ΕΛΕΓΧΟΙ ΥΠΟΘΕΣΕΩΝ – ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΑ ΕΜΠΙΣΤΟΣΥΝΗΣ

Παναγιώτα Λάλου

- Η *Εκτιμητική* ή *Συμπερασματική Στατιστική* είναι ο κλάδος της Στατιστικής που ασχολείται με την εξαγωγή συμπερασμάτων για έναν πληθυσμό, βάση των αποτελεσμάτων που λαμβάνονται από ένα δείγμα.

- *Ελέγχος Υπόθεσης* είναι η διαδικασία κατά την οποία χρησιμοποιούμε τιμές από το δείγματα για να βγάλουμε συμπεράσματα για τις αντίστοιχες παραμέτρους των πληθυσμών από τους οποίους προέρχονται αυτά τα δείγματα.

Μας ενδιαφέρει να εξετάσουμε μια υπόθεση αν είναι αληθής ή όχι στον **ΠΛΗΘΥΣΜΟ**

- Παραδείγματα: Ερευνητικά ερωτήματα που θέλουμε εξετάσουμε για **ΠΛΗΘΥΣΜΟΥΣ**

- Οι κατοικοι της Ικαρίας παρουσιάζουν χαμηλότερη αρτηριακή πίεση από τους κατοίκους της Αττικής;

- Ένα συγκεκριμένο φάρμακο κατεβάζει το επίπεδο τριγλυκεριδίων;

- Η αύξηση στην φορολογία στα τσιγάρα σχετίζεται με την μείωση του καπνίσματος;

Στον έλεγχο υποθέσεων ξεκινάμε διατυπώνοντας **δύο Υποθέσεις:**

- **Μηδενική υπόθεση** η οποία συμβολίζεται με **Ho**
- **Εναλλακτική υπόθεση** η οποία συμβολίζεται με $\mathbf{H_1}$.

Εφαρμόζοντας το κατάλληλο στατιστικό κριτήριο, θα πρέπει να αποφασίσουμε ποια από τις δύο είναι αληθής στον **πληθυσμό.**

Για παράδειγμα: Αν θέλουμε να εξετάσουμε αν οι μέση τιμή αρτηριακής πίεσης είναι ίδια στην Ικαρία και στην Αττική, έχουμε να επιλέξουμε μεταξύ των δύο υποθέσεων:

Μηδενική υπόθεση: Ho: $\mu 1=\mu 2$ (οι μέσες τιμές πίεσης είναι ίσες)

Εναλλακτική υπόθεση: $\mu 1 \neq \mu 2$ (οι μέσες τιμές διαφέρουν)

ΣΦΑΛΜΑΤΑ

- Σε κάθε έλεγχο είναι δυνατόν να πραγματοποιηθούν δύο ειδών σφάλματα:
  - **Σφάλμα τύπου Ι:** Απόρριψη της Ho ενώ στην πραγματικότητα είναι αληθής.
  - **Σφάλμα τύπου ΙΙ:** Απόρριψη της H_1 (Αποδοχή της Ho) ενώ στην πραγματικότητα η H_1 είναι αληθής.

Απόφαση	Πραγματική κατάσταση	
	H_0 αληθής	H_0 ψευδής
Απόρριψη H_0	Σφάλμα τύπου I $\Pr(\text{σφάλμα τύπου I}) = \alpha$	Σωστό συμπέρασμα
Μη απόρριψη H_0	Σωστό συμπέρασμα	Σφάλμα τύπου II Pr(σφάλμα τύπου II)=β

- **ΤΥΠΟΙ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ**

- **α=P(σφάλμα τύπου Ι)=**P(Απόρριψη της Ho ενώ στην πραγματικότητα είναι αληθής)
- **β=P(σφάλμα τύπου ΙΙ)=**P(Αποδοχή της Ho ενώ στην πραγματικότητα η H_1 είναι αληθής)
- Η **πιθανότητα γ= 1-β** ονομάζεται **ισχύς** του ελέγχου και εκφράζει το ποσοστό των «σωστών» απορρίψεων της Ho.

- Η πιθανότητα του σφάλματος μπορεί να υπολογιστεί.

- Μας ενδιαφέρει κυρίως το σφάλμα τύπου Ι: α (δηλαδή **λανθασμένης απόρριψης της Ηο**)

- Αυτό που γίνεται στην πράξη είναι να οριοθετείται μια πιθανότητα για το σφάλμα τύπου Ι: α

που είμαστε διατεθειμένοι να ανεχτούμε. Η πιθανότητα αυτή λέγεται **επίπεδο σημαντικότητας** και οι συνηθισμένες τιμές της είναι **α=0,05 (5%) ή α=0,1 (10%)**

- Δηλαδή:

Το μέγιστο αποδεκτό επίπεδο της *πιθανότητας σφάλματος Τύπου Ι* (λανθασμένης απόρριψης της Η0), συμβολίζεται με α και ονομάζεται επίπεδο σημαντικότητας του ελέγχου

- Επίπεδο σημαντικότητας α=0,05 σημαίνει οτι η ανεκτή πιθανότητα λάθους είναι 5% και οτι απορρίπτουμε την Ηο, μόνο αν η πιθανότητα σφάλματος στην απόρριψη της, υπολογιστεί μικρότερη από 5%

Κανόνες καθορισμού των υποθέσεων

- 1. Ως **Ho** επιλέγεται η υπόθεση που δηλώνει ότι στον πληθυσμό η κατάσταση παραμένει αμετάβλητη (δεν υπάρχει αλλαγή / διαφοροποίηση)
- 2. Ως **H1** επιλέγεται η υπόθεση της οποίας η λανθασμένη αποδοχή της εγκυμονεί τους περισσότερους κινδύνους

- Ξεκινάμε με τον ισχυρισμό ότι η μηδενική υπόθεση αληθεύει

  Παρόμοια με την έννοια του “αθώος μέχρι να αποδειχθεί ένοχος”

Έτσι, υποθέτοντας ότι η Ho είναι αληθής, αν αυτό που «προκύπτει από το δείγμα» είναι ότι έχει πολύ μικρή πιθανότητα να συμβεί (η πιθανότητα σφάλματος στην απόρριψη της είναι μικρή), τότε απορρίπτουμε την Ho

- Σε αντίθετη περίπτωση, τότε το δείγμα που πήραμε **δε μας δίνει αρκετές ενδείξεις για την απόρριψη της Ho** και «αποτυγχάνουμε να την απορρίψουμε»

Υπάρχουν 2 τρόποι για να αποφασίσουμε ποια υπόθεση είναι αληθής:

- **1^{ος} τρόπος: Με υπολογισμό του *p-value***

Υπολογίζουμε την τιμή του p-value, και την συγκρίνουμε με το προκαθορισμένο επίπεδο σημαντικότητας (συνήθως α=0,05).

Το p-value είναι η πιθανότητα σφάλματος στην απόρριψη της Ho.

