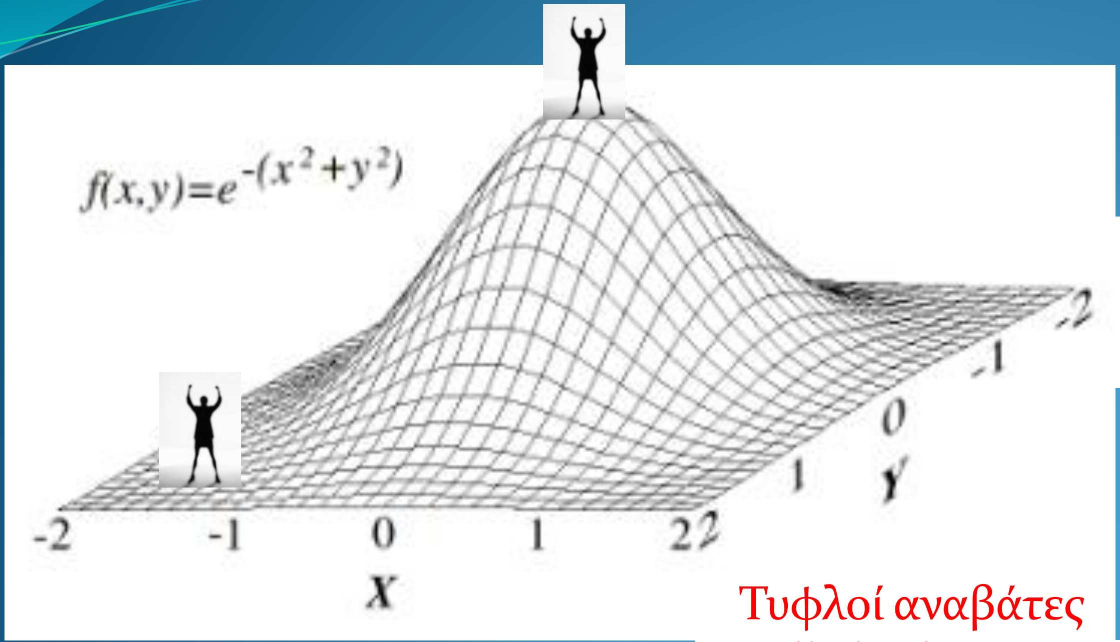
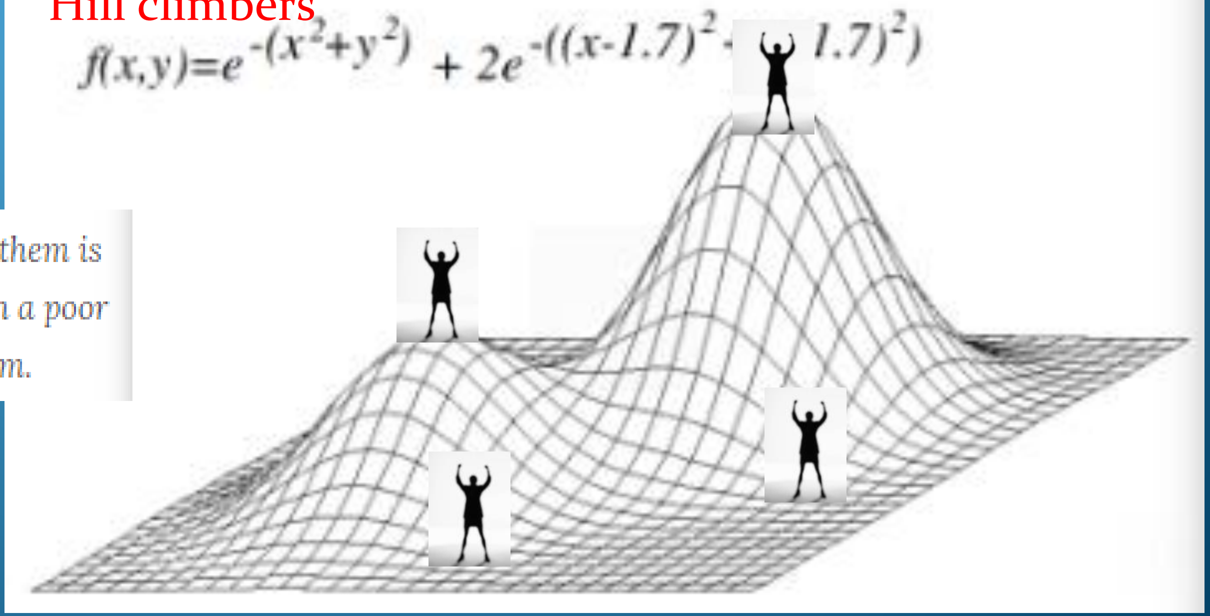
Βελτιστοποίηση



A surface with only one maximum. Hill-climbers are well-suited for optimizing over such surfaces, and will converge to the global maximum.

