- Έστω η συνάρτηση ζήτησης (Q) ενός αγαθού ως προς την τιμή (P): $Q = 40 - 2P - P^2$. Να βρεθεί (α) η ελαστικότητα ζήτησης ως προς την τιμή αν $P = 4$, (β) η οριακή πρόσοδος για $P = 4$ και (γ) αν ελαστικότητα ζήτησης είναι $\varepsilon = -1$, τότε ποια θα είναι η τιμή και η αντίστοιχη ποσότητα;

Λύση:
(α) Η ελαστικότητα ζήτησης ενός αγαθού ως προς την τιμή προκύπτει από την εφαρμογή της παρακάτω σχέσης $\varepsilon = \frac{dQ}{dP}\frac{P}{Q}$. Από την παράγωγο της συνάρτησης ζήτησης ως προς P, προκύπτει ότι $\frac{dQ}{dP} = -2 - 2P$. Η αντικατάσταση του αποτελέσματος αυτού στο τύπο της ελαστικότητας έχει ως αποτέλεσμα $\varepsilon = (-2-2P)\cdot\frac{P}{(40-2P-P^2)}$. Δοθέντος ότι $P = 4$, τότε η ελαστικότητα ως προς την τιμή διαμορφώνεται σε $\varepsilon = -2{,}5$.
(β) Δεδομένου ότι η συνάρτηση συνολικής προσόδου είναι $R = P\cdot Q$, τότε η συνάρτηση οριακής προσόδου προκύπτει από την παράγωγο της συνάρτησης ως προς Q, ήτοι $MR = \frac{dR}{dQ} = \frac{d}{dQ}(P\cdot Q) = P\frac{dQ}{DQ} + Q\frac{dP}{dQ} = P\left(1 + \frac{dP}{dQ}\cdot\frac{Q}{P}\right)$, σχέση η οποία γράφεται ως $MR = P\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)$. Δεδομένου ότι για την τιμή $P = 4$ αντιστοιχεί ελαστικότητα ζήτησης $\varepsilon = -2{,}5$, τότε $MR = 4\left(1+\frac{1}{-2{,}5}\right) = 2{,}4$.
(γ) Η ελαστικότητα είναι δυνατόν να εκφρασθεί και ως συνάρτηση της τιμής, ήτοι $\varepsilon = \frac{(-2-2P)P}{(40-2P-P^2)}$. Θέτοντας $\varepsilon = -1$, τότε $-1 = \frac{(-2-2P)P}{(40-2P-P^2)}$, από όπου προκύπτει ότι $-(2+2P)P = (40-2P-P^2)$ και συνεπώς, $2P^2 + 4P - 40 = 0$. Η σχέση αυτή είναι μια εξίσωση 2ου βαθμού. Λύνοντας ως προς P και εφαρμόζοντας τον τύπο τριωνύμου, τότε $P = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4\cdot 3\cdot(-40)}}{2\cdot 3}$, από όπου προκύπτουν δύο εναλλακτικές λύσεις: $P_1 = 3$ και $P_2 = -4{,}4$. Δοθέντος ότι ‘αρνητική τιμή’ δεν ορίζεται, τότε με αντικατάσταση της τιμής $P_1 = 3$ στην αρχική συνάρτηση ζήτησης, προκύπτει ότι $Q = 24{,}6$. Συμπερασματικά, η ποσότητα και η τιμή, οι οποίες αντιστοιχούν στην ελαστικότητα $\varepsilon = -1$ είναι, αντίστοιχα, $Q \approx 25$ και $P = 3$.

- (α) Ποια σχέση υφίσταται μεταξύ μέσου και οριακού κόστους; (β) Έστω η συνάρτηση συνολικού κόστους: $C(Q) = Q^3 - 4Q^2 + 8Q + 50$. Ποια σχέση υφίσταται μεταξύ μέσου κόστους και οριακού κόστους;

Λύση:
(α) Η συνάρτηση μέσου κόστους προκύπτει από την συνάρτηση συνολικού κόστους. Έτσι, $C = C(Q)$, από όπου διαιρώντας με Q προκύπτει η συνάρτηση μέσου

κόστους, ήτοι $AC = \frac{C(Q)}{Q}$. Η συνάρτηση του οριακού κόστους γράφεται ως εξής: $MC = \frac{dC(Q)}{dQ} = C'(Q)$. Η παράγωγος της συνάρτησης μέσου κόστους ως προς Q είναι $\frac{dAC}{dQ} = \frac{d}{dQ}\left[\frac{C(Q)}{Q}\right]$, από όπου με την χρήση του κανόνα παραγώγου πηλίκου, προκύπτει ότι $\frac{C'(Q)\cdot Q - C(Q)\cdot 1}{Q^2} = \frac{1}{Q}\left[C'(Q) - \frac{C(Q)}{Q}\right]$, από όπου προκύπτει η παρακάτω σχέση: $\frac{dAC}{dQ} = \frac{1}{Q}(MC - AC)$.

(β) Η συνάρτηση μέσου και οριακού κόστους είναι $AC = \frac{C(Q)}{Q}$ και $MC = \frac{dC(Q)}{dQ}$, αντίστοιχα, από όπου προκύπτει ότι $AC = Q^2 - 4Q + 8 + \frac{50}{Q}$ και $MC = 3Q^2 - 8Q + 8$.
Από την συνάρτηση μέσου κόστους προκύπτει η παρακάτω σχέση:
$\frac{dAC}{dQ} = 2Q - 4 + \frac{0\cdot Q - 50\cdot 1}{Q^2} = 2Q - 4 - \frac{50}{Q^2}$.

- Η συνάρτηση προσφοράς και ζήτησης ενός προϊόντος είναι αντίστοιχα: $Q^{\pi} = -\gamma + \delta P$ και $Q^{\zeta} = a - \beta P$, όπου Q είναι η αντίστοιχη ποσότητα και P η τιμή του προϊόντος. Οι τιμές των παραμέτρων α, β, γ και δ λαμβάνουν θετικές τιμές, ήτοι ($\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$). Να αναλυθεί η επίδραση μιας μεταβολής στις παραμέτρους στην τιμή και την ποσότητας ισορροπίας στην αγορά του προϊόντος.

Λύση:
Η συνάρτηση ζήτησης μπορεί να γραφεί ως εξής: $a - \beta P = Q^{\zeta}$. Λύνοντας την εν λόγω εξίσωση ως προς P προκύπτει η σχέση $P = \frac{a - Q^{\zeta}}{\beta}$, η οποία εκφράζει την τιμή ως συνάρτηση της ζητούμενης ποσότητας. Αντικαθιστώντας την συνάρτηση προσφοράς στην παραπάνω σχέση, προκύπτει ότι η τιμή ισορροπίας είναι $P^* = \frac{a + \gamma}{\beta + \delta}$. Κατόπιν, με την σχέση αυτή προσδιορίζεται η ποσότητα ισορροπίας. Συγκεκριμένα, αντικαθιστώντας την τιμή ισορροπίας P^* στην συνάρτηση προσφοράς προκύπτει ότι $Q^* = \frac{\delta a - \beta\gamma}{\beta + \delta}$. Οι μεταβολές στην τιμή και την ποσότητα ισορροπίας προκύπτουν από τις μερικές παραγώγους των αντίστοιχων συναρτήσεων, ήτοι $\frac{\partial P^*}{\partial i}$ και $\frac{\partial Q^*}{\partial i}$, όπου $i = \alpha, \beta, \gamma, \delta$. Συγκεκριμένα, οι μερικές παράγωγοι της τιμής ως προς τις παραμέτρους είναι:

$$\frac{\partial P^*}{\partial \alpha} = \frac{1}{\beta + \delta} > 0, \quad \frac{\partial P^*}{\partial \beta} = \frac{0(\beta+\delta) - (\alpha+\gamma)1}{(\beta+\delta)^2} = \frac{-(\alpha+\gamma)}{(\beta+\delta)^2} < 0$$

$$\frac{\partial P^*}{\partial \gamma} = \frac{1}{\beta + \delta} > 0$$

$$\frac{\partial P^*}{\partial \delta} = \frac{0(\beta+\delta) - (\alpha+\gamma)1}{(\beta+\delta)^2} = \frac{-(\alpha+\gamma)}{(\beta+\delta)^2} < 0$$