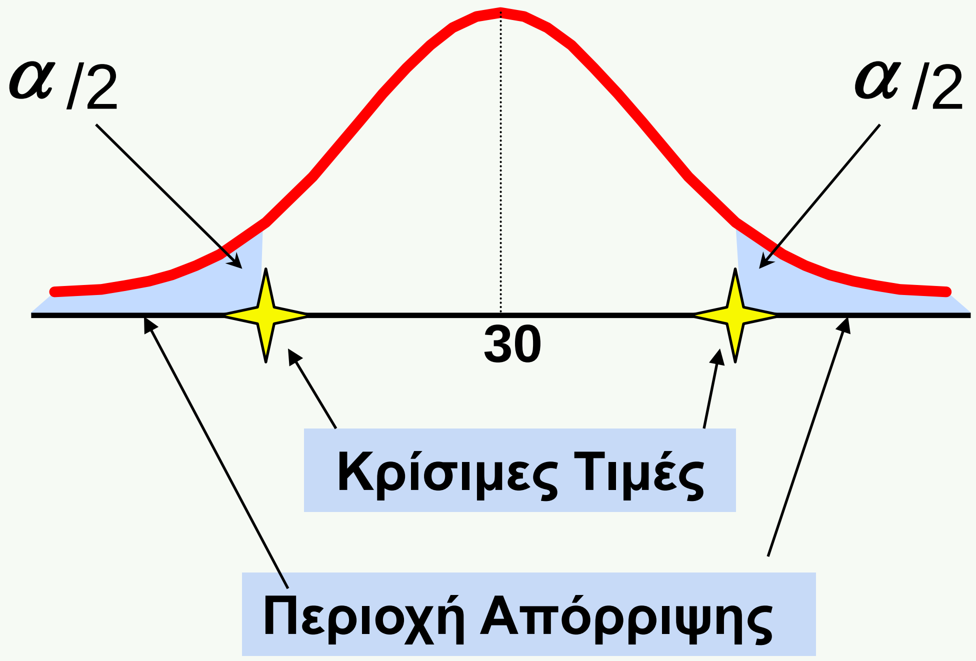
Αν **p-value$\leq$ α** τότε **απορρίπτουμε την Ho.** **(και δεχόμαστε οτι ισχύει η H1)**
Αν **p-value$>$ α** τότε **αποδεχόμαστε την Ho.**

- Το **p-value** είναι ένα μέτρο το οποίο εκφράζει πόσο ισχυρές είναι οι αποδείξεις που προκύπτουν εναντίον της **H0** από το συγκεκριμένο δείγμα που εξετάζουμε

Αυτόν τον τρόπο θα ακολουθήσουμε στο εργαστήριο όπου ο υπολογισμός του p-value θα γίνει στο SPSS.

$2^{ος}$ τρόπος: Με υπολογισμό της Κρίσιμης Περιοχής

- **Κρίσιμη Περιοχή *R*** **ονομάζεται η περιοχή απόρριψης της Μηδενικής Υπόθεσης Ho**



Επίπεδο Σημαντικότητας = α

Αυτός είναι ένας αμφίπλευρος έλεγχος διότι υπάρχει μια περιοχή απόρριψης και στα δύο άκρα

ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ

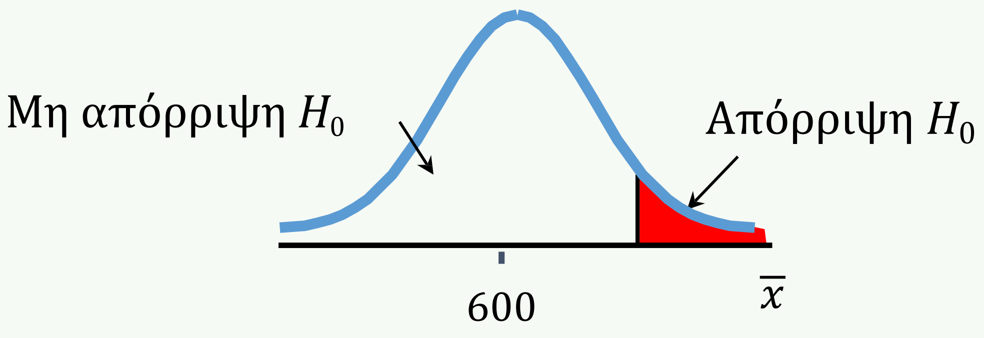
- 1) Ορίζουμε τις υποθέσεις Ho και H1
- 2) Υπολογίζουμε την τιμή του στατιστικού κριτηρίου.
- 3) Βρίσκουμε την κρίσιμη τιμή, από κατάλληλο πίνακα. Αυτή είναι η οριακή πιθανότητα απόρριψης της Ho.
- 4) Συγκρίνοντας την τιμή του στατιστικού κριτηρίου και την κρίσιμη τιμή, ελέγχουμε αν βρισκόμαστε στην κρίσιμη περιοχή. Αν βρίσκομάστε στην κρίσιμη περιοχή, απορρίπτουμε την υπόθεση Ho. Διαφορετικά την αποδεχόμαστε.

ΕΙΔΗ ΕΛΕΓΧΩΝ

- **Μονόπλευροι στατιστικοί έλεγχοι**

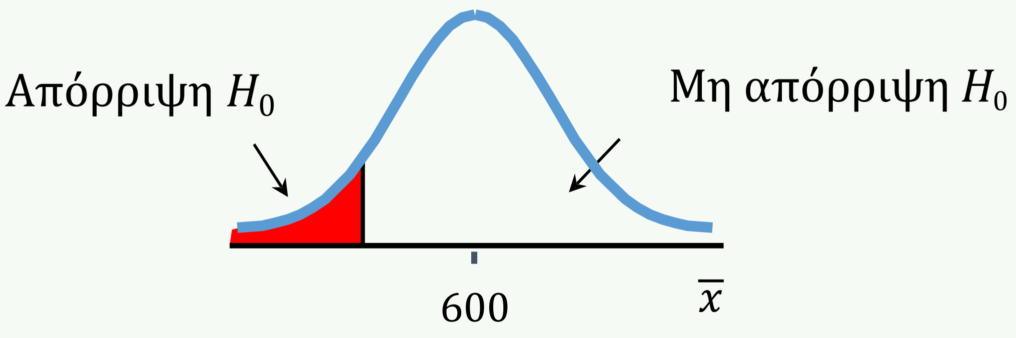
$H_0: \mu = 600$
$H_1: \mu > 600$

Υποθέτουμε ότι $\mu = 600$ εκτός εάν η μέση τιμή του δείγματος είναι σημαντικά μεγαλύτερη από 600



$H_0: \mu = 600$
$H_1: \mu < 600$

Υποθέτουμε ότι $\mu = 600$ εκτός εάν η μέση τιμή του δείγματος είναι σημαντικά μικρότερη από 600

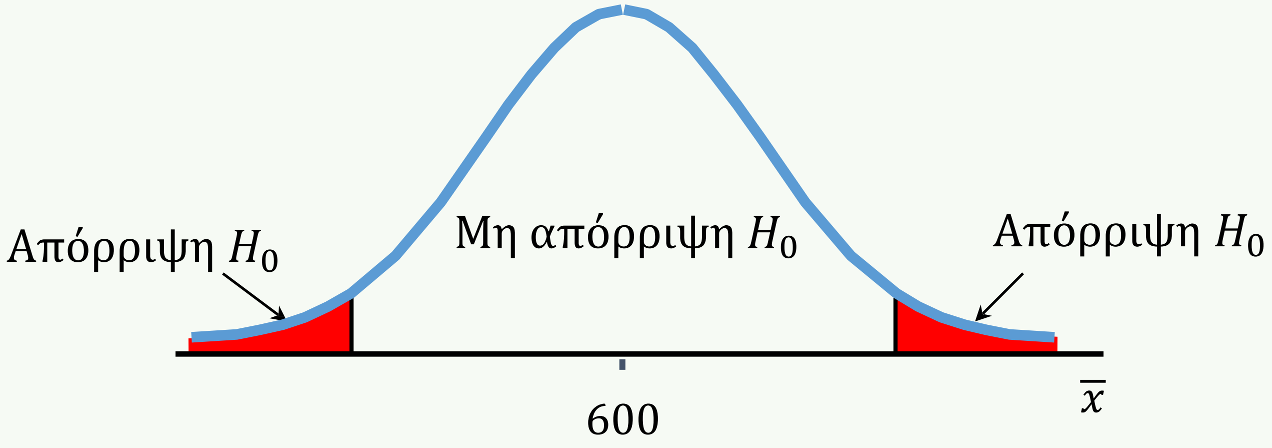


Αμφίπλευροι στατιστικοί έλεγχοι

- Η εναλλακτική υπόθεση εκφράζεται στη μορφή $\neq$

$$\boxed{\begin{array}{l} H_0: \mu = 600 \\ H_1: \mu \neq 600 \end{array}}$$

Υποθέτουμε ότι $\mu = 600$, εκτός εάν διαπιστωθεί ότι η μέση τιμή του δείγματος διαφέρει σημαντικά από την τιμή 600



ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΑ ΕΜΠΙΣΤΟΣΥΝΗΣ

- Ένα Δ.Ε. είναι μια εκτίμηση με τη μορφή ενός διαστήματος $[L, U]$ που δείχνει το εύρος εντός του οποίου αναμένεται να βρίσκεται μία παράμετρος θ ενός πληθυσμού
$$\Pr(L \leq \theta \leq U) = 1 - \alpha$$
- Κάθε Δ.Ε. χαρακτηρίζεται από ένα επίπεδο σημαντικότητας α (significance level) που ορίζει το **επίπεδο εμπιστοσύνης $1 - \alpha$** (confidence level)
  - Το επίπεδο εμπιστοσύνης αναπαριστά την πιθανότητα το διάστημα εμπιστοσύνης να περιλαμβάνει την εξεταζόμενη παράμετρο του πληθυσμού
  - Συνηθισμένα επίπεδα εμπιστοσύνης: $90\%, 95\%, 99\%$ ($\alpha = 10\%, 5\%, 1\%$)
  - Το εύρος του διαστήματος γίνεται μεγαλύτερο όσο το επίπεδο εμπιστοσύνης αυξάνει

$1^{ος}$ έλεγχος: Ελεγχος και Δ.Ε. διαφοράς μέσων τιμών σε ανεξάρτητους πληθυσμούς για μικρά δείγματα και με ισότητα διασπορών (σ1=σ2=σ)

$H_0: \mu_1=\mu_2$ $H_1: \mu_1>\mu_2$	$H_0: \mu_1=\mu_2$ $H_1: \mu_1<\mu_2$	$H_0: \mu_1=\mu_2$ $H_1: \mu_1\neq\mu_2$
$R=\{t>t_{n_1+n_2-2;a}\}$	$R=\{t<-t_{n_1+n_2-2;a}\}$	$R=\{\lvert t\rvert>t_{n_1+n_2-2;\frac{a}{2}}\}$

Το Διάστημα Εμπιστοσύνης για την διαφορά: μ1-μ2

$$(\bar{x}_1-\bar{x}_2-s\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\,t_{n_1+n_2-2;\frac{a}{2}}\ ,\ \bar{x}_1-\bar{x}_2+s\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\,t_{n_1+n_2-2;\frac{a}{2}}),\ \text{όπου}\ s^2=\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}.$$

Το στατιστικό κριτήριο t δίνεται από τον τύπο:

$$t=\frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2}{s\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$$

Παράδειγμα

- Μετρήθηκε το κάλιο του ορού σε 9 υγιή άτομα και σε 4 άτομα που έπασχαν από μία νόσο. Στα υγιή άτομα βρέθηκε μέση τιμή 4 m Eq/L και σταθερή απόκλιση 0.9 m Eq/L, ενώ στους ασθενείς βρέθηκε μέση τιμή 5 m Eq/L και σταθερή απόκλιση 0.8 m Eq/L.

  Υπάρχει διαφορά των μέσων τιμών του καλίου του ορού στις δύο αυτές ομάδες;

Υπολογισμοί:

- Έστω ότι στο προηγούμενο παράδειγμα ενδιαφερόμαστε να ελέγξουμε αν H_0: $\mu_1=\mu_2$, έναντι της υπόθεσης: H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$
- $s^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2} = \frac{(9-1)0{,}9^2+(4-1)0{,}8^2}{9+4-2} = \frac{8*0{,}81+3*0{,}64}{11} = 0{,}764$
- $t = \frac{\overline{x_1}-\overline{x_2}}{s*\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} = \frac{4-5}{\sqrt{0{,}764}*\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{4}}} = \frac{-1}{0{,}874*0{,}601} = \frac{-1}{0{,}525} = -1{,}904$
- Άρα, η τιμή του στατιστικού κριτηρίου στην περίπτωσή μας είναι -1,904.

Συνέχεια

- Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε την κρίσιμη τιμή.
- Είδατε ότι με βάση τον τύπο η κρίσιμη τιμή είναι η $t_{n_1+n_2-2;\frac{a}{2}}$
- Στην περίπτωσή μας, $n_1=9$, $n_2=4$ και $α=0,05$.
- Από τον πίνακα *(βλέπε επόμενη διαφάνεια)* για τις τιμές της κατανομής t βρίσκουμε ότι $t_{n_1+n_2-2;\frac{a}{2}} = t_{11;0,025} = 2,2011$

∞	tα = 1.282	1.645	1.96	2.326	2.576	3.091	3.291
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.656	318.289	636.578
2	1.886	2.92	4.303	6.965	9.925	22.328	31.6
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.214	12.924
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.61
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.894	6.869
6	1.44	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	1.397	1.86	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.25	4.297	4.781
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.93	4.318
13	1.35	1.771	2.16	2.65	3.012	3.852	4.221
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.14
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16	1.337	1.746	2.12	2.583	2.921	3.686	4.015
17	1.333	1.74	2.11	2.567	2.898	3.646	3.965
18	1.33	1.734	2.101	2.552	2.878	3.61	3.922
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.85
21	1.323	1.721	2.08	2.518	2.831	3.527	3.819
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792
23	1.319	1.714	2.069	2.5	2.807	3.485	3.768
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467	3.745
25	1.316	1.708	2.06	2.485	2.787	3.45	3.725
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435	3.707
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421	3.689
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408	3.674
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396	3.66
30	1.31	1.697	2.042	2.457	2.75	3.385	3.646
60	1.296	1.671	2	2.39	2.66	3.232	3.46
120	1.289	1.658	1.98	2.358	2.617	3.16	3.373

- Η κρίσιμη περιοχή είναι η:
- R= $\left\{|t| > t_{n_1+n_2-2;\frac{a}{2}}\right\}$.
- Προφανώς |t|=|-1,904|=1,904 < $t_{n_1+n_2-2}$ =2,201
- Άρα, δεν βρισκόμαστε στην κρίσιμη περιοχή R.
- <u>Οπότε, δεν μπορούμε να απορρίψουμε την H_0</u>.

- Άρα η απάντηση είναι: Δεν υπάρχει διαφορά στις μέσες τιμές καλίου υγιών και νοσούντων απ τη συγκεκριμένη ασθένεια.

- **ΑΣΚΗΣΗ:** Μετρήσαμε την αρτηριακή πίεση σε δυο ανεξάρτητες ομάδες παιδιών, αποτελούμενες από 8 και 10 παιδιά αντίστοιχα. Στην 1η ομάδα τα παιδιά έχουν υπερτασικούς γονείς, ενώ οι γονείς των παιδιών της 2ης ομάδας δεν παρουσιάζουν υπέρταση. Υποθέτουμε οτι οι τιμές ακολουθούν κανονική κατανομή με κοινή διασπορά σ^2. Υπάρχει διαφορά στη μέση τιμή πίεσης παιδιών υπερτασικών και παιδιών μη υπερτασικών γονιών σε επίπεδο σημαντικότητας α=10%;

ΟΜΑΔΑ Α									
100	102	96	106	110	120	112	90		
ΟΜΑΔΑ Β									
104	88	100	98	102	92	96	100	96	97

ΛΥΣΗ

- Υποθέσεις:

  Ho: μ1=μ2

  H1: $\mu 1 \neq \mu 2$

x_i	x_i^2
100	10000
102	10404
96	9216
106	11236
110	12100
120	14400
112	12544
90	8100
Σx_i=836	Σx_i^2=88000

x_i	x_i^2
104	10816
88	7744
100	10000
98	9604
102	10404
92	8464
96	9216
100	10000
96	9216
97	9409
Σx_i=973	Σx_i^2=94873

Υπολογισμός μέσων τιμών:

$$\bar{x}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{8} x_i}{n_1} = \frac{836}{8} = 104{,}5 \qquad \bar{x}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i}{n_2} = \frac{973}{10} = 97{,}3$$