Τυφλοί αναβάτες
Hill climbers



A surface with two local maxima. (Only one of them is the global maximum.) If a hill-climber begins in a poor location, it may converge to the lower maximum.

βελτιστοποίηση

Εμπλεκόμενοι φορείς (stakeholders)

1. Θα αναζητηθούν τοπικά ή περιφερειακά – εθνικά ωφέλη;
2. Θα υπάρχει περιορισμός στον προϋπολογισμό του έργου;
3. Θα πρέπει να επιδιωχθεί η αναδιανομή εισοδημάτων από την κατασκευή και λειτουργία του έργου;
4. Με τι επιτόκιο και για ποιό χρονικό ορίζοντα θα γίνει ο αξιολόγηση του έργου;
5. Τι οφέλη πρέπει να συμπεριληφθούν στην σχηματοποίηση του έργου;
6. Και, βασικής σημασίας είναι η ερώτηση, εάν η απόδοση του έργου θα μετρηθεί με το οικονομικό όφελος μόνο ή θα πρέπει να ληφθούν και άλλα κριτήρια όπως π.χ το περιβάλλον, η εξάλειψη της φτώχειας και της ανεργίας.

βελτιστοποίηση

Box 1.1. The Dublin Principles

1. Water is a finite, vulnerable and essential resource, essential to sustain life, development and the environment.
2. Water resources development and management should be based on a participatory approach, involving users, planners and policy makers at all levels.
3. Women play a central role in the provision, management and safeguarding of water.
4. Water has an economic value in all its competing uses and should be recognized as an economic good.

Box 1.2. Definition of IWRM

IWRM is a *process* which promotes the coordinated development and management of water, land and related resources, in order to maximize the resultant *economic and social welfare* in an equitable manner without compromising the *sustainability of vital ecosystems*.

(GWP, 2000)

