M8 Μέτρηση συντελεστή εσωτερικής τριβής υγρού

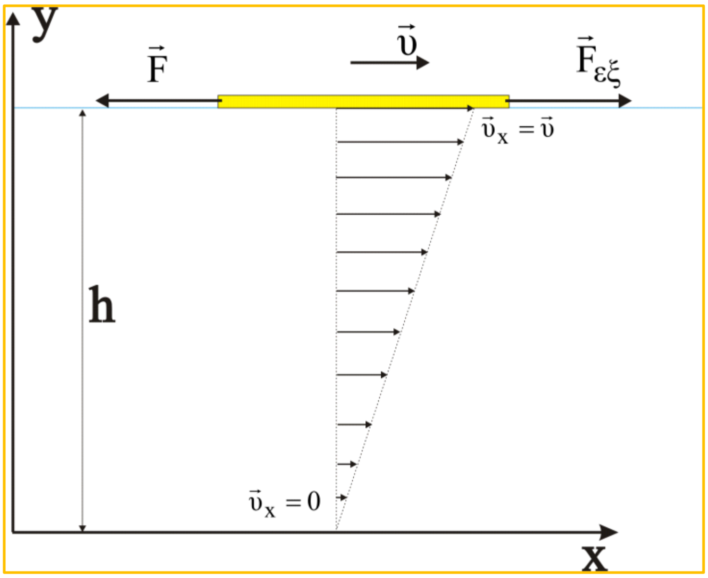
1 Σκοπός

Σκοπός της άσκησης είναι να υπολογίσουμε τον συντελεστή εσωτερικής τριβής υγρού με την μέθοδο της ρίψης σφαιρών.

2 Θεωρία

2.1 Γενικά

Ως ρευστά καθορίζονται τα υλικά τα οποία δεν έχουν καθορισμένο σχήμα αλλά πάντα λαμβάνουν το σχήμα του δοχείου το οποίο τα περιέχει. Χωρίζονται σε δύο επιμέρους κατηγορίες , τα υγρά και τα αέρια. Τα υγρά είναι πρακτικά ασυμπίεστα ενώ τα αέρια τείνουν να καταλάβουν όλο τον όγκο του δοχείου που τα περιέχει Μία από τις πιο χαρακτηριστικές ιδιότητες ενός ρευστού είναι το ιξώδες (ή εσωτερική τριβή) το οποίο εκφράζει την αντίσταση του στην παραμόρφωση από την παρουσία διατμητικών δυνάμεων (για να γίνει περισσότερο αντιληπτό το ιξώδες θα πρέπει να σκεφτούμε ότι αύξησή του κάνει το υγρό πιο παχύρευστο). Η δύναμη εσωτερικής τριβής (δύναμη του ιξώδους) οφείλεται σε δύο διαφορετικούς μοριακούς μηχανισμούς: τις δυνάμεις συνοχής και συνάφειας μεταξύ των μορίων (δυνάμεις van der Waals) και τη μεταφορά ορμής μέσω των μοριακών συγκρούσεων.