Υπολογισμός διασπορών:

$$s_1^2 = \frac{1}{n_1 - 1}\left(\sum_{i=1}^{8} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{8} x_i\right)^2}{n_1}\right) = \frac{1}{7}\left(88000 - \frac{836^2}{8}\right) = 91{,}143$$

$$s_2^2 = \frac{1}{n_2 - 1}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{10} x_i\right)^2}{n_2}\right) = \frac{1}{9}\left(94873 - \frac{973^2}{10}\right) = 22{,}236$$

Οπότε η συνολική διασπορά s^2 είναι:

$$s^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{(8-1) * 91{,}143 \quad + (10-1) * 22{,}236}{8 + 10 - 2} = 52{,}38$$

- Η τιμή του στατιστικού κριτηρίου είναι:
- $t = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{s * \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \frac{104,5 - 97,3}{\sqrt{52,38} * \sqrt{\frac{1}{8} + \frac{1}{10}}}$ =2,1

- Από τον πίνακα βρίσκουμε ότι η κρίσιμη τιμή είναι $t_{n_1+n_2-2;\frac{a}{2}} =$ $t_{16;0,05}$ =1,746

- Είναι t> $t_{n_1+n_2-2;\frac{a}{2}}$ οπότε είμαστε στην κρίσιμη περιοχή κι επομένως απορρίπτουμε την Ho

Αρα υπάρχει διαφορά στην αρτηριακή πιεση

$2^{ος}$ έλεγχος: Έλεγχος ισότητας μέσων τιμών για παρατηρήσεις κατά ζεύγη (Paired t-test)

Έλεγχοι υποθέσεων και δ.ε. για παρατηρήσεις κατά ζεύγη:

$H_0: \mu_1=\mu_2$ $H_1: \mu1>\mu2$	$H_0: \mu_1=\mu_2$ $H_1: \mu1<\mu2$	$H_0: \mu_1=\mu_2$ $H_1: \mu1\neq\mu2$
$R=\{\frac{\bar{z}}{s_z}\sqrt{n}>t_{n-1;a}\}$	$R=\{\frac{\bar{z}}{s_z}\sqrt{n}<-t_{n-1;a}\}$	$R=\{\left\lvert\frac{\bar{z}}{s_z}\sqrt{n}\right\rvert>t_{n-1;\frac{a}{2}}\}$

Διάστημα Εμπιστοσύνης για το μ1-μ2

$$(\bar{z}-\frac{s_z}{\sqrt{n}}t_{n-1;\frac{a}{2}}\ ,\bar{z}+\frac{s_z}{\sqrt{n}}t_{n-1;\frac{a}{2}}),\text{ όπου } z=x_i-y_i\,.$$

Παράδειγμα 1:

Σε ένα θερμοκήπιο μετρήθηκε η παραγωγή ανθέων σε 8 φυτά έπειτα από προσθήκη των λιπασμάτων Α και Β.

Α	9	8	9	7	10	11	8	7
Β	8	10	8	7	12	10	9	8

Υπάρχει διαφορά στην παραγωγή ανθέων ανάλογα με τον τύπο λιπάσματος; (α=0,05)

ΛΥΣΗ

- Οι υποθέσεις του ελέγχου είναι:

- Μηδενική υπόθεση: **Ho:** $\boldsymbol{\mu_1 = \mu_2 \quad (\mu_z = 0)}$
- Εναλλακτική υπόθεση: **H1:** $\boldsymbol{\mu_1 \neq \mu_2 \quad (\mu_z \neq 0)}$

- Ορίζουμε την μεταβλητή: $\boldsymbol{z_i = x_i - y_i}$

Στον παρακάτω πίνακα υπολογίζουμε τις διαφορές:

x_i	y_i	$z_i = x_i - y_i$	z_i^2
9	8	1	1
8	10	-2	4
9	8	1	1
7	7	0	0
10	12	-2	4
11	10	1	1
8	9	-1	1
7	8	-1	1
		Σz_i=-3	Σz_i^2=13

Θα χρειαστεί να υπολογίσουμε την μέση τιμή $\bar{z}$ και την διασπορά s_z^2:

$$\bar{z} = \frac{\sum_{i=18} z_i}{n} = \frac{-3}{8} = -0{,}375$$

$$s_z^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} z_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} z_i\right)^2}{n}\right) = \frac{1}{8-1}\left(13 - \frac{(-3)^2}{8}\right) = 1{,}696$$

Άρα η τυπική απόκλιση είναι: $s_z = \sqrt{1{,}696} = 1{,}302$

Το στατιστικό κριτήριο είναι: $\left|\frac{\bar{z}}{s_z}\sqrt{n}\right| = \left|\frac{-0,375}{1,302}\sqrt{8}\right| = 0,815$

Η κρίσιμη τιμή (όπως φαίνεται από τον πίνακα της επόμενης σελίδας) είναι η: $t_{n-1;\frac{\alpha}{2}} = t_{7;0,025}$ =2,365

Η κρίσιμη περιοχή είναι: R= $\left\{\left|\frac{\bar{z}}{s_z}\sqrt{n}\right| > t_{n-1;\frac{\alpha}{2}}\right\}$.

Είναι 0,815<2,365 δηλαδή : $\left|\frac{\bar{z}}{s_z}\sqrt{n}\right| < t_{7;0,025}$. Άρα δεν είμαστε στη κρίσιμη περιοχή , οπότε **ΔΕΝ απορρίπτουμε την Ho.**

Επομένως, δεν πάρχει διαφορά στην παραγωγή ανθέων ανάλογα με τον τύπο λιπάσματος

DF	A = 0.1	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
∞	ta = 1.282	1.645	1.96	2.326	2.576	3.091	3.291
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.656	318.289	636.578
2	1.886	2.92	4.303	6.965	9.925	22.328	31.6
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.214	12.924
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.61
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.894	6.869
6	1.44	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	1.397	1.86	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.25	4.297	4.781
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.93	4.318
13	1.35	1.771	2.16	2.65	3.012	3.852	4.221
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.14
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16	1.337	1.746	2.12	2.583	2.921	3.686	4.015
17	1.333	1.74	2.11	2.567	2.898	3.646	3.965
18	1.33	1.734	2.101	2.552	2.878	3.61	3.922
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.85
21	1.323	1.721	2.08	2.518	2.831	3.527	3.819

Παράδειγμα 2:

Η αρτηριακή πίεση 10 ασθενών πρίν (X) και μετά (Y) τη χορήγηση φαρμάκου κατά της πίεσης είναι:

X	13	15	18	14	12	13	15	16	18	19
Y	12	13	15	15	14	13	13	14	14	13

Να ελεγχθεί σε επίπεδο σημαντικότητας 5%, εαν το συγκεκριμένο φάρμακο είναι αποτελεσματικό κατά της πίεσης. Υποθέτουμε οτι οι τιμές ακολουθούν κανονική κατανομή.