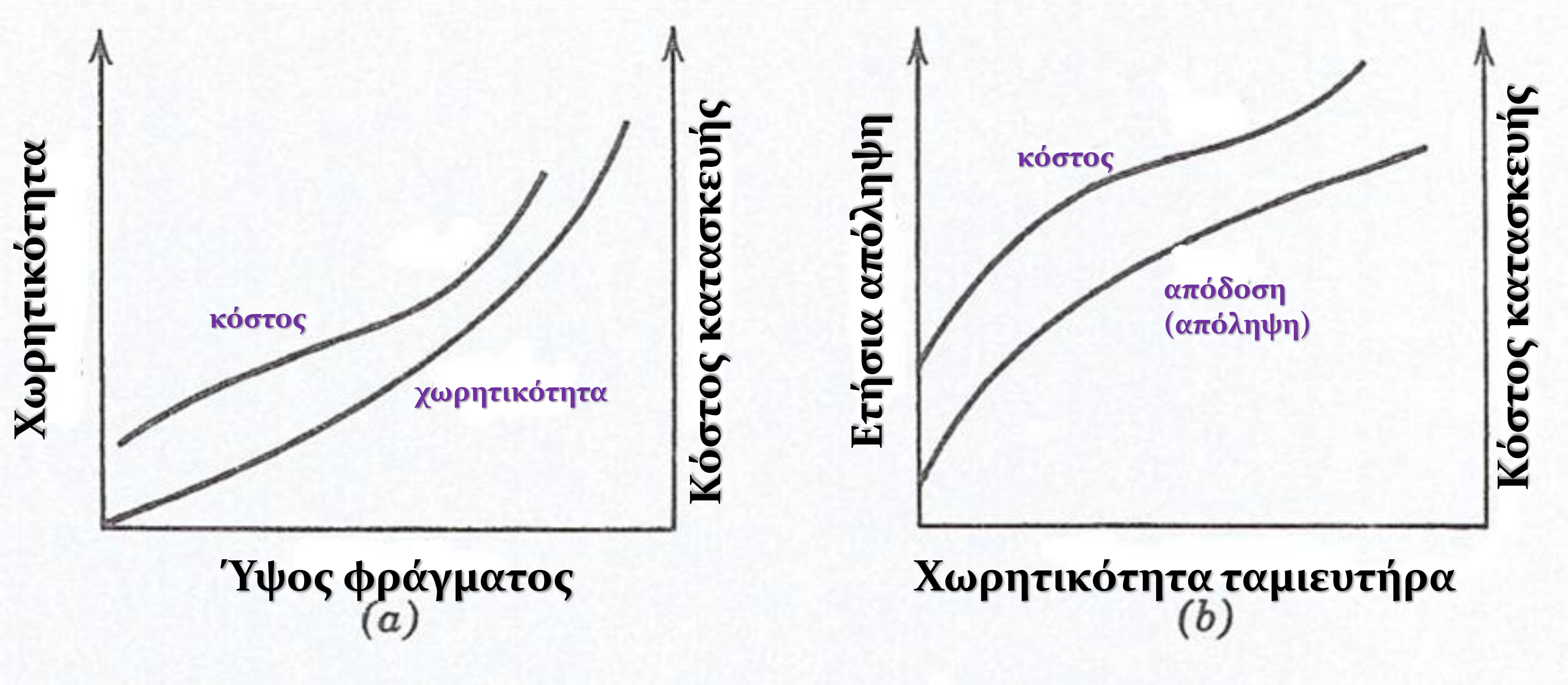
ΟΙ ΑΡΧΕΣ ΤΟΥ ΔΟΥΒΛΙΝΟΥ

1. Το νερό είναι ένα πεπερασμένο, τρωτό και απαραίτητο μέσο για να συντηρήσει την ζωή, την ανάπτυξη και το περιβάλλον
2. Η ανάπτυξη και διαχείριση των υδατικών πόρων πρέπει να βασίζεται σε μια συμμετοχική προσέγγιση, που περιλαμβάνει τους χρήστες, τους σχεδιαστές και τους κυβερνητικούς αξιωματούχους σε όλα τα επίπεδα.
3. Οι γυναίκες παίζουν βασικό ρόλο στην προμήθεια, διαχείριση και διαφύλαξη του νερού.
4. Το νερό έχει οικονομική αξία σε όλες τις ανταγωνιστικές του χρήσεις και πρέπει να αναγνωρίζεται σαν οικονομικό αγαθό.

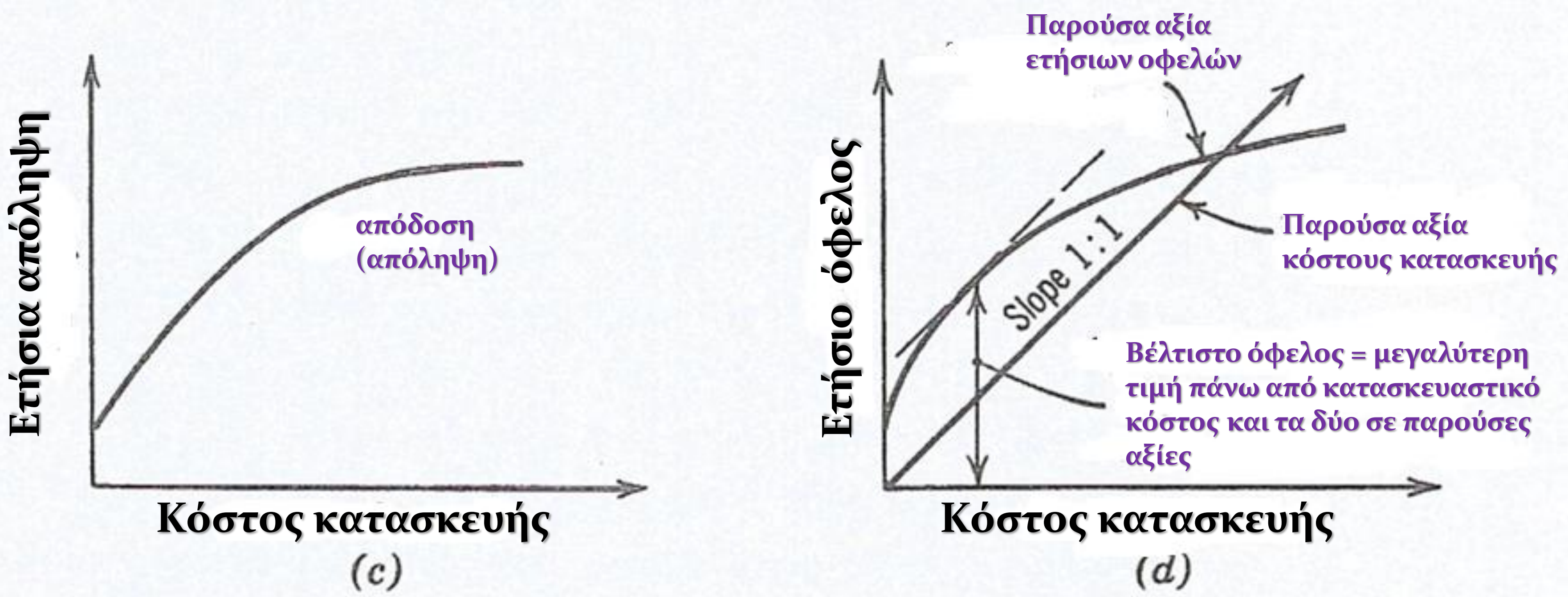
ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΕΝΗ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΥΔΑΤΙΚΩΝ ΠΟΡΩΝ

Ολοκληρωμένη διαχείριση υδατικών πόρων είναι μια διαδικασία που προάγει την συντονισμένη ανάπτυξη και διαχείριση του νερού, της γης και των σχετικών φυσικών πόρων, με στόχο να μεγιστοποιήσει την παραγόμενη οικονομική και κοινωνική ευμάρεια με δίκαιο τρόπο, και χωρίς να θυσιάζει την αειφορία των ζωτικών οικοσυστημάτων.