Αντίστοιχα, οι μεταβολές της ποσότητας που προκύπτουν από τις μεταβολές των παραμέτρων του υποδείγματος, υπολογίζονται ως εξής:

$$\frac{\partial Q^*}{\partial \alpha} = \frac{\delta}{\beta + \delta} > 0$$

$$\frac{\partial Q^*}{\partial \beta} = \frac{-\gamma(\beta+\delta) - (\alpha\delta - \beta\gamma)1}{(\beta+\delta)^2} = \frac{-\delta(\alpha+\gamma)}{(\beta+\delta)^2} < 0$$

$$\frac{\partial Q^*}{\partial \gamma} = \frac{-\beta}{\beta + \delta} < 0$$

$$\frac{\partial Q^*}{\partial \delta} = \frac{\alpha(\beta+\delta) - (\alpha\delta - \beta\gamma)1}{(\beta+\delta)^2} = \frac{\beta(\alpha+\gamma)}{(\beta+\delta)^2} > 0$$

- Δίδεται η συνάρτηση παραγωγής: $Q = Q(K,L) = 100K \cdot L - 2K^2 - 4L^2$, όπου K και L είναι αντίστοιχα ο συντελεστής κεφάλαιο και εργασία, η εξέλιξη των οποίων στην διαδρομή του χρόνου (t) ακολουθεί τις παρακάτω σχέσεις: $K(t) = 0{,}5t$ και $L(t) = 0{,}1t$. Ποιος είναι ο ρυθμός αύξησης της παραγωγής διαχρονικά;

Λύση:

Ο ρυθμός αύξησης της παραγωγής προκύπτει από την σχέση $\dfrac{dQ}{dt}$, η οποία προκύπτει από την ολική παράγωγο της συνάρτησης παραγωγής ως προς τον χρόνο (t), ήτοι $\dfrac{dQ}{dt} = \dfrac{\partial Q}{\partial K}\dfrac{dK}{dT} + \dfrac{\partial Q}{\partial L}\dfrac{dL}{dt}$, από την οποία με αντικατάσταση προκύπτει ότι

$(100L - 4K) \cdot 0{,}5 + (100K - 8L) \cdot 0{,}1 = (100 \cdot 0{,}1t - 4 \cdot 0{,}5t)0{,}5 + (100 \cdot 0{,}5t - 8 \cdot 0{,}1t)0.1$,

συνεπώς $4t + 4{,}9t = 8{,}92t$

- Έστω ότι η συνάρτηση παραγωγής ενός προϊόντος είναι τύπου Cobb-Douglas και προσδιορίζεται ως εξής: $Q = AK^aL^b$, όπου K και L είναι αντίστοιχα ο συντελεστής κεφάλαιο και εργασία και A μια σταθερά. (α) να προσδιοριστούν οι οριακές παραγωγικότητες του κεφαλαίου και της εργασίας (β) να προσδιορισθούν οι ελαστικότητας του κεφαλαίου και της εργασίας

Λύση:

(α) Η οριακή παραγωγικότητα του κεφαλαίου προσδιορίζεται από την μερική παράγωγο της συνάρτησης ως προς τον εν λόγω συντελεστή, ήτοι

$$MP_K = \frac{\partial Q}{\partial K} = \frac{\partial}{\partial K}(AK^aL^b) = AaK^{a-1}L^b = a\frac{AK^{a-1}L^bK}{K} = a\frac{Q}{K}$$

Αντιστοίχως προκύπτει και η οριακή παραγωγικότητα της εργασίας. Συγκεκριμένα,

$$MP_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{\partial}{\partial L}(AK^a L^b) = AaK^a L^{b-1} = b\frac{AK^a L^{b-1} L}{L} = b\frac{Q}{L}$$

(β) Η ελαστικότητα του προϊόντος ως προς τον συντελεστή κεφάλαιο δίδεται από την σχέση: $\varepsilon_K = \frac{\partial Q}{\partial K}\frac{K}{Q}$. Κατόπιν αντικαταστάσεως της οριακής παραγωγικότητας προκύπτει ότι $\varepsilon_K = \alpha\frac{Q}{K}\frac{K}{Q} = \alpha$. Με παρόμοια διαδικασία προσδιορίζεται η ελαστικότητα του συντελεστού εργασίας. Συγκεκριμένα, δεδομένου ότι $\varepsilon_L = \frac{\partial Q}{\partial L}\frac{L}{Q}$, η αντικατάσταση της οριακής παραγωγικότητας της εργασίας στην αντίστοιχη σχέση της ελαστικότητας του συντελεστού έχει ως συνέπεια $\varepsilon_K = \frac{Q}{L}\frac{L}{Q} = b$.

- Δίδεται η συνάρτηση παραγωγής τύπου Cobb-Douglas: $Q = 4K^{0,75}L^{0,25}$. (α) Έστω ότι $K = 10.000$ και $L = 625$. Να προσδιοριστεί η ποσότητα παραγωγής (β) να υπολογισθούν τα οριακά προϊόντα των δύο συντελεστών παραγωγής για τις αντίστοιχες ποσότητες των συντελεστών (γ) εάν η εργασία παραμείνει σταθερή και το κεφάλαιο αυξηθεί κατά 10 μονάδες ποίο θα είναι το νέο επίπεδο παραγωγής; (δ) εάν η εργασία μειωθεί κατά δύο μονάδες ενώ ο συντελεστής κεφάλαιο παραμείνει σταθερός ποιο θα είναι τότε το επίπεδο παραγωγής;

Λύση:

(α) $Q = 4\cdot 10.000^{0,75}625^{0,25} = 4\cdot 10^3\cdot 5 = 20.000$

(β) $\frac{\partial Q}{\partial K} = (4\cdot L^{0,25})(0,75K^{-0,25}) = 3L^{0.25}K^{-0.25}$ και $\frac{\partial Q}{\partial L} = (4\cdot K^{0,75})(0,25L^{-0,75}) = L^{-0.25}K^{0.75}$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των δύο συντελεστών προκύπτει ότι $\frac{\partial Q}{\partial K} = 1{,}5$ και $\frac{\partial Q}{\partial L} = 8$

(γ) Η μεταβολή στην παραγωγή προκύπτει από τον τύπο $1{,}5\cdot\Delta K$, όπου ΔK είναι η μεταβολή στον συντελεστή κεφάλαιο. Συνεπώς $20.000 + 1{,}5\cdot 10 = 20.015$

(δ) Μία μεταβολή στην εργασία κατά δύο μονάδες θα επιφέρει μείωση της παραγωγής ίση με $20.000 + 8\cdot(-2) = 19.984$

- Δίδεται η συνάρτηση κατανάλωσης $C = \alpha + \beta Y$, όπου Y είναι το εισόδημα και $\alpha > 0$, $0 < \beta < 1$ παράμετροι. (α) Να προσδιορισθούν οι συναρτήσεις μέσης και οριακής κατανάλωσης, (β) Ποια είναι η ελαστικότητα κατανάλωσης ως προς το εισόδημα; Τι πρόσημο θα έχει η ελαστικότητα βάση των πρόσημων των παραμέτρων α και β; (γ) Να αποδειχθεί ότι αυτή η συνάρτηση κατανάλωσης είναι ανελαστική και (δ) Ποια η ερμηνεία των παραμέτρων α και β; Τι σημαίνει το πρόσημο του καθενός;

Λύση:

(α) Η συνάρτηση της μέσης κατανάλωσης είναι $AC = \frac{C}{Y} = \frac{\alpha + \beta Y}{Y} = \frac{\alpha}{Y} + \beta$. Η συνάρτηση της οριακής κατανάλωσης προκύπτει από την παράγωγο της συνάρτησης κατανάλωσης ως προς το εισόδημα: $MC = \frac{dC}{dY} = \frac{d}{Y}(\alpha + \beta Y) = \beta$.

(β) Η ελαστικότητα κατανάλωσης ως προς το εισόδημα προκύπτει από την παρακάτω σχέση: $\varepsilon_C = \frac{dQ}{dP}\frac{Y}{C} = \frac{MC}{AC}$. Κατόπιν αντικαταστάσεως προκύπτει ότι $\varepsilon_C = \frac{\beta}{(\alpha / \mathrm{Y}) + \beta}$, σχέση η οποία είναι πάντα θετική, δεδομένων των πρόσημων των παραμέτρων.

(γ) Διαιρώντας τον αριθμητή και τον παρονομαστή στον τύπο της ελαστικότητας προκύπτει ότι $\varepsilon_C = \frac{1}{(\alpha / \beta \mathrm{Y}) + 1}$ όπου ο όρος $\alpha / \beta \mathrm{Y}$ είναι πάντοτε θετικός και μεγαλύτερος από την μονάδα, από όπου συνάγεται το συμπέρασμα ότι $0 < \varepsilon_C < 1$. Με άλλα λόγια η κατανάλωση είναι ανελαστική για κάθε επίπεδο εισοδήματος.

(δ) α : αυτόνομη κατανάλωση, β οριακή ροπή προς κατανάλωση.