ΛΥΣΗ

- Οι υποθέσεις του ελέγχου είναι:

- Μηδενική υπόθεση: **Ho:** $\boldsymbol{\mu_1 = \mu_2 \quad (\mu_z = 0)}$
- Εναλλακτική υπόθεση: **H1:** $\boldsymbol{\mu_1 > \mu_2 \quad (\mu_z > 0)}$

- Ορίζουμε την μεταβλητή: $\boldsymbol{z_i = x_i - y_i}$

Στον παρακάτω πίνακα υπολογίζουμε τις διαφορές:

x_i	y_i	$z_i = x_i - y_i$	z_i^2
13	12	1	1
15	13	2	4
18	15	3	9
14	15	-1	1
12	14	-2	4
13	13	0	0
15	13	2	4
16	14	2	4
18	14	4	16
19	13	6	36
		Σz_i=17	Σx_i^2=79

Θα χρειαστεί να υπολογίσουμε την μέση τιμή $\bar{z}$ και την διασπορά s_z^2:

$$\bar{z} = \frac{\sum_{i=4} z_i}{n} = \frac{17}{10} = 1{,}7$$

$$s_z^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} z_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1} z_i\right)^2}{n}\right) = \frac{1}{10-1}\left(79 - \frac{17^2}{10}\right) = 5{,}57$$

Άρα η τυπική απόκλιση είναι: $s_z = \sqrt{5{,}57} = 2{,}36$

Το στατιστικό κριτήριο είναι: $\frac{\bar{z}}{s_z}\sqrt{n} = \frac{1{,}7}{2{,}36}\sqrt{10} = 2{,}278$

Η κρίσιμη τιμή (όπως φαίνεται από τον πίνκα της επόμενης σρλίδας) είναι η: $t_{n-1;\alpha} = t_{9;0,05}$ =1,833

Η κρίσιμη περιοχή είναι: $R = \{\frac{\bar{z}}{s_z}\sqrt{n} > t_{n-1;a}\}$

Είναι 2,278>1,833 δηλαδή $\frac{\bar{z}}{s_z}\sqrt{n} > t_{n-1;a}$ οπότε είμαστε στην κρίσιμη περιοχή κι επομένως **απορρίπτουμε την Ho.**

Δηλαδή η δράση του φαρμάκου είναι αποτελεσματική κατά της πίεσης.

DF	A = 0.1	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
∞	ta = 1.282	1.645	1.96	2.326	2.576	3.091	3.291
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.656	318.289	636.578
2	1.886	2.92	4.303	6.965	9.925	22.328	31.6
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.214	12.924
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.61
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.894	6.869
6	1.44	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	1.397	1.86	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.25	4.297	4.781
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.93	4.318
13	1.35	1.771	2.16	2.65	3.012	3.852	4.221
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.14
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16	1.337	1.746	2.12	2.583	2.921	3.686	4.015
17	1.333	1.74	2.11	2.567	2.898	3.646	3.965
18	1.33	1.734	2.101	2.552	2.878	3.61	3.922
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.85
21	1.323	1.721	2.08	2.518	2.831	3.527	3.819
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792
23	1.319	1.714	2.069	2.5	2.807	3.485	3.768
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467	3.745
25	1.316	1.708	2.06	2.485	2.787	3.45	3.725
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435	3.707
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421	3.689
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408	3.674
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396	3.66

Παράδειγμα 3:

- Σε τέσσερα άτομα με αυξημένες τιμές των τριγλυκεριδίων του ορού, χορηγήθηκε για ένα μήνα φάρμακο που πιστεύεται ότι ελαττώνει τα επίπεδα των τριγλυκεριδίων. Οι τιμές των τριγλυκεριδίων στα τέσσερα αυτά άτομα πριν και μετά την χορήγηση του φαρμάκου

Πριν τη χορήγηση	Μετά την χορήγηση
180	120
200	220
240	130
230	160

- Ελαττώνει τα επίπεδα των τριγλυκεριδίων το φάρμακο αυτό; (α=0,05)

ΛΥΣΗ

- Οι υποθέσεις του ελέγχου είναι:

- Μηδενική υπόθεση: **Ho:** $\boldsymbol{\mu_1 = \mu_2 \quad (\mu_z = 0)}$
- Εναλλακτική υπόθεση: **H1:** $\boldsymbol{\mu_1 > \mu_2 \quad (\mu_z > 0)}$

- Ορίζουμε την μεταβλητή: $\boldsymbol{z_i = x_i - y_i}$

Στον παρακάτω πίνακα υπολογίζουμε τις διαφορές:

x_i	y_i	$z_i = x_i - y_i$	z_i^2
180	120	60	3600
200	220	-20	400
240	130	110	12100
230	160	70	4900
		Σz_i=220	Σz_i^2=21000

$$\bar{z} = \frac{\sum_{i=4} z_i}{n} = \frac{220}{4} = 55$$

$$s_z^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} z_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1} z_i\right)^2}{n}\right) = \frac{1}{4-1}\left(21000 - \frac{220^2}{4}\right)=2966{,}67$$

Άρα η τυπική απόκλιση είναι: $s_z = \sqrt{2966{,}67} = 54{,}4671$

Το στατιστικό κριτήριο είναι: $\frac{\bar{z}}{s_z}\sqrt{n} = \frac{55}{54,4671}\sqrt{4} = 2,019$

Η κρίσιμη τιμή είναι η: $t_{n-1;\alpha} = t_{3;0,05} = 2,353$

Η κρίσιμη περιοχή είναι: $R = \{\frac{\bar{z}}{s_z}\sqrt{n} > t_{n-1;a}\}$

Είναι 2,019<2,353 δηλαδή $\frac{\bar{z}}{s_z}\sqrt{n} < t_{n-1;a}$ οπότε δεν είμαστε στην κρίσιμη περιοχή κι επομένως **δεν απορρίπτουμε την Ho.**

Δηλαδή το φάρμακο δεν ελαττώνει τα επίπεδα των τριγλυκεριδίων

ΑΣΚΗΣΗ: Πέντε άτομα που έπασχαν από μια νόσο θερμομετρήθηκαν το πρωί (ομάδα Α) και το βράδυ (ομάδα Β) της ίδιας μέρας. Οι τιμές της θερμοκρασίας (σε ^oC) ήταν:

Άτομο	1ο	2ο	3ο	4ο	5ο
Πρωινή θερμ.	37.1	37.4	37.2	37.3	37.0
Βραδυνή θερμ.	37.8	38.2	38.1	38.1	37.6

- Υπάρχει διαφορά μεταξύ πρωινής και βραδινής θερμοκρασίας;
- Να βρεθεί ένα Δ.Ε για τη διαφορά μέσων τιμών

ΛΥΣΗ

- Οι υποθέσεις του ελέγχου είναι:

- Μηδενική υπόθεση: **Ho:** $\boldsymbol{\mu_1 = \mu_2 \quad (\mu_z = 0)}$
- Εναλλακτική υπόθεση: **H1:** $\boldsymbol{\mu_1 \neq \mu_2 \quad (\mu_z \neq 0)}$

- Ορίζουμε την μεταβλητή: $\boldsymbol{z_i = x_i - y_i}$

Στον παρακάτω πίνακα υπολογίζουμε τις διαφορές:

x_i	y_i	$z_i = x_i - y_i$	z_i^2
37,8	37,	0,7	0,49
38,2	37,4	0,8	0,64
38,1	37,2	0,9	0,81
38,1	37,3	0,8	0,64
37,6	37	0,6	0,36
		3,8	2,94

- Έχουμε: $\bar{z} = \frac{\sum_{i=1}^{5} z_i}{n} = \frac{0,7+0,8+0,9+0,8+0,,6}{5} = \frac{3,8}{5} = 0,76$

- Η διασπορά είναι:

$$s_z^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} z_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} z_i\right)^2}{n}\right) = \frac{1}{5-1}\left(2,94 - \frac{3,8^2}{5}\right)=0,013$$

- Άρα, η τυπική απόκλιση είναι: $s_z = \sqrt{0,013} = 0,114$

- Το στατιστικό κριτήριο είναι: $\left|\frac{\bar{z}}{s_z}\sqrt{n}\right| = \left|\frac{0,76}{0,114}\sqrt{5}\right|$ =14,91

- Η κρίσιμη τιμή είναι η: $t_{n-1;\frac{a}{2}} = t_{4;0,025}$

- Την τιμή αυτή θα την βρούμε από τον Πίνακα της κατανομής t, που δίνεται στην επόμενη διαφάνεια.