βελτιστοποίηση

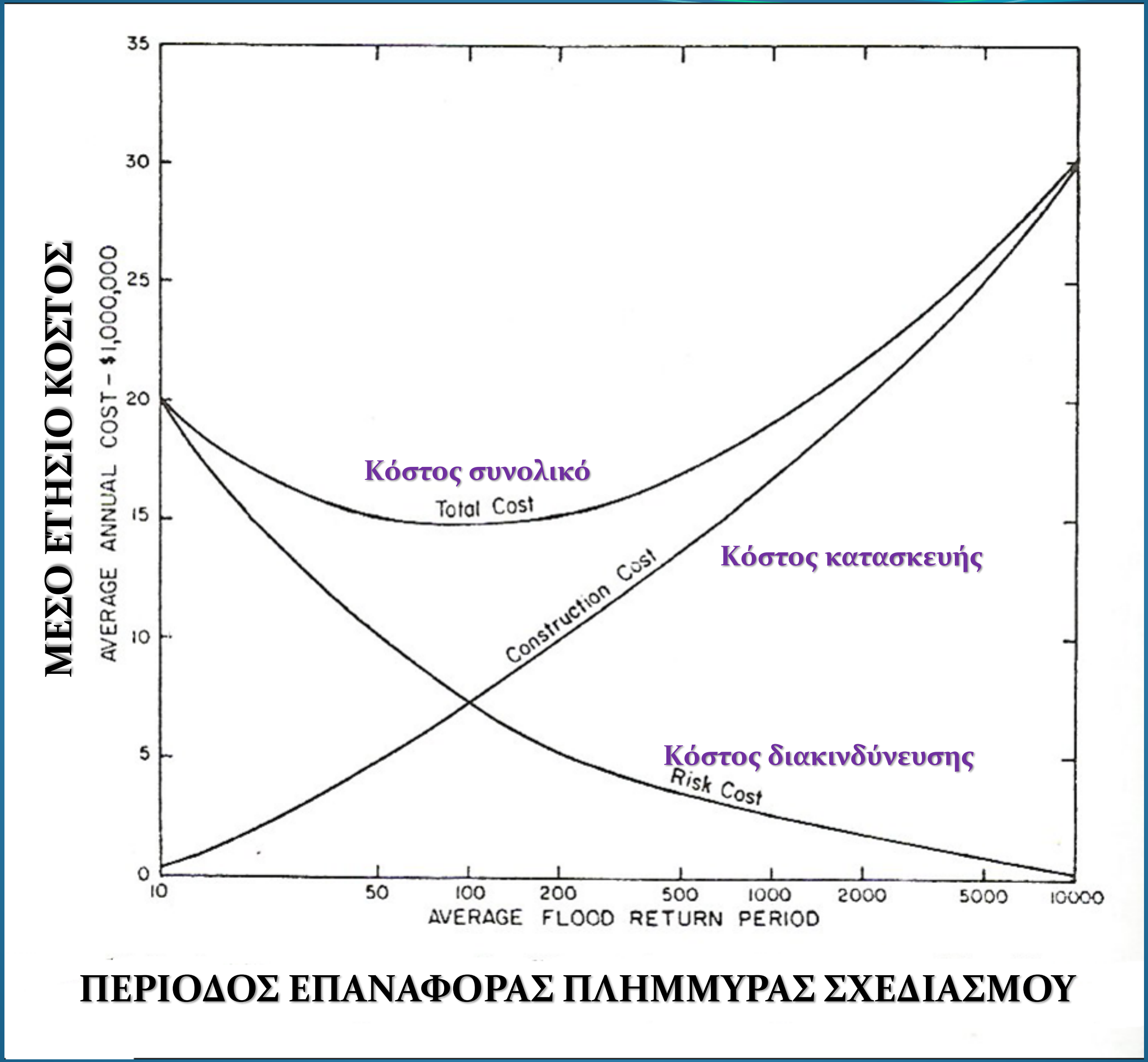


βελτιστοποίηση



ΤΕΧΝΙΚΕΣ & ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΓΙΑ ΜΟΝΟΥ ΣΚΟΠΟΥ ΤΑΜΙΕΥΤΗΡΑ

βελτιστοποίηση



ΕΤΗΣΙΑ ΚΟΣΤΗ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑΣ ΓΙΑ ΑΝΤΙΠΛΗΜΜΥΡΙΚΟ ΕΡΓΟ

βελτιστοποίηση

1.4.6 Applications of Optimization in Hydrosystems

Optimization can be applied to many types of application to hydrosystems engineering projects and problems including:

1. Determination of operating policies for reservoirs.
2. Design of reservoir capacities and location.
3. Operation of hydropower plants.
4. Operation of irrigation systems.
5. Operation of regional aquifers to determine recharge and pumpage.
6. Design of aquifer dewatering systems.
7. Design of aquifer reclamation systems.
8. Parameter identification for aquifers.
9. Minimum cost design and operation of water distribution systems.
10. Replacement and rehabilitation of water distribution components.
11. Aqueduct route determination.
12. Minimum cost design of storm sewer systems.
13. Design of detention basins.
14. Determination of flood control systems.
15. Determination of freshwater inflows to bays and estuaries.
16. Determination of firm energy and firm yield.