- Μία οικονομία χαρακτηρίζεται από τις εξής σχέσεις: (i) εισοδηματική ‘ταυτότητα’ $Y = C + I_0 + G_0$, (ii) συνάρτηση κατανάλωσης $C = \alpha + \beta(Y - T)$ και (iii) συνάρτηση φορολογίας $T = \gamma + \delta Y$, όπου Y, C, I_0, G_0 και T είναι το εισόδημα, η κατανάλωση, η επένδυση οι δημόσιες δαπάνες και οι φόροι, αντίστοιχα. Οι παράμετροι του εν λόγω υποδείγματος λαμβάνουν τιμές οι οποίες είναι $\alpha > 0, 0 < \beta < 1, \ \gamma > 0, 0 < \delta < 1$. Αν οι δημόσιες δαπάνες και η επένδυση θεωρηθούν ως ‘αυτόνομα’, δηλαδή ανεξάρτητα από το εισόδημα, να υπολογισθούν οι πολλαπλασιαστές των επενδύσεων, των δημοσίων δαπανών, του συντελεστού αυτόνομης φορολογίας (γ) και του συντελεστή φορολογίας εισοδήματος (δ).

Λύση:
Αντικαθιστώντας την συνάρτηση κατανάλωσης και την συνάρτηση φορολογίας στην εξίσωση εισοδήματος προκύπτει το εισόδημα ισορροπίας, ήτοι $Y^* = \frac{\alpha - \beta\gamma + I_0 + G_0}{1 - \beta + \beta\delta}$.

Οι ζητούμενοι πολλαπλασιαστές προκύπτουν από την παράγωγο της ανωτέρω συνάρτησης ως προς τις αντίστοιχες μεταβλητές. Συγκεκριμένα,

$$\frac{\partial Y^*}{\partial I_0} = \frac{1}{1 - \beta + \beta\delta} > 0, \quad \frac{\partial Y^*}{\partial G_0} = \frac{1}{1 - \beta + \beta\delta} > 0, \quad \frac{\partial Y^*}{\partial \gamma} = \frac{-\beta}{1 - \beta + \beta\delta} < 0,$$

$$\frac{\partial Y^*}{\partial \delta} = \frac{0(1 - \beta + \beta\delta) - (\alpha - \beta\gamma + I_0 + G_0)\beta}{(1 - \beta + \beta\delta)^2} = \frac{-\beta Y^*}{(1 - \beta + \beta\delta)^2} < 0$$

- Η συνάρτηση ζήτησης και προσφοράς ενός προϊόντος είναι αντίστοιχα: $Q^\zeta = 4 - P + 0.01Y_0$ και $Q^\pi = -1 + 4P$, όπου Q είναι η αντίστοιχη ποσότητα, P η τιμή του προϊόντος και Y_0 το αυτόνομο εισόδημα. Να ευρεθεί ο βαθμός στον οποίο θα μεταβληθούν η τιμή και η ποσότητα ισορροπίας, αν το εισόδημα μεταβληθεί κατά 1.000 μονάδες.

Λύση:
Το υπόδειγμα περιλαμβάνει δύο πεπλεγμένες συναρτήσεις, οι οποίες εξισώνονται με το μηδέν: $F_1(Q^{\zeta}, P, Y_0) = Q^{\zeta} - 4 + P - 0.01Y_0 = 0$ και $F_2(Q^{\pi}, P, Y_0) = Q^{\pi} - +1 - 4P = 0$

Στις ανωτέρω συναρτήσεις Q και P είναι αντίστοιχα ενδογενείς μεταβλητές και Y_0 η εξωγενής μεταβλητή. Η ορίζουσα του Jacobi για το εν λόγω σύστημα υπολογίζεται ως εξής:

$$|J| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial Q^{\zeta}} & \dfrac{\partial F_1}{\partial P} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial Q^{\pi}} & \dfrac{\partial F_2}{\partial P} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -4 - 1 = -5 .$$ Άρα $|J| \neq 0$.

Συνεπώς προκύπτει το σύστημα:

$$[J] \begin{bmatrix} \dfrac{dQ^*}{dY_0} \\ \dfrac{dP^*}{dY_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{\partial F_1}{\partial Y_0} \\ -\dfrac{\partial F_2}{\partial Y_0} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{dQ^*}{dY_0} \\ \dfrac{dP^*}{dY_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}01 \\ 0 \end{bmatrix}$$, όπου P^* και Q^* είναι η τιμή και η ποσότητα ισορροπίας στην αγορά.

Επιλύοντας το ανωτέρω σύστημα προκύπτει ότι

$$\frac{dQ^*}{dY_0} = \frac{\begin{vmatrix} 0.01 & 1 \\ 0 & -4 \end{vmatrix}}{|J|} = \frac{-0.04}{-5} = 0.008 \text{ και } \frac{dP^*}{dY_0} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0.01 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{|J|} = \frac{-0.01}{-5} = 0.002$$

Σε γενικούς όρους ισχύει $\Delta Q^* = 0.008\Delta Y_0$ και $\Delta P^* = 0.002\Delta Y_0$. Δεδομένου ότι $\Delta Y_0 = 1.000$ προκύπτει ότι η ποσότητα ισορροπίας θα αυξηθεί κατά $\Delta Q^* = 0.008 \cdot 1.000 = 8$ και η αντίστοιχη τιμή κατά $\Delta P^* = 0.002 \cdot 1.000 = 2$.

- Δίδεται η συνάρτηση προσόδου μιας επιχείρησης $R(Q) = 1.500Q - 2Q^2$ και η συνάρτηση κόστους $C(Q) = Q^3 - 30Q + 1.400Q + 100$, όπου Q είναι η παραγόμενη ποσότητα. Να προσδιορισθεί το επίπεδο παραγωγής, το οποίο μεγιστοποιεί τα κέρδη της επιχείρησης.

Λύση:
Η συνάρτηση κέρδους ορίζεται ως εξής: $\pi(Q) = R(Q) - CQ$, η οποία κατόπιν αντικαταστάσεως των αντίστοιχων συναρτήσεων διαμορφώνεται ως εξής:

$$\pi(Q) = 1500Q - 2Q^2 - Q^3 + 30Q^2 - 1400Q - 100 = -Q^3 + 28Q^2 - 100Q - 100$$

Η ποσότητα μεγιστοποίησης των κερδών προκύπτει από τις πρώτες και δεύτερες συνθήκες ακρότατων της συνάρτησης. Συγκεκριμένα, οι συνθήκες πρώτης τάξεως είναι $\pi' = \dfrac{d\pi(Q)}{dQ} = -3Q^2 + 56Q - 100 = 0$. Η πρώτη παράγωγος μηδενίζεται για τις τιμές $Q_{1,2}=\dfrac{-56\pm\sqrt{56^2-4\cdot(-3)\cdot(-100)}}{2\cdot(-3)}=\dfrac{-56\pm 44}{-6}$. Έτσι, προκύπτουν δύο ποσότητες, ήτοι $Q_1=17$ και $Q_1=2$. Οι συνθήκες δευτέρας τάξεως ορίζονται ως εξής: $\pi''=\dfrac{d^2\pi(Q)}{dQ^2}=-6Q+56$. Αντικαθιστώντας την ποσότητα $Q_1=17$ στην δεύτερη παράγωγο προκύπτει ότι $\pi''=-6\cdot 17+56=-44{,}2$, δηλαδή $\pi''<0$ ενώ για την ποσότητα $Q_1=2$, $\pi''=-6\cdot 2+56=44$, ήτοι $\pi''>0$. Δεδομένου ότι η ποσότητα που μεγιστοποιεί την συνάρτηση κέρδους είναι εκείνη για την οποία ισχύει $\pi'=0$ και $\pi''<0$, τότε η ζητούμενη ποσότητα είναι $Q_1=17$.

- Έστω η συνάρτηση παραγωγής $Q=L^2+5L\cdot K-4K^2$, όπου Q το επίπεδο παραγωγής, L και K οι χρησιμοποιούμενες ποσότητες εργασίας και κεφαλαίου. Αν οι τιμές της εργασίας και του κεφαλαίου είναι $P_L=2$ και $P_K=3$, αντίστοιχα, τότε να προσδιορισθούν οι ποσότητες L και K, οι οποίες πρέπει να χρησιμοποιηθούν ώστε το συνολικό κόστος παραγωγής (C) να είναι και 74.

Λύση:
Αυτό είναι ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης με δεδομένο τον περιορισμό κόστους, ήτοι $C=P_L L+P_K K$, ο οποίος εν προκειμένω είναι $2L+3K=74$. Η συνάρτηση του Lagrange προσδιορίζεται ως εξής: $F=L^2+5L\cdot K-4K^2+\lambda(74-2L-3K)$, με τις συνθήκες πρώτης τάξεως $\dfrac{\partial F}{\partial\lambda}=74-2L-3K$, $\dfrac{\partial F}{\partial K}=5L-8K-3\lambda$ και $\dfrac{\partial F}{\partial L}=2L+5K-2\lambda$.