Σχήμα 1: Κίνηση επίπεδης πλάκας μέσα σε υγρό

Στην συνέχεια θα επικεντρωθούμε στην μελέτη του ιξώδους στα υγρά. Ας ξεκινήσουμε με το φαινόμενο της εσωτερικής τριβής που παρατηρείται όταν μία επίπεδη πλάκα κινείται στην επιφάνεια του υγρού έχοντας σταθερή ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ σε μικρό ύψος h από τον πυθμένα ενώ στην πλάκα ασκείται σταθερή δύναμη $\vec{F}_{\varepsilon\xi}$ (**Σχήμα 1**). Ανάμεσα στην πλάκα και το πυθμένα υπάρχει υγρό ύψους h , το οποίο μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελείται από επιμέρους στρώματα . Το ανώτερο στρώμα που είναι σε επαφή με την επίπεδη πλάκα έχει την ταχύτητα της πλάκας λόγω των δυνάμεων συνάφειας που αναπτύσσονται μεταξύ των μορίων της πλάκας και του υγρού, ενώ για τους ίδιους λόγους το κατώτερο στρώμα παραμένει ακίνητο. Μεταξύ αυτών των ακραίων στρωμάτων τα ενδιάμεσα στρώματα έχουν ενδιάμεσες ταχύτητες γλιστρώντας το ένα ως προς το άλλο, όπως φαίνεται στο **Σχήμα 1**, και από αυτόν τον λόγο αναπτύσσονται δυνάμεις εσωτερικής τριβής .Από τον 1^o νόμο του Newton καταλαβαίνουμε πως θα πρέπει να ασκείται από το υγρό στην επίπεδη πλάκα και μία δύναμη $\vec{F}$ αντίθετη της $\vec{F}_{εξ}$. Αυτή είναι η δύναμη εσωτερικής τριβής (δύναμη ιξώδους) και αποδεικνύεται πειραματικά πως είναι της μορφής

$$F = -\eta A \frac{d\upsilon_x}{dy}$$

όπου η ο συντελεστής εσωτερικής τριβής του υγρού (συντελεστής ιξώδους), Α η επιφάνεια της πλάκας, και $\frac{d\upsilon_x}{dy}$ η μεταβολή της ταχύτητας των διαφόρων στρωμάτων η οποία είναι παράλληλη στην μετατόπιση, ανά μονάδα μήκους κάθετου στην κίνηση. Αυτή η σχέση ισχύει με την προϋπόθεση ότι η ταχύτητα είναι σχετικά μικρή και τα στρώματα του υγρού κινούνται το ένα παράλληλα με το άλλο (όταν δηλαδή η ροή είναι στρωτή και όχι τυρβώδης). Στην απλουστευμένη περίπτωση όπου το βάθος h είναι μικρό η μεταβολή της υ_x μπορεί να θεωρηθεί γραμμική και τότε ισχύει

$$\frac{d\upsilon_x}{dy} = \frac{\upsilon}{h}$$ οπότε

$$F = -\eta A \frac{\upsilon}{h}.$$

Ο συντελεστής εσωτερικής τριβής εξαρτάται πρωτίστως από το υγρό και δευτερευόντως από την θερμοκρασία του. (οι εξαρτήσεις αυτές φαίνονται στους παραπλεύρως **πίνακες 1,2**) Μονάδα του συντελεστή εσωτερικής τριβής στο S.I. είναι το

$$1\frac{Kg}{m \cdot s} = 1 Pa \cdot s.$$

Ευρέως όμως χρησιμοποιούμενη μονάδα είναι και το

$$1 Poisse = 1\frac{g}{cm \cdot s} = \frac{1}{10} Pa \cdot s$$

Η ίδια περίπου κατάσταση που περιγράφηκε παραπάνω ισχύει και όταν ένα σώμα κινείται μέσα σε υγρό που ηρεμεί. Πάνω στο σώμα ασκείται μία δύναμη αντίστασης η οποία δίνεται από τον τύπο $F = -K\eta\upsilon$. Ο συντελεστής Κ εξαρτάται από το σχήμα του σώματος. Στην περίπτωση της μικρής σφαίρας που θα εξετάσουμε παρακάτω ισχύει

Πίνακας 1

Είδος ρευστού	Θερμοκρασία °C	Συντελεστής εσωτερικής τριβής $Pa \cdot s$
Νερό	0	0,001808
Νερό	20	0,001008
Νερό	100	0,000285
Αιθανόλη	20	0,001250
Γλυκερίνη (καθαρή)	20	1,410
Ρετσινόλαδο	20	0,969
Λάδι μηχανής	20	0,31

Πίνακας 2
Γλυκερίνη

Θερμοκρασία °C	Συντελεστής εσωτ. τριβής $Pa \cdot s$
0	12.07
10	3.90
20	1.41
30	0.61
40	0.28
50	0.14
60	0.08