1.4.7 Building a Model

Development of an optimization model can be divided into five major phases:

1. Collection of data to describe system.
2. Problem definition and formulation.
3. Model development.
4. Model verification and evaluation.
5. Model application and interpretation.

Εφαρμογές βελτιστοποίησης στα υδροσυστήματα

1. Κανόνες λειτουργίας ταμιευτήρων
2. Θέση και χωρητικότητα ταμιευτήρων
3. Λειτουργία Η/Υ σταθμών
4. Λειτουργία αρδευτικών συστημάτων
5. Κανονισμοί άντλησης υπόγειων νερών
6. Σχεδιασμός αντλήσεων
7. Σχεδιασμός εμπλουτισμού υδροφορέων
8. Εκτίμηση παραμέτρων υδροφορέων
9. Ελάχιστο κόστος για συστήματα διανομής
10. Αλλαγή / αντικατάσταση μερών υδροσυστημάτων
11. Χάραξη διαδρομής υδραγωγείου
12. Σχεδιασμός αγωγών ομβριων ελάχιστου κόστους
13. Σχεδιασμός λεκανών κατακτάτησης
14. Καθορισμός αντιπλημμυρικών συστημάτων
15. Καθορισμός εισροών σε κόλπους και υγρότοπους
16. Καθορισμός ενεργειακών εισροών – εκροών

ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ ΕΝΟΣ ΜΟΝΤΕΛΟΥ

1. Συλολογή δεδομένων για την περιγραφή
2. Ορισμός και διατύπωση προβλήματος
3. Ανάπτυξη μοντέλου
4. Επαλήθευση και αξιολόγηση του μοντέλου
5. Εφαρμογή και ερμηνεία του μοντέλου

Βελτιστοποίηση: 3 πράγματα

1. Μεταβλητές απόφασης (decision variables)

είναι τα μέρη ενός υδροσυστήματος που μπορούν να επηρεάσουν την απόδοση του συστήματος. Οι μεταβλητές απόφασης μπορεί να είναι φυσικοί περιορισμοί, παράμετροι μιας καμπύλης απόφασης ή οικονομικοί περιορισμοί. Μπορεί να είναι συνεχείς μεταβλητές ή διακριτές μεταβλητές (πχ διάμετροι αγωγών).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ Μ.Α.

- Όγκος διατιθέμενου νερού
- Μέγεθος φράγματος
- Κανόνες λειτουργίας για τον επιμερισμό του νερού
- Αποθήκευση νερού για αντιπλημμυρικούς λόγους
- Δυναμικότητα εγκαταστάσεων επεξεργασίας
- Μεγέθη και χάραξη αγωγών
- Επιθυμητά κατώφλια τροφοδοσίας υδρευτικού – αρδευτικού νερου

2. Συναρτήσεις παραγωγής : **στοχική συνάρτηση** (**αντικειμενική συνάρτηση**)

- Οι οικονομολόγοι συχνά ονομάζουν την συνάρτηση παραγωγής, **συνάρτηση τεχνολογίας** αφού αντιπροσωπεύει τα μέρη της ανάλυσης που παρέχονται από τον μηχανικό για την καθοδήγηση του οικονομικού σχεδίου. Ονομάζεται και **συνάρτηση οφελειών**.

