$$s(x)=b_0+b_1\,x+b_2\,x^2+b_3\,x^3+c\,(x-1)_+^3. \tag{5.1.3 - 9}$$

[2]Όταν $x\in[x_0,x_n]$ η spline s είναι βαθμού m, τότε θα έχει τη μορφή

$$s(x) \;=\; b_0+b_1\,x+\ldots+b_m\,x^m+c_1\,(x-x_1)_+^m+\ldots+c_{n-1}\,(x-x_{n-1})_+^m\,,$$

όταν $x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}$ οι **εσωτερικοί κόμβοι**.

Τότε από την εφαρμογή των συνθηκών παρεμβολής (5.1.3−8) στην (5.1.3−9), επειδή σύμφωνα με τον Ορισμό 5.1.1 - 3 είναι

$$(x-1)_+^3 = \begin{cases} 0 & \text{αν} \quad x<1 \\ (x-1)^3 & \text{αν} \quad x \geq 1, \end{cases}$$

προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} s(-1) &= b_0 + b_1(-1) + b_2(-1)^2 + b_3(-1)^3 + c\,\overbrace{(x-1)_+^3}^{0} \\ &= b_0 - b_1 + b_2 - b_3 = -2 \\ s(1) &= b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + c\,\overbrace{(x-1)_+^3}^{0} \\ &= b_0 + b_1 + b_2 + b_3 = -4, \\ s(2) &= b_0 + b_1\,2 + b_2\,2^2 + b_3\,2^3 + c(2-1)^3 \\ &= b_0 + 2\,b_1 + 4\,b_2 + 8\,b_3 + c = -12, \end{aligned}$$

δηλαδή

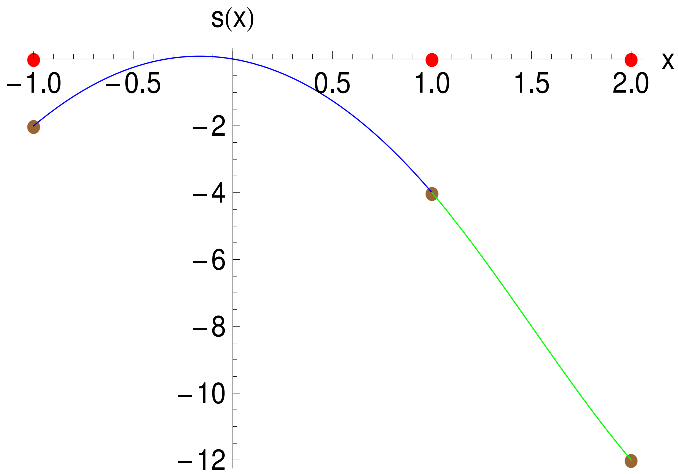
$$\begin{aligned} b_0 - b_1 + b_2 - b_3 &= -2 \\ b_0 + b_1 + b_2 + b_3 &= -4 \\ b_0 + 2\,b_1 + 4\,b_2 + 8\,b_3 + c &= -12. \end{aligned} \tag{5.1.3 - 10}$$

Από την $(5.1.3-9)$ παραγωγίζοντας έχουμε

$$s^{(1)}(x) = b_1 + 2\,b_2\,x + 3\,b_3\,x^2 + 3\,c\,(x-1)_+^2,$$

οπότε από την εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών παρεμβολής $(5.1.3-8)$ στην παραπάνω σχέση προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} s^{(1)}(-1) &= b_1 + 2\,b_2(-1) + 3\,b_3(-1)^2 + 3c\,\overbrace{(x-1)_+^2}^{0} \\ &= b_1 - 2\,b_2 + 3\,b_3 = 5, \\ s^{(1)}(2) &= b_1 + 2\,b_2\,2 + 3\,b_3\,2^2 + 3\,c(2-1)^2 \\ &= b_1 + 4\,b_2 + 12\,b_3 + 3\,c = -7, \end{aligned}$$



Σχήμα 5.1.3 - 3: Παράδειγμα 5.1.3 - 3

δηλαδή

$$\begin{aligned} b_1 - 2\,b_2 + 3\,b_3 &= 5 \\ b_1 + 4\,b_2 + 12\,b_3 + 3\,c &= -7. \end{aligned} \qquad (5.1.3 - 11)$$

Τότε από τη λύση του συστήματος των εξισώσεων (5.1.3−10) και (5.1.3−11) τελικά έχουμε

$$b_0 = 0, \quad b_1 = -1, \quad b_2 = -3, \quad b_3 = 0 \quad \text{και} \quad c = 2.$$

Άρα η spline s είναι της μορφής

$$s(x) = -x - 3x^2 + 2(x-1)^3_+, \quad \text{όταν} \quad x \in [-1, 2]$$

που συμπίπτει στο διάστημα $[-1, 2]$ με την αντίστοιχη

$$s(x) = \begin{cases} -3x^2 - x & \text{αν} \quad x \in [-1, 1) \\ 2x^3 - 9x^2 + 5x - 2 & \text{αν} \quad x \in [1, 2]. \end{cases}$$

του Παραδείγματος 5.1.1 - 1.