- Βλέπουμε ότι $t_{4;0,025}$=2,776

DF	A = 0.1	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
∞	ta = 1.282	1.645	1.96	2.326	2.576	3.091	3.291
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.656	318.289	636.578
2	1.886	2.92	4.303	6.965	9.925	22.328	31.6
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.214	12.924
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.61
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.894	6.869
6	1.44	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	1.397	1.86	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.25	4.297	4.781
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.93	4.318
13	1.35	1.771	2.16	2.65	3.012	3.852	4.221
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.14
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16	1.337	1.746	2.12	2.583	2.921	3.686	4.015
17	1.333	1.74	2.11	2.567	2.898	3.646	3.965
18	1.33	1.734	2.101	2.552	2.878	3.61	3.922
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.85
21	1.323	1.721	2.08	2.518	2.831	3.527	3.819
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792
23	1.319	1.714	2.069	2.5	2.807	3.485	3.768
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467	3.745
25	1.316	1.708	2.06	2.485	2.787	3.45	3.725
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435	3.707
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421	3.689
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408	3.674
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396	3.66
30	1.31	1.697	2.042	2.457	2.75	3.385	3.646
60	1.296	1.671	2	2.39	2.66	3.232	3.46
120	1.289	1.658	1.98	2.358	2.617	3.16	3.373
1000	1.282	1.646	1.962	2.33	2.581	3.098	3.3

- Η κρίσιμη περιοχή είναι η:
- R= $\left\{\left|\frac{\bar{z}}{s_z}\sqrt{n}\right| > t_{n-1;\frac{a}{2}}\right\}$.
- Προφανώς 14,91 = $\left|\frac{\bar{z}}{s_z}\sqrt{n}\right|$ > $t_{n-1\,;\,\frac{a}{2}}$ =2,776
- Άρα, βρισκόμαστε στην κρίσιμη περιοχή R.
- <u>Οπότε, απορρίπτουμε την H_0 και αποδεχόμαστε ότι ισχύει η H_A.</u>
- Άρα συμπεραίνουμε ότι η μέση πρωινή θερμοκρασία διαφέρει στατιστικά σημαντικά από τη μέση βραδινή θερμοκρασία, στον πληθυσμό αναφοράς.

Υπολογισμός 95% Διαστήματος Εμπιστοσύνης

- Για το 95% Δ.Ε. γνωρίζουμε ότι δίνεται από την σχέση:

$$\left(\bar{z} - \frac{s_z}{\sqrt{n}} t_{n-1\,;\frac{a}{2}}\ ,\ \bar{z} + \frac{s_z}{\sqrt{n}} t_{n-1\,;\frac{a}{2}}\ \right)$$

- Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση παίρνουμε:

$$\left(0{,}76 - \frac{0{,}114}{\sqrt{5}} * 2{,}776\ \ ,\ 0{,}76 + \frac{0{,}114}{\sqrt{5}} * 2{,}776\right) = (0{,}618\ \ ,\ \ 0{,}902)$$

- Άρα, είμαστε 95% σίγουροι ότι στον πληθυσμό αναφοράς η διαφορά της μέσης πρωινής από τη μέση βραδινή θερμοκρασία βρίσκεται στο (0,618 , 0,902)
  - Παρατηρείστε ότι το 95% Δ.Ε. δεν περιέχει το 0.

3ος έλεγχος: Ι)Έλεγχος υποθέσεων μέσης τιμής ενός πληθυσμού (σ γνωστό)

- **Στατιστικό κριτήριο** $z_{\overline{x}} = \frac{(\overline{x} - \mu_0)\sqrt{n}}{\sigma}$

H_0: μ=μο H_1: μ>μο	H_0: μ=μο H_1: μ<μο	H_0: μ=μο H_1: μ≠μο
R=$\{Z_{\overline{x}} > Z_{1-\alpha}\}$	R=$\{Z_{\overline{x}} < -Z_{1-\alpha}\}$	R=$\{\lvert Z_{\overline{x}}\rvert > Z_{1-\alpha/2}\}$

Διάστημα Εμπιστοσύνης: $\left[\overline{x} - Z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + Z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$

- **II) Έλεγχος υποθέσεων μέσης τιμής ενός πληθυσμού (σ άγνωστο)**

- **Στατιστικό κριτήριο** $$t_{\overline{x}} = \frac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

H_0: μ=μο H_1: μ>μο	H_0: μ=μο H_1: μ<μο	H_0: μ=μο H_1: μ≠μο
R=$\{t_{\overline{x}} > t_{n-1,1-\alpha}\}$	R=$\{t_{\overline{x}} < -t_{n-1,1-\alpha}\}$	R=$\{\lvert t_{\overline{x}}\rvert > t_{n-1,1-\alpha/2}\}$

Διάστημα Εμπιστοσύνης $$\left[\overline{x} - t_{n-1,1-\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}, \overline{x} + t_{n-1,1-\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}\right]$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

- Μια εταιρεία κινητής τηλεφωνίας θεωρεί ότι ο μέσος μηνιαίος χρόνος ομιλίας των χρηστών είναι 600 λεπτά
- Για ένα δείγμα 49 συνδρομητών βρέθηκε ότι ο μέσος χρόνος ομιλίας είναι 690 λεπτά/μήνα
- Η τυπική απόκλιση του πληθυσμού είναι 300 λεπτά/μήνα
- Είναι σωστός ο ισχυρισμός της εταιρείας σε επίπεδο σημαντικότητας 5%;

ΛΥΣΗ

- Οι υποθέσεις είναι:

$H_0: \mu = 600$

$H_1: \mu \neq 600$

- Στατιστικό κριτήριο: $Z_{\overline{x}} = \frac{(\overline{x} - \mu_0)\sqrt{n}}{σ} = \frac{(690-600)\sqrt{49}}{300} = 2,1$

- Κρίσιμη τιμή: $z_{1-\alpha/2} = 1,96$

Η κρίσιμη περιοχή είναι: R=$\{|Z_{\overline{x}}| > Z_{1-\alpha/2}\}$

Άρα είμαστε στην κρίσιμη περιοχή και άρα **απορρίπτεται η Ho**

Επομένως ο ισχυρισμός της εταιρείας ότι $\mu = 600$ *δεν ισχύει*

ΠΙΝΑΚΕΣ ΤΥΠΟΠΟΙΗΜΕΝΗΣ ΚΑΝΟΝΙΚΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ

z	**0.00**	**0.01**	**0.02**	**0.03**	**0.04**	**0.05**	**0.06**	**0.07**	**0.08**	**0.09**
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84850	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92786	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99897	0.99900

4ος Ελεγχος: Έλεγχος Ανεξαρτησίας δυο κατηγορικών μεταβλητών – Ελεγχος X^2

- Με τον έλεγχο αυτό, ελέγχουμε αν για δύο κατηγορικές μεταβλητές,είναι ανεξάρτητες ή όχι δηλαδή αν επηρεάζει η μία την άλλη. Αν βρεθεί εξάρτηση δεν είμαστε σε θέση να πούμε ποια είναι η αιτία και ποιο το αποτέλεσμα.
- Εστω ότι ένας πληθυσμός εξετάζεται ως προς 2 χαρακτηριστικά (μεταβλητές) A και B.

A \ B	B1	B2	. . .	Bs	Σύνολο
A1	n_{11}	n_{12}	…	n_{1s}	$n_{1.}$
A2	n_{21}	n_{22}	…	n_{2s}	$n_{2.}$
⋮					
Ar	n_{r1}	n_{r2}	…	n_{rs}	$n_{r.}$
Σύνολο	$n_{.1}$	$n_{.2}$	…	$n_{.s}$	n

Ho: Οι μεταβλητές Α και Β είναι ανεξάρτητες

H1: Οι μεταβλητές Ακαι Β δεν είναι ανεξάρτητες

Κρίσιμη περιοχή: $R = \{X^2 > X^2{}_{(r-1)(s-1);a}\}$

$$\boldsymbol{X^2 = \sum \frac{(O_{ij}-E_{ij})^2}{E_{ij}}}$$

όπου: $\boldsymbol{O_{ij} = n_{ij}}$ οι παρατηρούμενες τιμές (*Observed*)

$$\boldsymbol{E_{ij} = \frac{n_{i.}\ n_{.j}}{n}}$$ οι αναμενόμενες τιμές (*Expected*)

Ή αλλιώς:

$$\boldsymbol{E_{ij} = \frac{Αθροισμα\ i\ γραμμης \times Άθροισμα\ \ j\ στηλης}{n}}$$

Στην κρίσιμη τιμή $X^2{}_{(r-1)(s-1);a}$ **r: αριθμός γραμμών**

s: αριθμός στηλών

Προυποθέσεις εφαρμογής του ελέγχου:

- 1. Τα δείγματα είναι τυχαία.
- 2. Οι παρατηρήσεις είναι ανεξάρτητες.
- 3. Όλες οι αναμενόμενες (θεωρητικές) συχνότητες είναι μεγαλύτερες από 1.
- 4. Το πολύ 20% από τις αναμενόμενες συχνότητες είναι μικρότερες από 5.