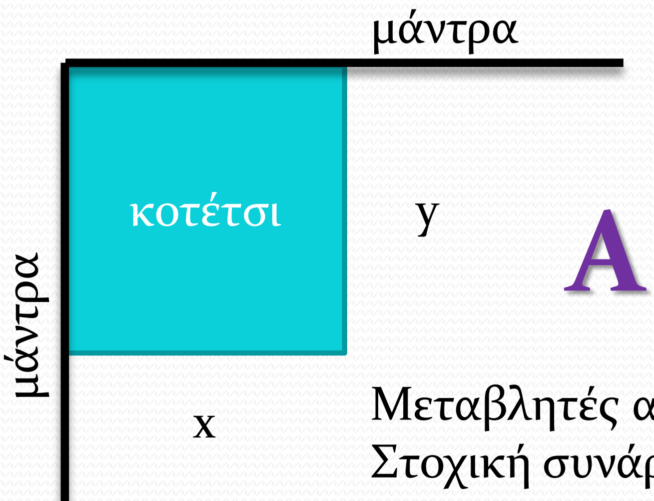
3.Περιορισμοί

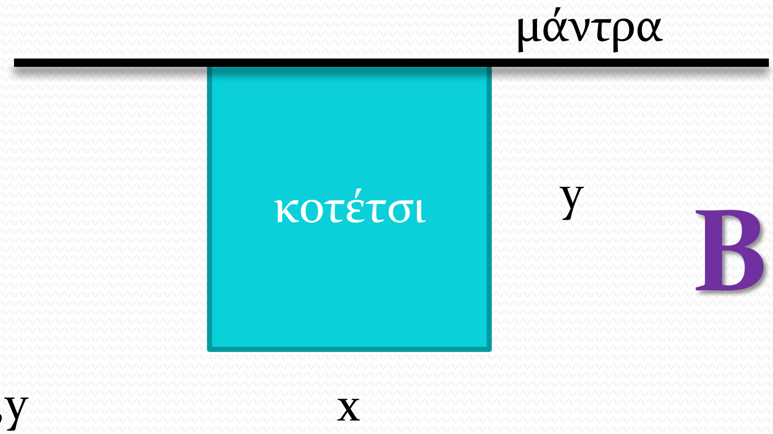
- Είναι τα φυσικά ή οικονομικά όρια των μεταβλητών απόφασης.

Η διαδικασία του σχεδιασμού ενός συστήματος είναι ισοδύναμη με την απόδοση μιας τιμής σε κάθε μία από τις **μεταβλητές απόφασης** και τον καθορισμό της **στοχικής συνάρτησης** και των **περιορισμών** (αν υπάρχουν).

Βελτιστοποίηση στη γεωμετρία

- ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1^{O} : Διαθέτουμε 10 μ. σύρμα για να φτιάξουμε έναν χώρο για τις κότες. Θα φτιάξουμε το κοτέτσι στην γωνία της μάντρας την αυλής. Ποιά ορθογώνια διάταξη (x*y) μας δίνει το μεγαλύτερο εμβαδόν;





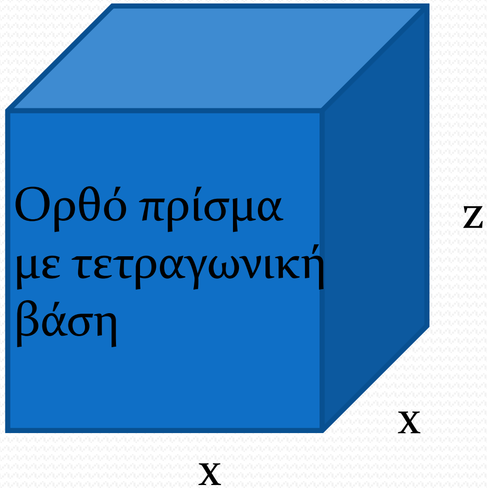
Μεταβλητές απόφασης: x,y
Στοχική συνάρτηση : $z = x*y$
Περιορισμοί : $x+y=10$

Εξετάστε

- την περίπτωση B (μια πλευρά στη μάντρα)
- ένα τεταρτοκύκλιο στην A θα μας δώσει μεγαλύτερο εμβαδόν;

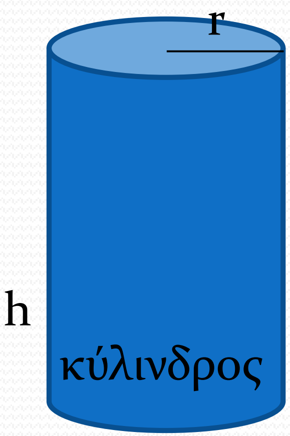
Βελτιστοποίηση στη γεωμετρία

- ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2^{O} : Διαθέτουμε 10 μ2. χαρτί περιτυλίγματος. Ποιό είναι το στερεό με τον μέγιστο όγκο που μπορεί να τυλιχτεί;



A

Μεταβλητές απόφασης: x,z
Στοχική συνάρτηση
$p = x^2 * z$
Περιορισμοί :
$2x^2 + 4xz = 10$



B

Κλασικό παράδειγμα βελτιστοποίησης: ΚΟΥΤΙΑ ΑΝΑΨΥΚΤΙΚΩΝ
Βρείτε τις βέλτιστες διαστάσεις του κυλίνδρου για δεδομένη χωρητικότητα του κουτιού V που θα δίνουν την μικρότερη επιφάνεια (και άρα αλουμίνιο). [V = 355]

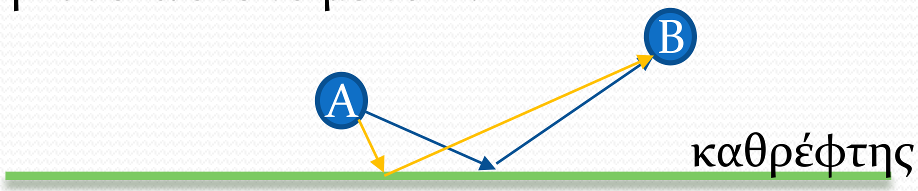
https://www.matheno.com/blog/how-to-solve-optimization-problems-in-calculus/

2. Στα πλαίσια μελέτης αναμόρφωσης του υδρευτικού συστήματος οικισμού σχεδιάζεται νέα δεξαμενή χωρητικότητας 500 m^3 με ύψος 5 m, ορθογωνική κάτοψη και δύο θαλάμους σε επαφή. Υπολογίστε τις διαστάσεις της δεξαμενής σε τρόπο ώστε να ελαχιστοποιηθεί το εμβαδό των τοιχωμάτων της. **(1 μονάδα)**