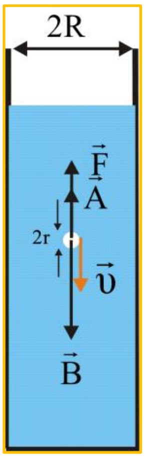
$K = 6\pi r$ και έτσι ο τύπος της δύναμης λαμβάνει την μορφή (**Σχήμα 2**)

$$F = -6\pi\eta r\upsilon .$$

Το πρόσημο (-) σημαίνει πως η δύναμη είναι αντίρροπη της ταχύτητας. Η παραπάνω σχέση , γνωστότερη και ως **νόμος του Stokes**, ισχύει στην περίπτωση σφαίρας με μικρή ακτίνα r που κινείται με μικρή σχετικά ταχύτητα (προς αποφυγή τυρβώδους ροής) σε υγρό το οποίο βρίσκεται σε δοχείο απείρων διαστάσεων. Στην περίπτωση της κίνησης σε δοχείο πεπερασμένης κυκλικής διατομής η παραπάνω σχέση λαμβάνει την μορφή

$$F = -6\pi\eta r\upsilon(1 + 2{,}4\frac{r}{R}) \qquad (8.1)$$

όπου R η ακτίνα της διατομής του δοχείου μέσα στο οποίο έχουμε τοποθετήσει το υγρό (**Σχήμα 2**).



Σχήμα 2: Δυνάμεις κατά την κίνηση της σφαίρας

Σε ένα στερεό που είναι βυθισμένο μέσα σε ένα υγρό πέρα από το βάρος του και τη δύναμη της τριβής ασκείται και η δύναμη της άνωσης το μέτρο της οποίας δίνεται από την αρχή του Αρχιμήδη: σε ένα σώμα ολικώς ή μερικώς βυθισμένο σε υγρό η άνωση ισούται με το βάρος του υγρού που εκτοπίζει το σώμα. Η δύναμη της άνωσης έχει κατεύθυνση αντίθετη από αυτή του βάρους, δηλ κατακόρυφα προς τα πάνω. Επομένως για ένα σώμα πλήρως βυθισμένο σε υγρό η άνωση ισούται με

$$A = \rho_{\upsilon\gamma\rho} g V$$

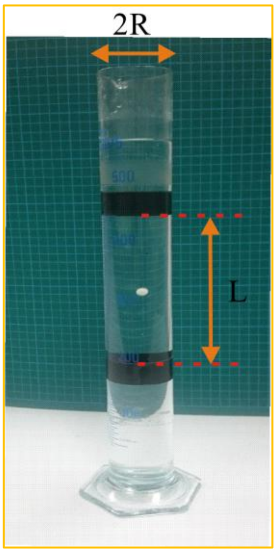
όπου V ο όγκος του σώματος, $\rho_{\upsilon\gamma\rho}$ η πυκνότητα του υγρού και g η επιτάχυνση της βαρύτητας.

Η πυκνότητα ενός σώματος δίνεται από την σχέση $\rho = \frac{m}{V}$, όπου m η μάζα του σώματος και V ο όγκος του. Είναι μία σταθερά η οποία εξαρτάται από το υλικό κυρίως. Ειδικότερα στην περίπτωση της σφαίρας , επειδή ο όγκος της σφαίρας δίνεται από την σχέση