Παράδειγμα 1

Μια έρευνα σε δείγμα 500 ατόμων έδειξε οτι οι 200 ήταν καπνιστές. Μετά από ειδικό φόρο που επιβλήθηκε, σε καινούρια έρευνα, σε δείγμα 600 ατόμων, οι 210 ήταν καπνιστές. Τα αποτελέσματα αυτά φαίνονται στο παρακάτω πίνακα:

	Κάπνισμα	
Φορολογία	Καπνιστές	Μη καπνιστές
Πριν το φόρο	200	300
Μετά τον φόρο	210	390

Επέδρασε η φορολογία στη χρήση του τσιγάρου? (α=0,05)

- Αν Α: Κάπνισμα (καπνιστές – μη καπνιστές)

  Β: Φορολογία (πριν το φόρο – μετά τον φόρο)

Ho: Οι μεταβλητές Α και Β είναι ανεξάρτητες

H1: Οι μεταβλητές Ακαι Β δεν είναι ανεξάρτητες

Υπολογίζουμε το άθροισμα κάθε γραμμής και στήλης:

	Κάπνισμα		
Φορολογία	Καπνιστές	Μη καπνιστές	ΣΥΝΟΛΟ
Πριν το φόρο	200	300	500
Μετά τον φόρο	210	390	600
ΣΥΝΟΛΟ	410	690	1100

- Οι εκτιμόμενες συχνότητες:

- $\mathrm{E}_{11} = \frac{n_{1.} \times n_{.1}}{n} = \frac{500 \cdot 410}{1100} = 186,36$

- $\mathrm{E}_{12} = \frac{n_{1.} \times n_{.2}}{n} = \frac{500 \cdot 690}{1100} = 313,64$

- $\mathrm{E}_{21} = \frac{n_{2.} \times n_{.1}}{n} = \frac{600 \cdot 410}{1100} = 223,64$

- $\mathrm{E}_{22} = \frac{n_{2.} \times n_{.2}}{n} = \frac{600 \cdot 690}{1100} = 376,36$

$$X^2 = \sum \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}} =$$

$$\frac{(200 - 186{,}36)^2}{186{,}36} + \frac{(300 - 313{,}64)^2}{313{,}64} + \frac{(210 - 223{,}64)^2}{223{,}64} + \frac{(390 - 376{,}36)^2}{376{,}36} = 2{,}92$$

Η κρίσιμη τιμή, απο πίνακες είναι:

$X^2{}_{(r-1)(s-1);a} = X^2{}_{(2-1)(2-1);0.05} = X^2{}_{1;0.05} = 3{,}841$

Η κρίσιμη περιοχή: $R = \{X^2 > X^2{}_{(r-1)(s-1);a}\}$

Είναι: $X^2 < X^2{}_{1;0.05} = 3{,}841$, άρα δεν απορρίπτουμε την Ho, κι επομένως οι μεταβλητές είναι ανεξάρτητες, δηλαδή ο φόρος δεν επιδρά στην κατανάλωση τσιγάρου

Percentage Points of the Chi-Square Distribution

Degrees of Freedom	Probability of a larger value of x^2								
	0.99	0.95	0.90	0.75	0.50	0.25	0.10	0.05	0.01
1	0.000	0.004	0.016	0.102	0.455	1.32	2.71	3.84	6.63
2	0.020	0.103	0.211	0.575	1.386	2.77	4.61	5.99	9.21
3	0.115	0.352	0.584	1.212	2.366	4.11	6.25	7.81	11.34
4	0.297	0.711	1.064	1.923	3.357	5.39	7.78	9.49	13.28
5	0.554	1.145	1.610	2.675	4.351	6.63	9.24	11.07	15.09
6	0.872	1.635	2.204	3.455	5.348	7.84	10.64	12.59	16.81
7	1.239	2.167	2.833	4.255	6.346	9.04	12.02	14.07	18.48
8	1.647	2.733	3.490	5.071	7.344	10.22	13.36	15.51	20.09
9	2.088	3.325	4.168	5.899	8.343	11.39	14.68	16.92	21.67
10	2.558	3.940	4.865	6.737	9.342	12.55	15.99	18.31	23.21
11	3.053	4.575	5.578	7.584	10.341	13.70	17.28	19.68	24.72
12	3.571	5.226	6.304	8.438	11.340	14.85	18.55	21.03	26.22
13	4.107	5.892	7.042	9.299	12.340	15.98	19.81	22.36	27.69
14	4.660	6.571	7.790	10.165	13.339	17.12	21.06	23.68	29.14
15	5.229	7.261	8.547	11.037	14.339	18.25	22.31	25.00	30.58
16	5.812	7.962	9.312	11.912	15.338	19.37	23.54	26.30	32.00
17	6.408	8.672	10.085	12.792	16.338	20.49	24.77	27.59	33.41
18	7.015	9.390	10.865	13.675	17.338	21.60	25.99	28.87	34.80
19	7.633	10.117	11.651	14.562	18.338	22.72	27.20	30.14	36.19
20	8.260	10.851	12.443	15.452	19.337	23.83	28.41	31.41	37.57
22	9.542	12.338	14.041	17.240	21.337	26.04	30.81	33.92	40.29
24	10.856	13.848	15.659	19.037	23.337	28.24	33.20	36.42	42.98
26	12.198	15.379	17.292	20.843	25.336	30.43	35.56	38.89	45.64
28	13.565	16.928	18.939	22.657	27.336	32.62	37.92	41.34	48.28
30	14.953	18.493	20.599	24.478	29.336	34.80	40.26	43.77	50.89
40	22.164	26.509	29.051	33.660	39.335	45.62	51.80	55.76	63.69
50	27.707	34.764	37.689	42.942	49.335	56.33	63.17	67.50	76.15
60	37.485	43.188	46.459	52.294	59.335	66.98	74.40	79.08	88.38

Παράδειγμα 2

Σε 500 μαθητές δημοτικού σχολείου μελετήθηκε η σχέση της υγείας του στόματος τους με τη χλωρίωση του νερού στην περιοχή διαμονής τους. Η κατανομή των 500 μαθητών ανάλογα με την υγεία του στόματος και τη χλωρίωση του νερού ήταν:

	Υγιεινή στόματος		
Χλωρίωση νερού	Κακή	Μέτρια	Καλή
Ανεπαρκής	80	120	75
Επαρκής	40	80	105

Σχετίζεται η υγεία του στόματος των μαθητών με τη χλωρίωση του νερού;

- Στο παράδειγμα αυτό θα ελέγξουμε αν η υγιεινή του στόματος (Α) σχετίζεται με τη χλωρίωση (Β).
- Επειδή και οι 2 μεταβλητές είναι ποιοτικές, θα χρησιμοποιήσουμε τον έλεγχο X_2.
- Για τον έλεγχο αυτό έχουμε ότι:

H_0: Οι μεταβλητές Α και Β είναι ανεξάρτητες

H_1: Οι μεταβλητές Α και Β δεν είναι ανεξάρτητες

Στην επόμενη διαφάνεια υπολογίζουμε το άθροισμα κάθε γραμμής και στήλης.