Με τον μηδενισμό των παραγώγων προκύπτει το σύστημα:

$$\begin{array}{lcl} 74-2L-3K=0 & & -2L-3K+0\lambda=-74 \\ 5L-8K-3\lambda=0 & \text{ή} & 5L-8K-3\lambda=0 \\ 2L+5K-2\lambda=0 & & 2L+5K-2\lambda=0 \end{array}$$

Η λύση του συστήματος αυτού προσδιορίζεται ως εξής:

$$L^*=\frac{\begin{vmatrix}-74 & -3 & 0\\ 0 & -8 & -3\\ 0 & 5 & -2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-2 & -3 & 0\\ 5 & -8 & -3\\ 2 & 5 & -2\end{vmatrix}}=\frac{(-74)\begin{vmatrix}-8 & -3\\ 5 & 2\end{vmatrix}}{-2\begin{vmatrix}-8 & -3\\ 5 & -2\end{vmatrix}-(-3)\begin{vmatrix}5 & -3\\ 2 & -2\end{vmatrix}}=\frac{-2294}{-74}=31$$

$$K^*=\frac{\begin{vmatrix}-2 & -74 & 0\\ 5 & 0 & -3\\ 2 & 0 & -2\end{vmatrix}}{-74}=\frac{-(-74)\begin{vmatrix}5 & -3\\ 2 & -2\end{vmatrix}}{-74}=\frac{-296}{-74}=4$$

$$\lambda^* = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -3 & -74 \\ 5 & -8 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \end{vmatrix}}{-74} = \frac{(-74)\begin{vmatrix} 5 & -8 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}}{-74} = \frac{-3031}{-74} = 41$$

Για τον προσδιορισμό των συνθηκών δευτέρας τάξεως χρησιμοποιείται η περιορισμένη ορίζουσα του Hesse, ήτοι $|\overline{H}| = \begin{bmatrix} 0 & c_K & c_L \\ c_K & F_{KK} & F_{KL} \\ c_L & F_{LK} & F_{LL} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 3 & -8 & 5 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix}$, όπου $c_i = \dfrac{\partial C}{\partial i}$, $F_{ij} = \dfrac{\partial F}{\partial i \partial j}$ και $F_{ii} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial i^2}$. Η περιορισμένη κύρια ελάσσονα ορίζουσα είναι

$$|\overline{H}_2| = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 3 & -8 & 5 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix} = |H| = -3\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -8 & 5 \end{vmatrix} = -3(6-10) + 2(15+16) = 74.$$

Δεδομένου ότι η μοναδική κύρια ελάσσονα είναι θετική, συνεπάγεται ότι η λύση $L^* = 31$ και $K^* = 4$ μεγιστοποιεί την παραγωγή, για κόστος 74.

- Έστω η συνάρτηση συνολικού κόστους $C = f(x, y) = x^2 + 2y^2 - xy$, όπου x και y είναι δύο διαφορετικά προϊόντα. Πόσα μονάδες x και y πρέπει να παραχθούν ώστε η συνολική παραγωγή να ανέλθει σε 8 μονάδες;

Λύση:
Αυτό είναι ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης του κόστους, υπό τον περιορισμό $g = x + y = 8$. Η συνάρτηση του Lagrange προσδιορίζεται ως εξής: $F = x^2 + 2y^2 + xy + \lambda(8 - x - y)$, με τις συνθήκες πρώτης τάξεως $\dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = 8 - x - y$, $\dfrac{\partial F}{\partial x} = 2x - y - \lambda$ και $\dfrac{\partial F}{\partial y} = 4y - x - \lambda$.

Με τον μηδενισμό των παραγώγων προκύπτει το σύστημα:

$$\begin{aligned} 8 - x - y &= 0 \\ 2x - y - \lambda &= 0 \\ 4y - x - \lambda &= 0 \end{aligned} \quad \text{ή} \quad \begin{aligned} -x - y + 0\lambda &= -8 \\ 2x - y - \lambda &= 0 \\ -x + 4y - \lambda &= 0 \end{aligned}$$

Η λύση του συστήματος αυτού προσδιορίζεται ως εξής:

$$x^* = \frac{\begin{vmatrix} -8 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{(-8)\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}}{-\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-40}{-8} = 5$$

$$K^* = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -8 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{-8} = \frac{-(-8)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}}{-8} = \frac{-24}{-8} = 3$$

$$\lambda^* = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -1 & -8 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{vmatrix}}{-8} = \frac{(-8)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}}{-8} = \frac{-56}{-8} = 7$$

Για τον προσδιορισμό των συνθηκών δευτέρας τάξεως χρησιμοποιείται η περιορισμένη ορίζουσα του Hesse, ήτοι $|\overline{H}| = \begin{bmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & F_{xx} & F_{xy} \\ g_y & F_{yx} & F_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$, όπου $g_i = \dfrac{\partial g}{\partial i}$, $F_{ij} = \dfrac{\partial F}{\partial i \partial j}$ και $F_{ii} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial i^2}$. Η περιορισμένη κύρια ελάσσονα ορίζουσα είναι

$$|\overline{H}_2| = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} = |H| = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -4(4+1) + (-1-2) = -8.$$

Δεδομένου ότι η μοναδική κύρια ελάσσονα είναι αρνητική, συνεπάγεται ότι η λύση $x^* = 5$ και $y^* = 3$ ελαχιστοποιεί το κόστος, το οποίο είναι απαραίτητο για την παραγωγή 8 μονάδων των προϊόντων x και y.

Το ‘Νεκρό’ Σημείο (Break-even Point): Μια μέθοδος ανάλυσης & ένα εργαλείο λήψης αποφάσεων

Εισαγωγή

Το ‘Νεκρό Σημείο’ (break-even point) είναι μια έννοια, η οποία ουσιαστικά αντικατοπτρίζει μια ‘κατάσταση’, στην οποία η επιχειρηματική μονάδα (μια εταιρεία ή μια ατομική επιχείρηση) δεν πραγματοποιεί κανένα αποτέλεσμα. Με άλλα λόγια, το ‘Νεκρό Σημείο’ δείχνει εκείνο το επίπεδο δραστηριότητας (πωλήσεις ή κύκλο εργασιών, όγκος παραγωγής), στο οποίο η επιχειρηματική μονάδα καλύπτει το σύνολο των δαπανών της. Ευνόητο είναι ότι στο επίπεδο αυτό μια επιχειρηματική μονάδα δεν πραγματοποιεί ούτε κέρδος ούτε ζημιά, ήτοι το σύνολο των πωλήσεων είναι ακριβώς ίσο με το σύνολο των δαπανών (εξόδων). Φυσικά, πέρα από αυτό το επίπεδο, δηλαδή αν η επιχειρηματική μονάδα πραγματοποιήσει περισσότερες πωλήσεις, θα έχει κέρδη και αντίστροφα, ήτοι αν οι πωλήσεις βρίσκονται κάτω από το επίπεδο του ‘Νεκρού Σημείου’, τότε η επιχειρηματική μονάδα αντιμετωπίζει ζημίες. Το ‘Νεκρό Σημείο’ προκύπτει από μια σειρά λογικών ‘προτάσεων’ και είναι ένα απλό και κατανοητό ‘εργαλείο’, η εφαρμογή και μελέτη του οποίου δύναται να βοηθήσει σε σημαντικό βαθμό μια επιχείρηση στην λήψη ορθολογικών αποφάσεων σε ένα πλήθος από ζητήματα (π.χ. τιμολόγηση προϊόντων, διαχείριση εξόδιων, κ.α.). Η συγκεκριμένη έννοια αποτελεί και μια μέθοδο για ορθό προγραμματισμό στα πλαίσια της επιχειρηματικής μονάδος. Για παράδειγμα, έστω ότι μια επιχείρηση σχεδιάζει την είσοδο της σε μια νέα αγορά και προκειμένου το προϊόν της να είναι ανταγωνιστικό αποφασίζεται η μείωση της τιμής πώλησης. Τότε θα πρέπει να προσδιορισθεί το επίπεδο μείωσης των εσόδων, ώστε το συγκεκριμένο εγχείρημα να μην αποτελέσει μια αιτία ζημιών στην επιχείρηση. Στην περίπτωση αυτή, με την ανάλυση 'Νεκρού Σημείου' καθίσταται εφικτός ο προσδιορισμός του επιπέδου εκείνου των εσόδων, που μπορεί να μειωθεί, χωρίς αυτή η μείωση να είναι ζημιογόνα. Το 'Νεκρό Σημείο' είναι δυνατόν να εκφρασθεί με πολλές μορφές. Για παράδειγμα, το 'Νεκρό Σημείο' εκφράζεται είτε σε όρους χρηματικής αξίας είτε σε ποσοτικούς όρους. Στην πρώτη περίπτωση το 'Νεκρό Σημείο' φανερώνει πόση είναι η χρηματική αξία των πωλήσεων που πρέπει να πραγματοποιήσει μια επιχειρηματική μονάδα ώστε να μην έχει ούτε κέρδος ούτε ζημία, ενώ στην δεύτερη περίπτωση με το 'Νεκρό Σημείο' υπολογίζεται ο όγκος της παραγωγής (είτε ως παραγόμενα τεμάχια είτε ως ποσοστό) ο οποίος είναι απαραίτητος για να εξισώσει τα έσοδα με τα έξοδα. Μια άλλη μορφή στην οποία εκφράζεται το 'Νεκρό Σημείο' είναι ως ο απαιτούμενος χρόνος ώστε η επιχείρηση να φτάσει σε σημείο τα έσοδα πωλήσεων να καλύψουν τα συνολικά έξοδα.