$V_{\sigma\varphi} = \frac{4}{3}\pi r^3$ ο τύπος λαμβάνει τη μορφή

$$\rho_{\sigma\varphi} = \frac{3m_{\sigma\varphi}}{4\pi r^3} \qquad (8.2)$$

2.2 Μελέτη πτώσης σφαιρών μέσα σε υγρό



Εικόνα 1: Κίνηση της σφαίρας

Έστω ότι από την επιφάνεια ενός υγρού το οποίο βρίσκεται μέσα σε σωλήνα ακτίνας R αφήνουμε με μηδενική αρχική ταχύτητα να πέσει σφαίρα ακτίνας r (**Σφάλμα! Το αρχείο προέλευσης της αναφοράς δεν βρέθηκε.**) . Κατά την πτώση της σφαίρας ασκούνται πάνω της τρείς δυνάμεις : το βάρος $\vec{B}$ με κατεύθυνση προς τα κάτω , η άνωση $\vec{A}$ και η δύναμη αντίστασης $\vec{F}$ με κατεύθυνση προς τα πάνω (**Εικόνα 2**).

Από τον νόμο του Stokes έχουμε για τη δύναμη αντίστασης

$$F = -6\pi\eta r\upsilon(1 + 2{,}4\frac{r}{R}) \quad (8.1)$$

Η δύναμη της άνωσης δίνεται όπως έχουμε αναφέρει από την αρχή του Αρχιμήδη δίνεται από την σχέση

$$A = \rho_{\upsilon\gamma\rho} g V_{\sigma\varphi}$$

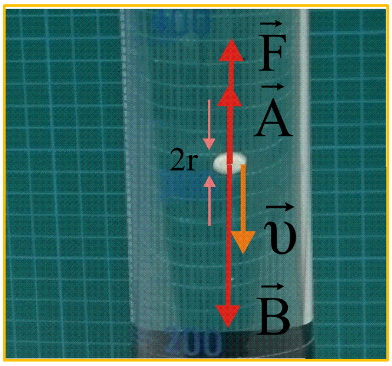
Αντικαθιστώντας τον όγκο της σφαίρας έχουμε

$$A = \rho_{\upsilon\gamma\rho} g \frac{4}{3}\pi r^3 \qquad (8.3)$$

Όσο για τη βαρυτική δύναμη έχουμε

$$B = m_{\sigma\varphi} g = \rho_{\sigma\varphi} V_{\sigma\varphi} g \rightarrow \qquad B = \rho_{\sigma\varphi} \frac{4}{3}\pi r^3 g \qquad (8.4)$$

2.2.1 Εύρεση της οριακής ταχύτητας



Εικόνα 2: Δυνάμεις κατά την πτώση της σφαίρας

Η άνωση και το βάρος καθ΄ όλη τη διάρκεια της κίνησης της σφαίρας μέσα στο υγρό παραμένουν σταθερές ,ενώ η δύναμη του ιξώδους αυξάνεται όσο αυξάνεται η ταχύτητα. Στην αρχή η σφαίρα εκτελεί επιταχυνόμενη κίνηση επειδή το βάρος υπερτερεί των άλλων δύο δυνάμεων που κατευθύνονται προς τα πάνω. Όμως καθώς αυξάνεται η ταχύτητα αυξάνεται και η δύναμη του ιξώδους με αποτέλεσμα κάποια στιγμή η συνισταμένη των δυνάμεων να γίνει ίση με το μηδέν και από εκείνο το σημείο και μετά η σφαίρα να εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με σταθερή ταχύτητα που θα την ονομάσουμε οριακή ταχύτητα $\upsilon_{o\rho}$. Για τον υπολογισμό της θα ξεκινήσουμε από τον 1^o νόμο του Newton

$$\Sigma\vec{F} = 0 \Rightarrow \; B - A - |F| = 0$$

και αντικαθιστώντας σε αυτήν την εξίσωση τα B,A,F από τις εξ. (8.1),(8.3),(8.4) και λύνοντας ως προς την οριακή ταχύτητα έχουμε

$$\upsilon_{o\rho} = \frac{2}{9} r^2 \frac{(\rho_{\sigma\varphi} - \rho_{\upsilon\gamma\rho})}{\eta} g \frac{1}{1 + 2.4\frac{r}{R}} \qquad (8.4)$$