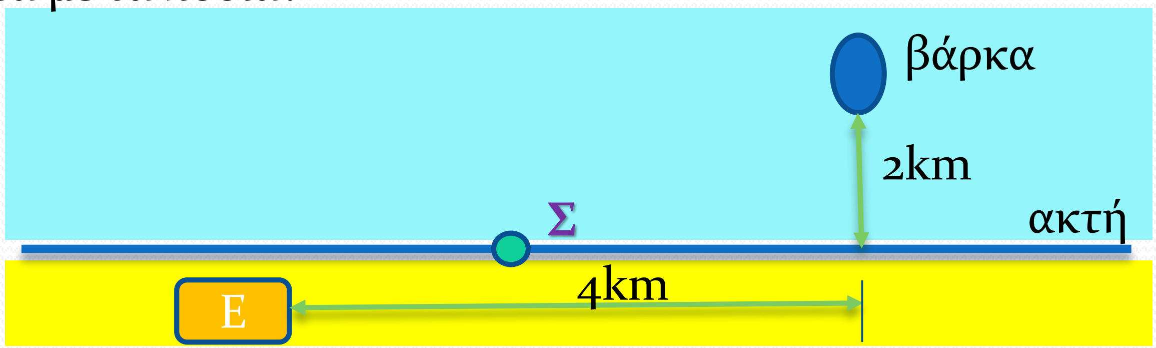
Βελτιστοποίηση στη γεωμετρία

ΑΛΛΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:

1. Βρείτε το μέγιστο εμβαδόν που μπορεί να έχει ένα τρίγωνο με δεδομένες δύο πλευρές του, α και β (Ε=1/2*α*β*ημφ)
2. Ένα αντικείμενο Α ανακλάται σε καθρέφτη για να φτάσει το είδωλό του στο σημείο Β. Ποια είναι η πορεία της φωτεινής ακτίνας αν θεωρήσουμε ότι η διαδρομή της είναι η ελάχιστη (Πρόβλημα του Ήρωνος) Υποδειξη: βρείτε το συμμετρικό του Β ως προς τον καθρέφτη και ενώστε το με το Α.