Μαθηματικός Προσδιορισμός του 'Νεκρού Σημείου'

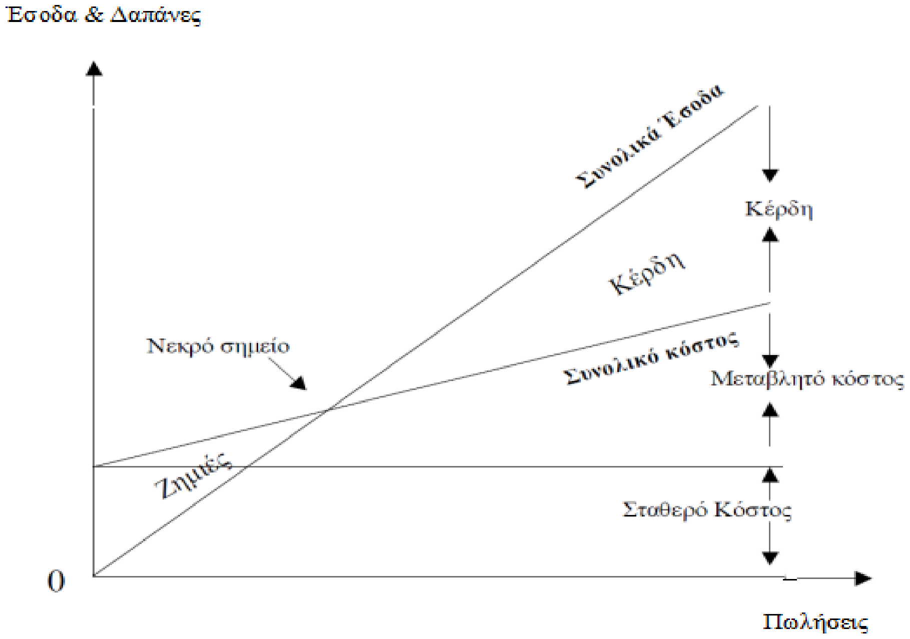
Το υπόδειγμα του 'Νεκρού Σημείου' είναι ένα απλό υπόδειγμα και θεμελιώνεται πάνω σε μια σειρά μαθηματικών σχέσεων. Οι σχέσεις αυτές (προτάσεις) είναι λογικές και, σε σημαντικό βαθμό, απεικονίζουν την υφιστάμενη πραγματικότητα. Συγκεκριμένα, η βασική σχέση για τον υπολογισμό του 'Νεκρού Σημείου' απεικονίζει την παραδοχή ότι στο 'Νεκρό σημείο' υπάρχει ισότητα των συνολικών εσόδων-πωλήσεων (TR) και των συνολικών εξόδων-κόστους (TC): $TR = TC$. Ευνόητο είναι το γεγονός, ότι σύμφωνα με αυτή την ταυτότητα το ύψος των συνολικών εσόδων καλύπτει επακριβώς τα συνολικά έξοδα και, κατά συνέπεια δεν υπάρχουν κέρδη. Τα συνολικά έσοδα της επιχείρησης υπολογίζονται ως οι πωληθείσες μονάδες (Q) επί την τιμή πώλησης (p), είναι δηλαδή το γινόμενο $TR = p \cdot Q$. Οπότε, $p \cdot Q = TC$. Μια βασική υπόθεση στην ανάλυση του 'Νεκρού Σημείου' είναι το ότι μεταξύ του συνολικού κόστους και εσόδων υφίσταται μια γραμμική σχέση, τουλάχιστο για ένα δεδομένο επίπεδο (όγκο ή εύρος) παραγωγής καθώς και ότι τα συνολικά (λειτουργικά) έξοδα διακρίνονται σε δύο ομάδες, τα σταθερά (FC) και τα μεταβλητά έξοδα (VC), ήτοι $TC = FC + VC$. Με βάση την υπόθεση αυτή ο τύπος υπολογισμού του 'Νεκρού Σημείου' μετασχηματίζεται ως εξής: $p \cdot Q = FC + VC$. Στο σημείο αυτό είναι απαραίτητος ο εννοιολογικός προσδιορισμός των σταθερών και μεταβλητών εξόδων. Ο διαχωρισμός αυτός των εξόδων είναι βασικό στοιχείο για την κατανόηση της ανάλυσης του 'Νεκρού Σημείου'. Η διαφορά μεταξύ σταθερών και μεταβλητών εξόδων έγκειται στο γεγονός ότι τα σταθερά έξοδα παραμένουν αμετάβλητα από το επίπεδο των πωλήσεων ή το μέγεθος δραστηριότητας της επιχειρηματικής μονάδας. Ενώ τα σταθερά έξοδα είναι ανεξάρτητα (ή αυτόνομα) από τις πωλήσεις, οι μεταβλητές δαπάνες μεταβάλλονται αναλογικά με το ύψος των πωλήσεων, βρίσκονται δηλαδή σε άμεση συνάρτηση με το μέγεθος της δραστηριότητας της επιχειρηματικής μονάδος. Έτσι, σε αλγεβρικούς όρους τα μεταβλητά έξοδα εκφράζονται από την σχέση: $VC = c \cdot Q$, όπου c είναι το κόστος ανά μονάδα προϊόντος. Χρησιμοποιώντας την σχέση αυτή, η αλγεβρική έκφραση του 'Νεκρού Σημείου' μετασχηματίζεται ως εξής: $p \cdot Q = FC + c \cdot Q$. Με επίλυση της εν λόγω σχέσης ως προς Q προσδιορίζεται η ποσότητα ή το ύψος των πωλήσεων στο οποίο τα έσοδα καλύπτουν τα έξοδα, ήτοι το επίπεδο δραστηριότητας του 'Νεκρού Σημείου'. Συγκεκριμένα, $(p - c) \cdot Q = FC$, όπου η διαφορά $(p - c)$ είναι γνωστή με τον όρο 'μονάδα συνεισφοράς' (unit contribution), η οποία φανερώνει το ποσό συνεισφοράς κάθε μονάδας στην κάλυψη των σταθερών δαπανών. Γενικά, για τις επιχειρηματικές μονάδες με σχετικά υψηλές σταθερές δαπάνες, όσο μεγαλύτερος είναι ο όγκος παραγωγής, τόσο μειώνεται το ανά μονάδα σταθερό κόστος και, κατά συνέπεια, μειώνεται και το συνολικό κόστος ανά μονάδα. Έτσι το επίπεδο πωλήσεων, εκφρασμένο σε μονάδες προϊόντος (Q^*), του 'Νεκρού σημείου' υπολογίζεται σύμφωνα με την σχέση: $Q^* = \frac{FC}{(p-c)}$. Με αυτή την σχέση καθίσταται εφικτός ο προσδιορισμός του ύψους εκείνου των πωλήσεων, πάνω από το οποίο η επιχειρηματική μονάδα πραγματοποιεί κέρδη, ήτοι αν οι πωληθέντες μονάδες είναι $Q > Q^*$, τότε η δραστηριότητα είναι κερδοφόρα, ενώ στην αντίθετη περίπτωση, αν δηλαδή $Q < Q^*$, τότε είναι ζημιογόνα. Η διαφορά ανάμεσα στις πωλήσεις στο 'Νεκρό Σημείο' και στις πραγματοποιηθέντες πωλήσεις είναι ουσιαστικά το περιθώριο ασφαλείας (Safety Margin) και είναι ένας δείκτης από τον οποίο φαίνεται κατά πόσο θα μπορούσε να επέλθει μείωση στις πωλήσεις μιας επιχείρησης, πριν αυτή παρουσιάσει ζημιές. Γενικά, όσο μεγαλύτερος είναι αυτός ο δείκτης, τόσο ασφαλέστερη είναι η επιχείρηση. Ένα σημαντικό θέμα στον προσδιορισμό του 'Νεκρού Σημείου' είναι η διάκριση των σταθερών και μεταβλητών εξόδων. Ορισμένα είδη κόστους έχουν τόσο μεταβλητό, όσο και σταθερό χαρακτήρα, όπως δαπάνες για επισκευές, υλικά, αναλώσιμα, καύσιμα, κλπ. Αν και μακροχρόνια όλα τα είδη κόστους μεταβάλλονται, ωστόσο βραχυχρόνια, κάποια έξοδα παραμένουν σχετικά αμετάβλητα. Σε αυτή την κατηγορία θα ήταν δυνατόν να περιληφθούν τα ενοίκια κτηρίων ή εξοπλισμών, τα ασφάλιστρα, τα γενικά διοικητικά έξοδα, χρηματοοικονομικά έξοδα, οι αποσβέσεις, οι μισθοί διοικητικού προσωπικού, εργοδηγών, έξοδα συντήρησης κτιρίων & εξοπλισμού καθώς και οι φόροι και τα τέλη. Τα σταθερά έξοδα υφίστανται ανεξάρτητα από το αν πραγματοποιείται παραγωγή (ή λειτουργεί η επιχείρηση). Αντίθετα, τα μεταβλητά έξοδα αφορούν τις δαπάνες που προκύπτουν όταν υπάρχει παραγωγή, και αφορούν κόστη όπως τις πληρωμές εργατών, υπερωρίες, κόστος πωληθέντων[1] κλπ. Δαπάνες, δηλαδή, οι οποίες είναι σε ορισμένο κάποιο βαθμό 'ελεγχόμενες' από την επιχείρηση.