2.2.2 Χρονική εξάρτηση της ταχύτητας

Την $\upsilon_{o\rho}$ την αποκτά η σφαίρα έχοντας διανύσει κάποια απόσταση μέσα στο υγρό (θεωρούμε ότι αυτό συμβαίνει περίπου δέκα εκατοστά από την επιφάνεια). Μέχρι εκείνο το σημείο η σφαίρα εκτελεί επιταχυνόμενη κίνηση. Παρακάτω θα μελετήσουμε την κίνησης της σφαίρας γενικότερα από την αρχή της κίνησής της. Από τον 2^o νόμο του Newton έχουμε

$$\sum \vec{F} = m_{\sigma\varphi}\vec{a} \Rightarrow \quad m_{\sigma\varphi}\frac{d\upsilon}{dt} = B - A - |F| \Rightarrow$$

$$\rho_{\sigma\varphi}\frac{4}{3}\pi r^3 \frac{d\upsilon}{dt} = \rho_{\sigma\varphi}\frac{4}{3}\pi r^3 g - \rho_{\upsilon\gamma\rho} g \frac{4}{3}\pi r^3 - 6\pi\eta r\upsilon(1 + 2{,}4\frac{r}{R})$$

ή $$\frac{d\upsilon}{dt} = g\frac{\rho_{\sigma\varphi} - \rho_{\upsilon\gamma\rho}}{\rho_{\sigma\varphi}} - \frac{9\eta(1 + 2.4\frac{r}{R})}{2\rho_{\sigma\varphi} r^2}\upsilon$$

Διαιρώντας και τα δύο μέλη με τον συντελεστή της ταχύτητας στο 2^o μέλος της παραπάνω εξίσωσης έχουμε

$$\frac{2\rho_{\sigma\varphi} r^2}{9\eta(1+2.4\frac{r}{R})}\frac{d\upsilon}{dt}=\frac{2g(\rho_{\sigma\varphi}-\rho_{\upsilon\gamma\rho})r^2}{9\eta(1+2.4\frac{r}{R})}-\upsilon$$

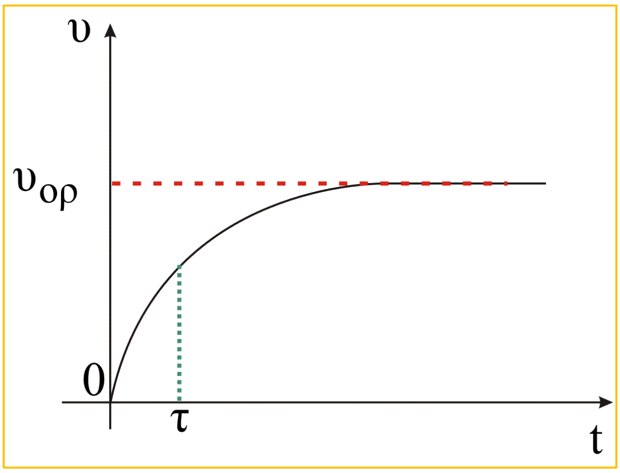
Παρατηρούμε ότι ο πρώτος όρος στο 2^o μέλος της παραπάνω εξίσωσης είναι το $\upsilon_{o\rho}$. Θέτοντας επίσης $\tau=\frac{2\rho_{\sigma\varphi} r^2}{9\eta(1+2.4\frac{r}{R})}$ η παραπάνω εξίσωση λαμβάνει τη μορφή