Στο Πρόγραμμα 5.1.3 - 1 δίνεται ο υπολογισμός, η γραφική παράσταση της spline $s(x)$ όταν $x \in [-2, 3]$, των κόμβων της και των σημείων παρεμβολής με το MATHEMATICA.

Πρόγραμμα 5.1.3 - 1 (κυβικής spline)

```
x0 = -1;x1 = 1;x2 = 2;
y0 = -2;y1 = -4;y2 = -12;
s[x_] := b0 + b1 x + b2 x^2 + b3 x^3
         + c If[x < x1, 0, (x - x1)^3]
y = D[s[x], x] /. x -> x0;
z = D[s[x], x] /. x -> x2;
sol = Solve[{s[x0] == y0, s[x1] == y1, s[x2] == y2,
      y == 5, z == -7}, {b0, b1, b2, b3, c}]
s1[x_] := s[x] /. sol
Print["Spline s(x)=", s1[x]]
data = {{x0, 0}, {x1, 0}, {x2, 0}};
fgr1 = ListPlot[data, PlotStyle -> Red, PlotMarkers -> "."];
data1 = {{x0, y0}, {x1, y1}, {x2, y2}};
fgr2 = ListPlot[data1, PlotStyle -> Brown, PlotMarkers -> "."];
fgr3 = Show[Plot[s1[x], {x, x0, x1}, PlotStyle -> Blue],
       Plot[s1[x], {x, x1, x2}, PlotStyle -> Green]];
fgr = Show[fgr1, fgr2, fgr3,AxesLabel -> {"x", "s(x)"}]
```

Υπολογισμός κυβικών φυσικών spline

Σχετικά με τον υπολογισμό των φυσικών spline ισχύει το παρακάτω γενικό θεώρημα.

Θεώρημα 5.1.3 - 2. *Υπάρχει ακριβώς μια φυσική spline s με πεδίο ορισμού το $\Re$ βαθμού $2m-1$ και κόμβους στα σημεία*

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b,$$

όταν

$$\mathbf{n+1 \geq m}, \tag{5.1.3 - 12}$$

που επαληθεύει τις συνθήκες παρεμβολής

$$s\,(x_i) = y_i \quad \textit{για κάθε} \quad i = 0,\, 1,\, \ldots,\, n, \tag{5.1.3 - 13}$$

όταν $y_i \in \Re$.

Παράδειγμα 5.1.3 - 4

Να υπολογιστεί η κυβική φυσική spline με κόμβους στα σημεία

$$x_0 = -1, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2$$

που επαληθεύει τις συνθήκες παρεμβολής

$$s(-1) = -1, \quad s(1) = 11, \quad \text{και} \quad s(2) = 29. \qquad (5.1.3 - 14)$$

Λύση. Ο αριθμός των κόμβων είναι $n = 3$, ενώ ο βαθμός της spline:

$$3 = 2 \cdot \overbrace{2}^{m} - 1, \quad \text{δηλαδή} \quad m = 2.$$

Άρα $n + 1 = 3 + 1 = 4 \geq 2 = m$, οπότε επαληθεύεται η συνθήκη $(5.1.3 - 12)$ και η spline υπάρχει.

Από το [3]Πόρισμα 5.1.2 - 1 προκύπτει ότι η spline θα έχει τη μορφή

$$s(x) = a_0 + a_1\, x + c_0\,(x+1)_+^3 + c_1\,(x-1)_+^3 + c_2\,(x-2)_+^3. \qquad (5.1.3 - 15)$$

Τότε από την εφαρμογή των συνθηκών παρεμβολής $(5.1.3 - 14)$ στην $(5.1.3 - 15)$ προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} s(-1) &= a_0 + a_1(-1) + \overbrace{c_0\,(x+1)_+^3 + c_1\,(x-1)_+^3 + c_2\,(x-2)_+^3}^{0} \\ &= a_0 - a_1 = -1, \end{aligned}$$

[3]Κάθε κυβική φυσική spline ($2m - 1 = 3 = 2 \cdot 2 - 1$, οπότε $m = 2$) με κόμβους στα σημεία

$$x_0 < x_1 < \ldots < x_n$$

γράφεται ως εξής:

$$s(x) = a_0 + a_1\, x + c_0\,(x - x_0)_+^3 + c_1\,(x - x_1)_+^3 + \ldots + c_n\,(x - x_n)_+^3\,,$$