Μια επέκταση της μεθόδου ανάλυσης του 'Νεκρού σημείου', η οποία φανερώνει την σχέση ανάμεσα στο κόστους και των κερδών της επιχείρησης είναι το ποσό που προκύπτει όταν από την τιμή πώλησης αφαιρεθεί το ανά μονάδα μεταβλητό κόστος, ήτοι το 'περιθώριο κέρδους' (contribution margin). Αναλυτικότερα, μια επιχειρηματική μονάδα με τα συνολικά έσοδα πρέπει να καλύπτει τις συνολικές δαπάνες και να επιτευχθεί και κέρδος (π), συνθήκη η οποία τροποποιεί το 'Νεκρό σημείο' ως $TR = TC + \pi$. Δοθέντος ότι $TR = p \cdot Q$ και $TC = FC + c \cdot Q$, τότε $p \cdot Q = FC + c \cdot Q + \pi$, από όπου προκύπτει το επίπεδο πωλήσεων στο οποίο η επιχείρηση πραγματοποιεί κέρδη: $Q^* = \frac{FC + +\pi}{(p-c)}$. Η σχέση αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για τον υπολογισμό του επιπέδου πωλήσεων στο οποίο η επιχειρηματική μονάδα θα έχει ένα επιθυμητό κέρδος (π^*), ήτοι $Q^* = \frac{FC + +\pi^*}{(p-c)}$.

Το 'Νεκρό Σημείο' προσδιορίζεται και διαγραμματικά. Συγκεκριμένα, στον οριζόντιο άξονα μετρούνται οι πωλήσεις ενώ στον κάθετο τα έσοδα και οι δαπάνες. Έτσι,

[1] Αυτό υπολογίζεται σύμφωνα με την σχέση αποθέματα αρχής + αγορές περιόδου - αποθέματα τέλους.

σχεδιάζοντας τις καμπύλες σταθερού, μεταβλητού κόστους και των εσόδων, τα οποία υποτίθεται ότι είναι γραμμικά ως προς τις πωλήσεις, τότε προκύπτει το παρακάτω διάγραμμα, στο οποίο είναι εφικτός ο προσδιορισμός του επιπέδου κερδών και ζημιών.



Εφαρμογές της μεθόδου του 'Νεκρού Σημείου'

Έστω ότι η επιχείρηση 'Χ' αποφασίζει την παραγωγή ενός νέου προϊόντος. Το κόστος διαμορφώνεται ως εξής:

Σταθερές Δαπάνες 32.000€, οι οποίες αναλύονται ως εξής:

Σ1: 5000€, Σ2: 11.000€, Σ3: 16.000€

Μεταβλητές δαπάνες ανά τεμάχιο προϊόντος: Μ1 4€, Μ2 2,5€, Μ3 3€, Μ4 2,5€

Συνεπώς το σύνολο μεταβλητών δαπανών ανά τεμάχιο είναι 12€.

Αν η επιχείρηση θέσει τιμή πώλησης 15€, από ποίο επίπεδο πωλήσεων θα αρχίσει να έχει κέρδη; Εφαρμόζοντας την σχέση $Q^* = \frac{FC}{(p-c)} = \frac{32.000}{15-12}$, προκύπτει ότι προκειμένου η επιχείρηση να έχει κέρδος, θα πρέπει να πωλήσει περισσότερα από 10.667 τεμάχια.

Έστω ότι μια επιχείρηση προβλέπει ότι τα ετήσια έσοδα θα ανέλθουν σε € 720.000 ενώ τα μεταβλητά έξοδα υπολογίζονται σε € 48 ανά τεμάχιο. Με τιμή πώλησης € 60 ανά τεμάχιο, πόσες μονάδες πρέπει να πωληθούν ώστε να επιτευχθεί κέρδος € 144.000;

Οι αναγκαίες μονάδες ώστε να βρεθεί η επιχείρηση στο 'Νεκρό Σημείο' υπολογίζονται ως εξής: $Q^* = \frac{FC}{(p-c)} = \frac{722.000}{60-48} = 60.000$. Εφαρμόζοντας τον τύπο $Q^* = \frac{FC++\pi^*}{(p-c)}$ προκύπτει ότι $Q^* = \frac{720.000+144.000}{60-48}$, τότε ο ζητούμενος αριθμός των μονάδων είναι 72.000. Συνεπώς, προκειμένου να επιτύχει το επιθυμητό κέρδος, η

επιχείρηση πρέπει να πωλήσει 12.000 μονάδες επιπλέον από αυτές που αντιστοιχούν στο 'Νεκρό Σημείο'.
Η μονάδα συνεισφοράς είναι €12, ποσό το οποίο συμβάλλει στην κάλυψη των σταθερών εξόδων των €720.000 μέχρι το όριο των 60.000 μονάδων, οι οποίες αντιστοιχούν στο 'Νεκρό Σημείο'. Μετά το όριο αυτό η μονάδα συνεισφοράς συμβάλλει στην δημιουργία κερδών. Τα έσοδα από την πώληση των 72.000 μονάδων είναι € 4.320.000, τα οποία θα καλύψουν τα σταθερά έξοδα € 720.000 και τα μεταβλητά έξοδα (€ 3.456.000), οπότε το υπόλοιπο ποσό € 144.000 θα είναι το ζητούμενο κέρδος.
Έστω ότι οι πραγματικές πωλήσεις ανέρχονται σε 50.000 μονάδες. Τότε τα έσοδα θα ανέλθουν σε € 3.000.000, ενώ τα έξοδα σε € 3.120.000, με αποτέλεσμα να προκύψει ζημιά € 120.000. Το ίδιο αποτέλεσμα προκύπτει πολλαπλασιάζοντας τη μονάδα συνεισφοράς με τη διαφορά (10.000) των μονάδων πώλησης (50.000) από τις μονάδες που αντιστοιχούν στο 'Νεκρό Σημείο' (60.000).