$$\tau\frac{d\upsilon}{dt}+\upsilon-\upsilon_{o\rho}=0$$

η λύση της οποίας είναι

$$\upsilon=\upsilon_{o\rho}(1-e^{-\frac{t}{\tau}}) \qquad (8.5)$$

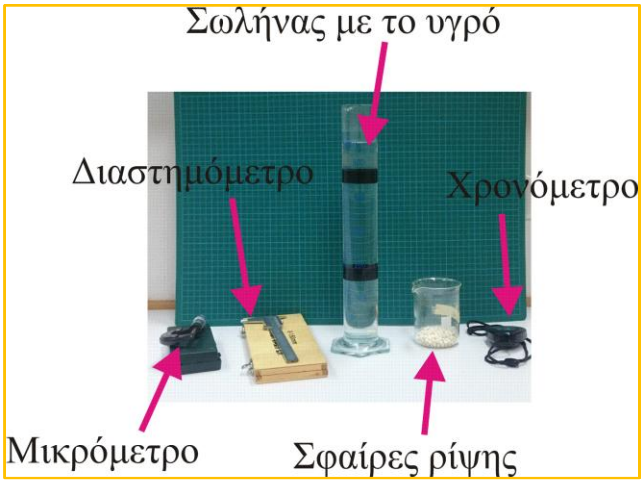
όπου υποθέσαμε ότι η σφαίρα εισήλθε στο νερό με μηδενική ταχύτητα. Η γραφική παράσταση της παραπάνω σχέσης φαίνεται στο παραπλεύρως (**Σχήμα 3**). Παρατηρούμε πως σε συμφωνία με την προηγούμενη υποπαράγραφο η μέγιστη ταχύτητα που επιτυγχάνει η σφαίρα είναι η $\upsilon_{o\rho}$. Η σταθερά τ έχει διαστάσεις χρόνου και όπως φαίνεται και από τον ορισμό της εξαρτάται από τον συντελεστή εσωτερικής τριβής η.



Σχήμα 3: Γραφική παράσταση της ταχύτητας σε συνάρτηση με τον χρόνο.

3 Πειραματική διάταξη

Η διάταξη η οποία φαίνεται στην **Εικόνα 3** αποτελείται από ένα σωλήνα μεγάλης διατομής και ακτίνας R που περιέχει το ρευστό του οποίου θέλουμε να βρούμε τον συντελεστή εσωτερικής τριβής (ιξώδες) η. Επίσης από μικρές σφαίρες ακτίνας r των οποίων την κίνηση θα μελετήσουμε στο υγρό και που θα μας βοηθήσουν να προσδιορίσουμε τον συντελεστή εσωτερικής τριβής. Πλησιάζοντας το χέρι μας όσο μπορούμε στην επιφάνεια του υγρού αφήνουμε τις σφαίρες να πέσουν με μηδενική αρχική ταχύτητα. Η σφαίρα αρχικά εκτελεί επιταχυνόμενη κίνηση αλλά από ένα σημείο και μετά εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση (αυτό θεωρούμε ότι συμβαίνει περίπου 10cm κάτω από την επιφάνεια). Σε αυτό το σημείο έχουμε τοποθετήσει μαύρη αυτοκόλλητη ταινία. Όταν περάσει η σφαίρα την ταινία ενεργοποιούμε το χρονόμετρο και μετράμε



Εικόνα 3: Πειραματική διάταξη

τον χρόνο t μέχρι να φτάσει στην άλλη μαύρη ταινία η οποία βρίσκεται σε απόσταση L κάτω από την πρώτη (**Εικόνα 1**). Την οριακή ταχύτητα την υπολογίζουμε από την σχέση

$$\upsilon_{o\rho} = \frac{L}{t}$$

Λύνοντας τώρα την εξίσωση (8.4) ως προς τον συντελεστή εσωτερικής τριβής η μπορούμε να τον υπολογίσουμε από την σχέση

$$\eta = \frac{2}{9} r^2 \frac{(\rho_{\sigma\varphi} - \rho_{\upsilon\gamma\rho})}{\upsilon_{o\rho}} g\Lambda \qquad (8.6)$$

όπου

$$\Lambda = \frac{1}{1 + 2.4\frac{r}{R}} \qquad (8.7)$$

4 Εργασίες

1. Αναγνωρίστε με την βοήθεια του υπεύθυνου καθηγητή τη διάταξη και τα όργανα που θα χρησιμοποιήσουμε (**Σφάλμα! Το αρχείο προέλευσης της αναφοράς δεν βρέθηκε.**)

2. Μετρείστε με ένα διαστημόμετρο τη διάμετρο του σωλήνα και από αυτή βρείτε την ακτίνα του.