όταν οι συντελεστές c_j επαληθεύουν τις σχέσεις

$$\begin{aligned} c_0 + c_1 + \ldots + c_n &= 0, \\ c_0\, x_0 + c_1\, x_1 + \ldots + c_n\, x_n &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s(1) &= a_0 + a_1 + c_0\,(1+1)^3 + \overbrace{c_1\,(x-1)_+^3 + c_2\,(x-2)_+^3}^{0} \\
&= a_0 + a_1 + 8\,c_0 = 11, \\
s(2) &= a_0 + a_1\,2 + c_0\,(1+2)^3 + c_1\,(2-1)^3 + \overbrace{c_2\,(x-2)_+^3}^{0} \\
&= a_0 + 2\,a_1 + 27\,c_0 + c_1 = 29,
\end{aligned}$$

δηλαδή

$$\begin{aligned}
a_0 - a_1 3 &= -1 \\
a_0 + a_1 + 8\,c_0 &= 11 \\
a_0 + 2\,a_1 + 27\,c_0 + c_1 &= 29.
\end{aligned} \tag{5.1.3 - 16}$$

Από την $(5.1.2-6)$ έχουμε

$$\begin{aligned}
c_0 + c_1 + c_2 &= 0 \\
c_0\,x_0 + c_1\,x_1 + c_2\,x_2 &= 0,
\end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned}
c_0 + c_1 + c_2 &= 0 \\
-c_0 + c_1 + 2\,c_2 &= 0.
\end{aligned} \tag{5.1.3 - 17}$$

Από τη λύση του συστήματος των εξισώσεων $(5.1.3-16)$ και $(5.1.3-17)$ τελικά προκύπτουν οι εξής συντελεστές

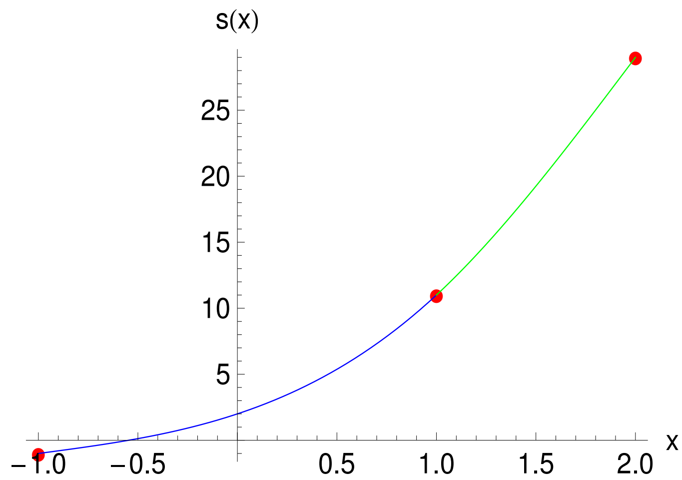
$$a_0 = 1, \quad a_1 = 2, \quad c_0 = 1, \quad c_1 = -3 \quad \text{και} \quad c_2 = 2.$$

Άρα σύμφωνα με την $(5.1.3-15)$ η spline s, όταν $x \in \Re$, θα είναι της μορφής (Σχ. 5.1.3 - 4)

$$s(x) = s(x) = 1 + 2\,x + (x+1)_+^3 - 3\,(x-1)_+^3 + 2\,(x-2)_+^3$$

που συμπίπτει με την αντίστοιχη μορφή του Παραδείγματος 5.1.2 - 1.

Στο Πρόγραμμα 5.1.3 - 2 δίνεται ο υπολογισμός, η γραφική παράσταση της $s(x)$ όταν $x \in [-2, 3]$ και των σημείων παρεμβολής με το MATHEMATICA.



Σχήμα 5.1.3 - 4: Παράδειγμα 5.1.3 - 4

Πρόγραμμα 5.1.3 - 2 (κυβικής φυσικής spline)

```
x0 = -1;x1 = 1;x2 = 2;y0 = -1;y1 =11;y2 =29;
s[x_] := a0 + a1 x + c0 If[x < x0, 0, (x - x0)^3]
         +c1 If[x < x1, 0, (x - x1)^3]
         + c2 If[x < x2, 0, (x - x2)^3]
y = c0 + c1 + c2;
z = c0 x0 + c1 x1 + c2 x2;
sol = Solve[{s[x0] == y0, s[x1] == y1, s[x2] == y2,
      y == 0,z == 0}, {a0, a1, c0, c1, c2}]
s1[x_] := s[x] /. sol
Print["Spline s(x)=", s1[x]]
Plot[s1[x], {x, -2, 3}]
data = {{x0, y0}, {x1, y1}, {x2, y2}};
fgr1 = ListPlot[data, PlotStyle -> Red,
       PlotMarkers -> "."];
fgr2 = Show[Plot[s1[x], {x, x0, x1}, PlotStyle -> Blue],
       Plot[s1[x], {x, x1, x2}, PlotStyle -> Green]];
fgr = Show[fgr1, fgr2, PlotRange -> All,
      AxesLabel -> {"x", "s(x)"}]
```