Υπολογίζουμε το άθροισμα κάθε γραμμής και στήλης:

	Υγιεινή στόματος			
Χλωρίωση νερού	Κακή	Μέτρια	Καλή	ΣΥΝΟΛΟ
Ανεπαρκής	80	120	75	275
Επαρκής	40	80	105	225
ΣΥΝΟΛΟ	120	200	180	500

- Οι εκτιμώμενες συχνότητες είναι:

- $\mathrm{E}_{11} = \frac{n_{1.} \times n_{.1}}{n} = \frac{275 \cdot 120}{500} = 66$

- $\mathrm{E}_{12} = \frac{n_{1.} \times n_{.2}}{n} = \frac{275 \cdot 200}{500} = 110$

- $\mathrm{E}_{13} = \frac{n_{1.} \times n_{.3}}{n} = \frac{275 \cdot 180}{500} = 99$

- $\mathrm{E}_{21} = \frac{n_{2.} \times n_{.1}}{n} = \frac{225 \cdot 120}{500} = 54$

- $\mathrm{E}_{22} = \frac{n_{2.} \times n_{.2}}{n} = \frac{225 \cdot 200}{500} = 90$

- $\mathrm{E}_{23} = \frac{n_{2.} \times n_{.3}}{n} = \frac{225 \cdot 180}{500} = 81$

$$X^2 = \sum \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}} =$$

$$\frac{(80-66)^2}{66} + \frac{(120-110)^2}{110} + \frac{(75-99)^2}{99} + \frac{(40-54)^2}{54} + \frac{(80-90)^2}{90} + \frac{(105-81)^2}{81} = 21{,}55$$

Η κρίσιμη τιμή, απο πίνακες είναι:

$X^2{}_{(r-1)*(s-1);a}$ = $X^2{}_{(2-1)*(3-1);0.05} = X^2{}_{2;0.05} = 5{,}99$

Η κρίσιμη περιοχή: $R = \{X^2 > X^2{}_{(r-1)(s-1);a}\}$

Άρα, είμαστε στην κρίσιμη περιοχή, αφού 21,55>5,99

Επομένως απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση και δεχόμαστε ότι η χλωρίωση του νερού επηρεάζει την κατάσταση του σώματος των μαθητών.

Percentage Points of the Chi-Square Distribution

Degrees of Freedom	Probability of a larger value of x^2								
	0.99	0.95	0.90	0.75	0.50	0.25	0.10	0.05	0.01
1	0.000	0.004	0.016	0.102	0.455	1.32	2.71	3.84	6.63
2	0.020	0.103	0.211	0.575	1.386	2.77	4.61	5.99	9.21
3	0.115	0.352	0.584	1.212	2.366	4.11	6.25	7.81	11.34
4	0.297	0.711	1.064	1.923	3.357	5.39	7.78	9.49	13.28
5	0.554	1.145	1.610	2.675	4.351	6.63	9.24	11.07	15.09
6	0.872	1.635	2.204	3.455	5.348	7.84	10.64	12.59	16.81
7	1.239	2.167	2.833	4.255	6.346	9.04	12.02	14.07	18.48
8	1.647	2.733	3.490	5.071	7.344	10.22	13.36	15.51	20.09
9	2.088	3.325	4.168	5.899	8.343	11.39	14.68	16.92	21.67
10	2.558	3.940	4.865	6.737	9.342	12.55	15.99	18.31	23.21
11	3.053	4.575	5.578	7.584	10.341	13.70	17.28	19.68	24.72
12	3.571	5.226	6.304	8.438	11.340	14.85	18.55	21.03	26.22
13	4.107	5.892	7.042	9.299	12.340	15.98	19.81	22.36	27.69
14	4.660	6.571	7.790	10.165	13.339	17.12	21.06	23.68	29.14
15	5.229	7.261	8.547	11.037	14.339	18.25	22.31	25.00	30.58
16	5.812	7.962	9.312	11.912	15.338	19.37	23.54	26.30	32.00
17	6.408	8.672	10.085	12.792	16.338	20.49	24.77	27.59	33.41
18	7.015	9.390	10.865	13.675	17.338	21.60	25.99	28.87	34.80
19	7.633	10.117	11.651	14.562	18.338	22.72	27.20	30.14	36.19
20	8.260	10.851	12.443	15.452	19.337	23.83	28.41	31.41	37.57
22	9.542	12.338	14.041	17.240	21.337	26.04	30.81	33.92	40.29
24	10.856	13.848	15.659	19.037	23.337	28.24	33.20	36.42	42.98
26	12.198	15.379	17.292	20.843	25.336	30.43	35.56	38.89	45.64
28	13.565	16.928	18.939	22.657	27.336	32.62	37.92	41.34	48.28
30	14.953	18.493	20.599	24.478	29.336	34.80	40.26	43.77	50.89
40	22.164	26.509	29.051	33.660	39.335	45.62	51.80	55.76	63.69
50	27.707	34.764	37.689	42.942	49.335	56.33	63.17	67.50	76.15
60	37.485	43.188	46.459	52.294	59.335	66.98	74.40	79.08	88.38

Παράδειγμα 3

Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται τ αποτελέσματα από μία έρευνα που μελετά τη σχέση της νόσου Αλτσχάιμερ με τη σωματική άσκηση.

	Επίπεδο σωματικής άσκησης		
Νόσος	Αυξημένο	Μέτριο	Χαμηλό
Ασθενείς	85	105	110
Υγιείς	125	120	100

Σχετίζεται η σωματική άσκηση με την νόσο Αλτσχάιμερ; (α=0,1)

- Για τον έλεγχο αυτό έχουμε ότι:

H_0: Οι μεταβλητές Α και Β είναι ανεξάρτητες

H_1: Οι μεταβλητές Α και Β δεν είναι ανεξάρτητες

	Επίπεδο σωματικής άσκησης			
Νόσος	Αυξημένο	Μέτριο	Χαμηλό	ΣΥΝΟΛΟ
Ασθενείς	85	105	110	300
Υγιείς	125	120	100	345
ΣΥΝΟΛΟ	210	225	210	645

- $E_{11} = \frac{n_{1.} \times n_{.1}}{n} = \frac{300 \cdot 210}{645} = 97{,}674$
- $E_{12} = \frac{n_{1.} \times n_{.2}}{n} = \frac{300 \cdot 225}{645} = 104{,}651$
- $E_{13} = \frac{n_{1.} \times n_{.3}}{n} = \frac{300 \cdot 210}{645} = 97{,}674$
- $E_{21} = \frac{n_{2.} \times n_{.1}}{n} = \frac{345 \cdot 210}{645} = 112{,}326$
- $E_{22} = \frac{n_{2.} \times n_{.2}}{n} = \frac{345 \cdot 225}{645} = 120{,}349$
- $E_{23} = \frac{n_{2.} \times n_{.3}}{n} = \frac{345 \cdot 210}{645} = 112{,}326$

$$X^2 = \sum \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}} =$$

$$\frac{(85 - 97{,}674)^2}{97{,}674} + \frac{(105 - 104{,}651)^2}{104{,}651} + \frac{(110 - 97{,}674)^2}{97{,}674} + \frac{(125 - 112{,}326)^2}{112{,}326}$$

$$+ \frac{(120 - 120{,}349)^2}{120{,}349} + \frac{(100 - 112{,}326)^2}{112{,}326} = 5{,}983$$

Η κρίσιμη τιμή, απο πίνακες είναι:

$X^2{}_{(r-1)*(s-1);a} = X^2{}_{(2-1)*(3-1);0.05} = X^2{}_{2;0.05} = 5{,}99$

Η κρίσιμη περιοχή: $R = \{X^2 > X^2{}_{(r-1)(s-1);a}\}$

Άρα, ΔΕΝ είμαστε στην κρίσιμη περιοχή, αφού
X^2=5,983 και $X^2{}_{2;0.1} = 4{,}61$

Επομένως απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση, δηλαδή η σωματική άσκηση σχετίζεται με τη νόσο Αλτσχάιμερ