D=…………cm R=……………….cm

3.Ξεχωρείστε πέντε όμοιες σφαίρες, μετρείστε με ένα μικρόμετρο τη διάμετρο τους και στη συνέχεια βρείτε τη μέση διάμετρό τους και καταχωρείστε τις τιμές στον **Πίνακα 3**. Από τη μέση διάμετρο βρείτε τη μέση ακτίνα

$$\bar{r} = \frac{\bar{d}}{2} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots cm$$

4.Ζυγείστε σε ένα ζυγό ακριβείας την μάζα και των πέντε σφαιρών μαζί και βρείτε από αυτή τη μέση μάζα τους

$$\overline{m}_{\sigma\varphi} = \frac{m_1 + \ldots + m_5}{5} = \ldots\ldots\ldots gr$$

Εικόνα 4: Ρίψη σφαίρας

5.Υπολογίστε την πυκνότητα των σφαιρών με βάση τη σχέση (8.2) και σημειώστε και την πυκνότητα του υγρού ρωτώντας τη από τον υπεύθυνο καθηγητή

$\rho_{\sigma\varphi} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots gr/cm^3$ $\rho_{\upsilon\gamma\rho} = \ldots\ldots\ldots\ldots gr/cm^3$

6. Μετρείστε τη θερμοκρασία του περιβάλλοντος που είναι και θερμοκρασία του υγρού καθώς και την απόσταση L μεταξύ των δύο μαύρων αυτοκόλλητων ταινιών στον σωλήνα (**Εικόνα 1**)

$\theta = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ^\circ C$ $L = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots cm$

7. Πλησιάζοντας το χέρι σας όσο το δυνατόν περισσότερο στο υγρό (**Εικόνα 4**), ρίχνετε τις σφαίρες μέσα στο υγρό μετρώντας με χρονόμετρο το χρόνο για να περάσουν μεταξύ των δύο μαύρων αυτοκόλλητων ταινιών στον σωλήνα και καταχωρείστε τις μετρήσεις στον πίνακα 3.

8. Υπολογίστε τις οριακές ταχύτητες από την σχέση $\upsilon_{\text{ορ}} = L/t$ και από αυτές την μέση οριακή ταχύτητα $\bar{\upsilon}_{\text{ορ}}$ και καταχωρείστε τις τιμές στον πίνακα 3.

8. Υπολογίστε από την εξ. (8.7) τον αδιάστατο συντελεστή Λ χρησιμοποιώντας την μέση ακτίνα των σφαιρών.

Λ=…………………

9.Υπολογίστε από την σχέση (8.6) τον συντελεστή εσωτερικής τριβής (σε Poisse) χρησιμοποιώντας την μέση οριακή ταχύτητα.

$\eta =$ ....Poisse

10. Υπολογίστε τον συντελεστή εσωτερικής τριβής στο S.I. (σε $Pa \cdot s$) και καταχωρείστε την τιμή στον Πίνακα 3.

η=…………… $Pa \cdot s$

11. Ρωτείστε τον υπεύθυνο καθηγητή ποιο είναι το υγρό του σωλήνα και συγκρίνετε την τιμή που βρήκατε με αυτή της βιβλιογραφίας.

Πίνακας 3

Α/Α	Διάμετρος σφαίρας d cm	Μέση διάμετρος σφαίρας $\bar{d}$ cm	Χρόνος πτώσης t_i s	Οριακή ταχύτητα $\upsilon^i_{\text{ορ}}$ cm/s	Μέση οριακή ταχύτητα $\bar{\upsilon}_{\text{ορ}}$ cm/s	Συντελεστής εσωτερικής τριβής η $Pa \cdot s$