Βιβλιογραφία

Κάτος, Α. (1984) *Εφαρμογές των Μαθηματικών στην Οικονομία*, Εγνατία

Simon, C. and Blume, L. (1994) *Mathematics for Economists*, W.W. Norton and Company, London

Παράρτημα: Μαθηματικοί Τύποι

Παράγωγοι

1. Εάν $y = f(x)$ and $y' = \frac{dy}{dx}$, τότε:

1.1. Εάν $y = c =$ σταθερά, τότε $y' = 0$

1.2. Εάν $y = x^n$, τότε $y' = nx^{n-1}$

1.3. Εάν $y = cx^n$, τότε $y' = cnx^{n-1}$

1.4. Εάν $y = e^x$, τότε $y' = e^x$, όπου $e = 2.718$

1.5. Εάν $y = \ln x$, τότε $y' = \frac{1}{x}$

1.6. Εάν $y = \eta\mu\chi$, τότε $y' = \sigma\upsilon\nu\chi$

1.7. Εάν $y = \sigma\upsilon\nu\chi$, τότε $y' = -\eta\mu\chi$

2. Εάν $y = f(x) \pm g(x)$, τότε $y' = f'(x) \pm g'(x)$

3. Εάν $y = f(x)g(x)$, τότε $y' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

4. Εάν $y = \frac{f(x)}{g(x)}$, τότε $y' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

5. Εάν $y = f(x)$, where $z = g(x)$ τότε $y' = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} = f'(x)g'(x)$

5.1. Εάν $y = e^{u(x)}$, τότε $y' = u'(x)e^{u(x)}$, όπου $e = 2.718$

5.2. Εάν $y = \ln u(x)$, τότε $y' = \frac{u'(x)}{u(x)}$

Παράγωγος μεταβλητής: $(x)' = 1$

Παράγωγος μεταβλητής πολλαπλασιαζόμενη επί σταθερού αριθμού: $(ax)' = a$

Παράγωγος εκθετικής συνάρτησης: $(a^{v})' = va^{v-1}$

$[af(x)]' = af'(x)$, $[f(x)^{a}]' = af(x)^{a-1}f'(x)$

$(a^{x})' = a^{x}\ln a$, $[a^{f(x)}]' = a^{f(x)}\ln af'(x)$

$[\ln f(x)]' = \frac{f'(x)}{f(x)}$

$(e^{x})' = e^{x}$, $(e^{-x})' = -e^{-x}$, $(e^{f(x)})' = e^{f(x)}f'(x)$

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $(\sqrt{f(x)})' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$, $(\sqrt[v]{x})' = \frac{1}{v}x^{\frac{1}{v}-1}$, $(\sqrt[v]{f(x)^{m}})' = \frac{m}{v}f(x)^{\frac{m}{v}-1}f'(x)$

$f(x) = h(x)^{g(x)} \Leftrightarrow f'(x) = \left(e^{g(x)\ln f(x)}\right)'$

Παράγωγος αθροίσματος (διαφοράς) $(f_1 \pm f_2)' = f_1' \pm f_2'$

Παράγωγός γινομένου $(f_1 f_2)' = f_1'f_2 + f_1 f_2'$

Παράγωγος σταθεράς επί συνάρτησης $(cf_1)' = cf_1'$

Παράγωγος πηλίκου $(\frac{f_1}{f_2})' = \frac{f_1'f_2 - f_1 f_2'}{f_2^2}$

Παράγωγος Λόγου $(\frac{1}{f})' = -\frac{f_1}{f^{2}}$

Μερική Παράγωγος

Έστω η συνάρτηση $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, όπου η εξαρτημένη μεταβλητή και οι ανεξάρτητες (επεξηγηματικές) μεταβλητές, τότε η μερική παράγωγος της συνάρτησης ως προς μία ανεξάρτητη μεταβλητή, έστω x_1, ορίζεται ως: $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, με τις υπόλοιπες μεταβλητές ($n-1$) να θεωρούνται ως σταθερές.

Ολικό Διαφορικό

Εάν $y = f(x)$ τότε $dy = f'(x)dx$

Εάν $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ τότε $dy = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \cdots + f_n dx_n$, όπου $f_i = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ for $i = 1,2,\ldots,n$

Εάν $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ και $z = g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, τότε

$$d(y \pm z) = dy \pm dz$$

$$d(y \cdot z) = z \cdot dy + y \cdot dz$$

$$d(\frac{y}{z}) = \frac{1}{z^2}(z \cdot dy - y \cdot dz)$$

$$d(cy)^n = cny^{n-1}dy$$

Ολικές Παράγωγοι

Εάν $y = f(x, \omega)$, όπου $x = g(\omega)$, τότε $\dfrac{dy}{d\omega} = \dfrac{\partial y}{\partial x}\dfrac{dx}{d\omega} + \dfrac{\partial y}{\partial \omega}$

Εάν $y = f(x_1, x_2, \omega)$, όπου $x_1 = g_1(\omega)$ και $x_2 = g_2(\omega)$, τότε

$$\frac{dy}{d\omega} = \frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{dx_1}{d\omega} + \frac{\partial y}{\partial x_2}\frac{dx_2}{d\omega} + \frac{\partial y}{\partial \omega}$$

Έστω η συνάρτηση $y = f(x_1, x_2, \omega, z)$, όπου $x_1 = g_1(\omega, z)$ και $x_2 = g_2(\omega, z)$, τότε

$$\frac{dy}{d\omega} = \frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{dx_1}{d\omega} + \frac{\partial y}{\partial x_2}\frac{dx_2}{d\omega} + \frac{\partial y}{\partial \omega} \quad \text{και} \quad \frac{dy}{dz} = \frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dz} + \frac{\partial y}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dz} + \frac{\partial y}{\partial z}$$

Πεπλεγμένες Συναρτήσεις

Έστω το σύστημα εξισώσεων:

$$\left.\begin{array}{l} F^1(y_1,\dots,y_n\ ,\ x_1,\dots,x_n)=0 \\ F^2(y_1,\dots,y_n\ ,\ x_1,\dots,x_n)=0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F^n(y_1,\dots,y_n\ ,\ x_1,\dots,x_m)=0 \end{array}\right\},$$ όπου οι συναρτήσεις $F^1, F^2, \dots, F^n$ είναι συνεχώς παραγωγίσημες ως προς τα x και y.

Η ορίζουσα του Jacobi προσδιορίζεται ως $|J| = \begin{vmatrix} F_1^1 & F_2^1 & \cdots & F_n^1 \\ F_1^2 & F_2^2 & \cdots & F_n^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ F_1^n & F_2^n & \cdots & F_n^n \end{vmatrix} \neq 0$,

όπου $F_j^i = \dfrac{\partial F_i}{\partial y_i}, i, j = 1,2,\dots,n$, τότε στην 'περιοχή' της λύσης $\left.\begin{array}{l} y_1^* = f^1(x_1,\dots,x_m) \\ y_2^* = f^2(x_1,\dots,x_m) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n^* = f^n(x_1,\dots,x_m) \end{array}\right\}$

του συστήματος (όπου y είναι δυνατόν να θεωρηθεί ως ενδογενείς μεταβλητές και x ως εξωγενείς παράμετροι) ισχύει ότι $[J]\begin{bmatrix} \dfrac{\partial y_1^*}{\partial x_j} \\ \dfrac{\partial y_2^*}{\partial x_j} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial y_n^*}{\partial x_j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{\partial F^1}{\partial x_j} \\ -\dfrac{\partial F^2}{\partial x_j} \\ \vdots \\ -\dfrac{\partial F^n}{\partial x_j} \end{bmatrix}, \forall j = 1,2,\dots,m$, όπου $[J]$ είναι η μήτρα του Jacobi.

Η λύση του συστήματος ορίζεται ως $\dfrac{\partial y_i^*}{\partial x_j} = \dfrac{|J_i|}{|J|}, i = 1,2,\dots,n\ j = 1,2,\dots,m$, όπου $|J_i|$ είναι η ορίζουσα του Jacobi, στην οποία η στήλη i έχει αντικατασταθεί με την στήλη του δεξιού τελευταίου συστήματος.

Ακρότατα συναρτήσεων (χωρίς περιορισμούς)

Μια συνάρτηση $y = f(x_1,\dots,x_n)$ έχει μέγιστο ή ελάχιστο για τις τιμές $x_1^*,\dots,x_n^*$ των αντίστοιχων μεταβλητών όταν ισχύουν:

1. Συνθήκες πρώτης τάξεως $f_1 = f_2 = \cdots = f_n = 0$, όπου $f_i = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}, i = 1,2,\dots,n$

2. Συνθήκες δευτέρας τάξεως: εάν $|H|$ είναι η ορίζουσα του Hesse, ήτοι

$$|H| = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{vmatrix},\ f_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j},\ i, j = 1,2,\ldots,n \quad \text{και} \quad |H_1| = |f_{11}|,$$

$$|H_2| = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix},\ |H_3| = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix}, \cdots |H_n| = |H|,$$

τότε η συνάρτηση για τις τιμές $x_1^*,\ldots,x_n^*$ έχει

(i) μέγιστο όταν $|H_1| < 0, |H_2| > 0, |H_3| < 0, \ldots$

(ii) ελάχιστο όταν $|H_1|, |H_2|, \ldots, |H_n| > 0$.