Ασκήσεις

1. Αν $x \in [-1, 2]$, να γραφεί η spline του Παραδείγματος 5.1.1 - 3 στη μορφή $(5.1.1-9)$.
2. Δείξτε ότι η $s(x) = (x - x_i)_+^m$ ορίζει μια spline βαθμού m με κόμβο το σημείο x_i.
3. Αιτιολογείστε τον ελάχιστο αριθμό κόμβων που απαιτούνται για μια κυβική, αντίστοιχα 5ου βαθμού (quintic) spline.
4. Να γραφεί η μορφή του συστήματος υπολογισμού μιας κυβικής φυσικής spline, που διέρχεται από τα σημεία παρεμβολής

$$(0, 0), \quad (1, 2), \quad (2, 1) \quad \text{και} \quad (3, 0).$$

5 (προαιρετική). Να γραφεί το πρόγραμμα με το MATHEMATICA, αντίστοιχα το MATLAB, που υπολογίζει τη λύση της Άσκησης 4 και στη συνέχεια να γίνει η γραφική παράσταση της spline, των κόμβων και των σημείων παρεμβολής.
6 (προαιρετική). Να γραφούν τα αντίστοιχα Προγράμματα των 5.1.3 - 1 και 5.1.3 - 2 με το MATLAB. Ποια η μορφή των προγραμμάτων με το MATHEMATICA, αντίστοιχα το MATLAB για την περίπτωση μιας spline 5ου βαθμού;
7. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\mathrm{I} = \int_0^1 e^{-x^2} dx \quad \text{με θεωρητική τιμή:} \quad \mathrm{I} \approx 0.746\,824$$

χρησιμοποιώντας μια κυβική spline με κόμβους 3, αντίστοιχα 4 ισοαπέχοντα σημεία, όταν

i) οι συνθήκες $(5.1.3-5)$ συμπίπτουν με τις τιμές της παραγώγου της ολοκληρωτέας συνάρτησης στα άκρα σημεία,

ii) η spline είναι φυσική.

Σε κάθε περίπτωση να γίνεται σύγκριση με τη θεωρητική τιμή.

[4]

E-mail: bratsos@teiath.gr URL: http://users.teiath.gr/bratsos/

Βιβλιογραφία

[1] Ακρίβης, Γ., Δουγαλής, Β. (1995), Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Αθήνα, ISBN 978–960–524–022–6.

[2] Μπράτσος, Α. (2011), Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, ISBN 978–960–351–874–7.

[3] Μπράτσος, Α. (2002), Ανώτερα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, ISBN 960–351–453–5/978–960–351–453–4.

[4] Στεφανάκος, Χ., Προγραμματισμός Η/Υ με MATLAB, Γκούρδας Εκδοτική, ISBN 978–960–387–856–8.

[5] Ahlberg, J.H., Nilson, E.N. and Walsh, J.L. (1967), The theory of splines and their applications, Academic Press, New York, ISBN: 978–0–12–044750–3.

[6] Burden, Richard L. and Faires, J. Douglas (2000), Numerical Analysis (7th ed.), Brooks/Cole, ISBN 978–0–534–38216–2.

[7] Carl de Boor (1978), A Practical guide to splines, Springer–Verlang, New York, ISBN 978–0–387–95366–3.

[8] Conte, S. D., Carl de Boor (1981), Elementary Numerical Analysis: An Algorithmic Approach (3rd ed.), McGraw-Hill Book Company, ISBN 978–0–07–012447–9.

[9] Don, E., Schaum's Outlines – Mathematica (2006), Εκδόσεις Κλειδάριθμος, ISBN 978–960–461–000–6.

[10] Greville, T.N.E. (1969), Theory and applications of spline functions, Academic Press, New York, ISBN 0–12–302950–3.

[11] Kendell A. Atkinson (1989), An Introduction to Numerical Analysis (2nd ed.), John Wiley & Sons, ISBN 0–471–50023–2.

[12] Leader, Jeffery J. (2004), Numerical Analysis and Scientific Computation, Addison Wesley, ISBN 978–0–201–73499–7.

[13] Schatzman, M. (2002), Numerical Analysis: A Mathematical Introduction, Clarendon Press, Oxford, ISBN 978–0–19–850279–1.

[14] Stoer, Josef; Bulirsch, Roland (2002), Introduction to Numerical Analysis (3rd ed.), Springer, ISBN 978–0–387–95452–3.

[15] Sli, E. and Mayers, D. (2003), An Introduction to Numerical Analysis, Cambridge University Press, ISBN 978–0–521–00794–8.

Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm
- http://mathworld.wolfram.com/
- http://eom.springer.de/