Ακρότατα συναρτήσεων (με περιορισμούς)

(A) Μια συνάρτηση $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ έχει μέγιστο ή ελάχιστο για τις τιμές $x_1^*,\ldots,x_n^*$ των n αντίστοιχων μεταβλητών και ενός περιορισμού $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c$, όπου c σταθερά, όταν ισχύουν:

I.1: Η συνάρτηση του Lagrange $L = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \lambda[c - g(x_1, x_2, \ldots, x_n)]$, όπου λ ο συντελεστής (πολλαπλασιαστής) του Lagrange.

I.2: Οι συνθήκες πρώτης τάξεως:

$L_i = L_1 = L_2 = \cdots L_n = 0$, όπου $L_i = \partial L / \partial x_i$, $i = 1,2,\ldots,n$ και $L_\lambda = \partial L / \partial \lambda$.

I.3: Οι συνθήκες δευτέρας τάξεως: αν η περιορισμένη ορίζουσα του Hesse: η οποία ορίζεται ως εξής $$|\overline{H}| = \begin{vmatrix} 0 & g_1 & g_2 & \cdots & g_n \\ g_1 & L_{11} & L_{12} & \cdots & L_{1n} \\ g_2 & L_{21} & L_{22} & \cdots & L_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_n & L_{n1} & L_{n2} & \cdots & L_{nn} \end{vmatrix},$$ όπου $g_i = \dfrac{\partial g}{\partial x_i}, i = 1,\ldots,n$ και

$L_{ij}=\dfrac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}$, $\;i,j=1,\ldots,n$ και $|\overline{H}_2|\cdots|\overline{H}_n|$, οι κύριες περιορισμένες ελάσσονες της ορίζουσας $|\overline{H}|$, ήτοι $|\overline{H}_2|=\begin{vmatrix} 0 & g_1 & g_2 \\ g_1 & L_{11} & L_{12} \\ g_2 & L_{21} & L_{22} \end{vmatrix}$, $|\overline{H}_3|=\begin{vmatrix} 0 & g_1 & g_2 & g_3 \\ g_1 & L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ g_2 & L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ g_3 & L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{vmatrix},\ldots,$

τότε η παραπάνω συνάρτηση έχει για τις τιμές $x_1^*,\ldots,x_n^*$ και για το περιορισμό $g(x_1,\ldots,x_n)=c$ (i) Μέγιστο όταν $|\overline{H}_2|>0,|\overline{H}_3|<0,|\overline{H}_4|>0,\ldots,$ ήτοι όταν οι κύριες περιορισμένες ελάσσονες της ορίζουσας $|\overline{H}|$ εναλλάσσονται στο πρόσημο, με την $|\overline{H}_2|<0$ (ii) Ελάχιστο όταν $|\overline{H}_2|,|\overline{H}_3|,\ldots,\overline{H}_n|<0$, ήτοι όταν οι κύριες περιορισμένες ελάσσονες της ορίζουσας $|\overline{H}|$είναι όλες αρνητικές.

(B) Μία συνάρτηση $y=f(x_1,\ldots,x_n)$ έχει μέγιστο ή ελάχιστο για τις τιμές $x_1^*,\ldots,x_n^*$ των n αντίστοιχων μεταβλητών της και των περιορισμών, οι οποίοι περιγράφονται από τις σχέσεις $g^1(x_1,\ldots,x_n)=c_1,\cdots,g^m(x_1,\ldots,x_n)=c_m$, όπου $c_1,\ldots,c_m$ σταθερές και $m<n$, όταν ισχύουν: (1) η συνάρτηση του Lagrange $L=f(x_1,\ldots,x_n)+\sum_{i=1}^m \lambda_i$ $[c_i-g^i(x_1,\ldots,x_n)]$, όπου $\lambda_i, i=1,\ldots,m$ είναι οι πολλαπλασιαστές του Lagrange, (2) οι συνθήκες πρώτης τάξεως: ήτοι $L_{\lambda_1}=L_{\lambda_2}=\ldots=L_{\lambda_m}=0$ και $L_1=L_2=\ldots=L_n=0$, όπου $L_{\lambda_i}=\dfrac{\partial L}{\partial \lambda_i}, i=1,\ldots,m$ και $L_i=\dfrac{\partial L}{\partial x_i}, i=1,\ldots,n$ (3) οι συνθήκες δευτέρας τάξεως: αν $|\overline{H}|$η περιορισμένη ορίζουσα του Hesse, ήτοι

$$|H|=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & g_1^1 & g_2^1 & \cdots & g_n^1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & g_1^2 & g_2^2 & \cdots & g_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & g_1^m & g_2^m & \cdots & g_n^m \\ g_1^1 & g_1^2 & \cdots & g_m^m & L_{11} & L_{12} & \cdots & L_{1n} \\ g_2^1 & g_1^2 & \cdots & g_2^m & L_{21} & L_{22} & \cdots & L_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_n^1 & g_1^2 & \cdots & g_n^m & L_{1n} & L_{n2} & \cdots & L_{nn} \end{vmatrix},$$ όπου $g_j^i=\dfrac{\partial g^i}{\partial x_j}, i=1,\ldots,m$ και

$j=1,\ldots,n$, $\;L_{ij}=\dfrac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}, i,j=1,\ldots,m$ και οι κύριες περιορισμένες ελάσσονες της ορίζουσας, οι οποίες προσδιορίζονται ως εξής

$$\left|\overline{H}_{m+1}\right| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & g_1^1 & g_2^1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & g_1^2 & g_2^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & g_1^m & g_1^m \\ g_1^1 & g_1^2 & \cdots & g_1^m & L_{11} & L_{12} \\ g_2^1 & g_2^2 & \cdots & g_2^m & L_{21} & L_{22} \end{vmatrix}, \left|\overline{H}_{m+2}\right| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & & 0 & g_1^1 & g_2^1 & g_3^1 \\ 0 & 0 & & 0 & g_1^2 & g_2^2 & g_3^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & g_1^m & g_2^m & g_3^m \\ g_1^1 & g_1^2 & \cdots & g_1^m & L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ g_2^1 & g_2^2 & \cdots & g_2^m & L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ g_3^1 & g_3^2 & \cdots & g_3^m & L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{vmatrix}, \ldots, \left|\overline{H}_n\right| = \left|\overline{H}\right|$$

τότε η παραπάνω συνάρτηση για τις τιμές $x_1^*, \ldots, x_n^*$ και τους $n > m$ περιορισμούς έχει (i) μέγιστο όταν οι κύριες περιορισμένες ελάσσονες της ορίζουσας ,ήτοι $\left|\overline{H}_{m+1}\right|, \left|\overline{H}_{m+2}\right|, \ldots, \left|\overline{H}_n\right|$ εναλλάσσονται στο πρόσημο, με το πρόσημο της $\left|\overline{H}_{m+1}\right|$ ταυτόσημο με το πρόσημο του $(-1)^{m+1}$ (ii) ελάχιστο όταν οι κύριες περιορισμένες ελάσσονες της ορίζουσας $\left|\overline{H}\right|$ έχουν όλες το πρόσημο του $(-1)^m$.

Χρήσιμα Αποτελέσματα

$$a^m a^n = a^{m+n}, \quad a^0 = 1, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \quad a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \; a^n = \frac{1}{a^{-n}},$$

$$(ab)^n = a^n b^n, \quad \left(a^n\right)^m = a^{mn}, \quad a^{m+1} = a^n a, \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad a^m a^n = a^{m+n}, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, \; \sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}, \; \sqrt{a}\sqrt{a} = \sqrt{a^2} = a$$

Ταυτότητες

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2 b + 3ab^2 \pm b$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

Μελέτη τριωνύμου

Έστω η εξίσωση 2^{ου} βαθμού $ax^2 + bx + c$, τότε $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, όπου Δ είναι η διακρίνουσα, η οποία ορίζεται ως $\Delta = b^2 - 4ac$.

Εάν $\Delta \geq 0$ τότε η εξίσωση έχει λύσεις, εάν $\Delta < 0$, τότε η εξίσωση δεν έχει λύσεις (ρίζες).

Εφόσον $\Delta > 0$ και $a > 0$, τότε

	x_1		x_2	
+	0	–	0	+

Εφόσον $\Delta > 0$ και $a < 0$, τότε

	x_1		x_2	
-	0	+	0	-

Στην περίπτωση κατά την οποία $\Delta \leq 0$, τότε $x_{1,2} = \dfrac{-b}{2a}$

Λογάριθμοι

$\log xy = \log x + \log y$, $\log \dfrac{x}{y} = \log x - \log y$, $\log x^y = y \log x$, $\ln 1 = 0$, $\ln e = 1$,

$\ln e^a = a$, $a^x = \theta \Leftrightarrow x = \log_a \theta$, $\ln \theta = x \Leftrightarrow e^x = \theta$