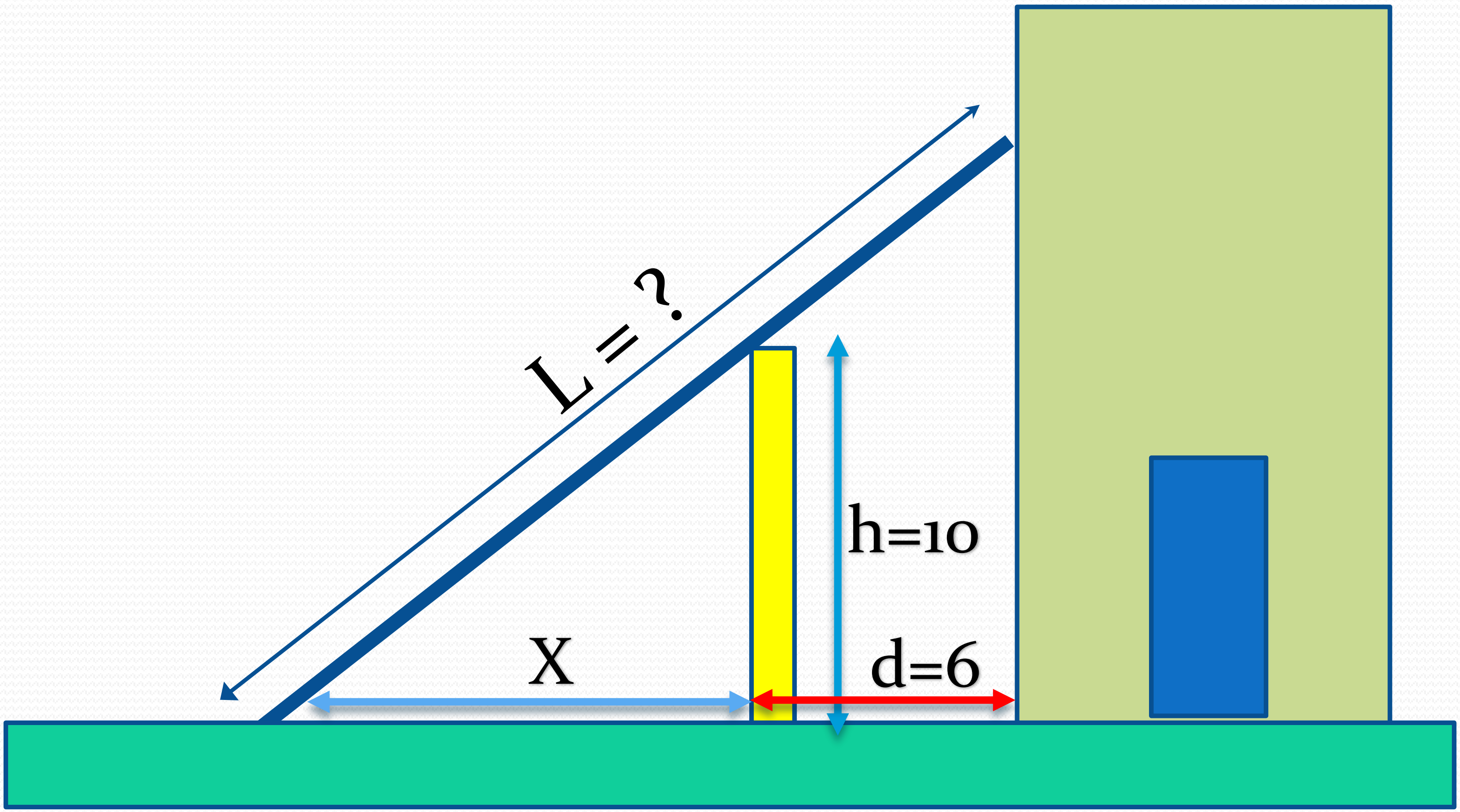


3. Μια βάρκα βρίσκεται σε μια απόσταση από ευθύγραμμη ακτή. Στην ακτή υπάρχουν εφόδια (Ε) τα οποία πρέπει να τα πάρει ο βαρκάρης όσο πιο γρήγορα γίνεται (πριν τα πάρουν άλλοι). Ο βαρκάρης μπορεί να κωπηλατήσει με ταχύτητα 5km/h και να τρέξει με 8km/h. Σε ποιο σημείο Σ της ακτής πρέπει να προσαράξει τη βάρκα του για να συνεχίσει μετά με τα πόδια?



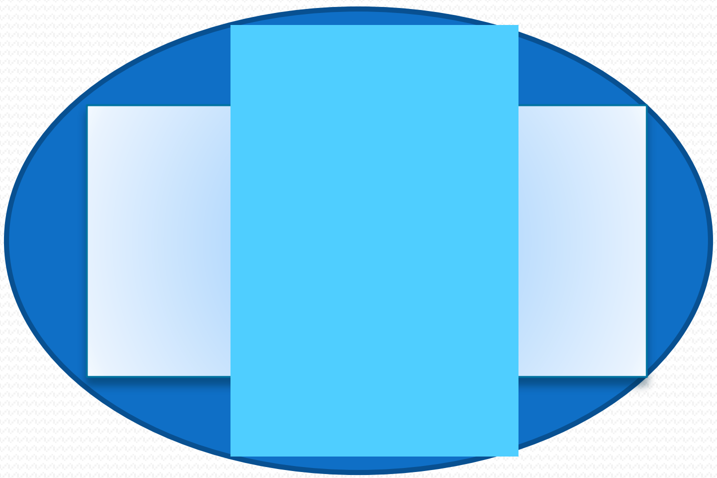
Βελτιστοποίηση στη γεωμετρία

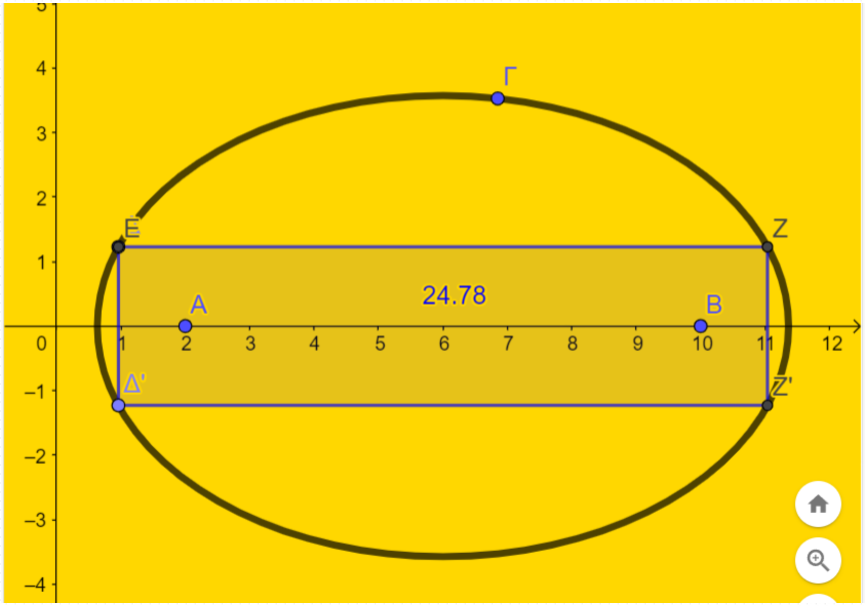
4. Ένας τοίχος 10 πόδια ύψος απέχει έξι πόδια από ένα σπίτι. Βρείτε το μήκος της συντομότερης σκάλας που θα φτάσει στο σπίτι ενώ ακουμπάει στον φράχτη.



Βελτιστοποίηση στη γεωμετρία

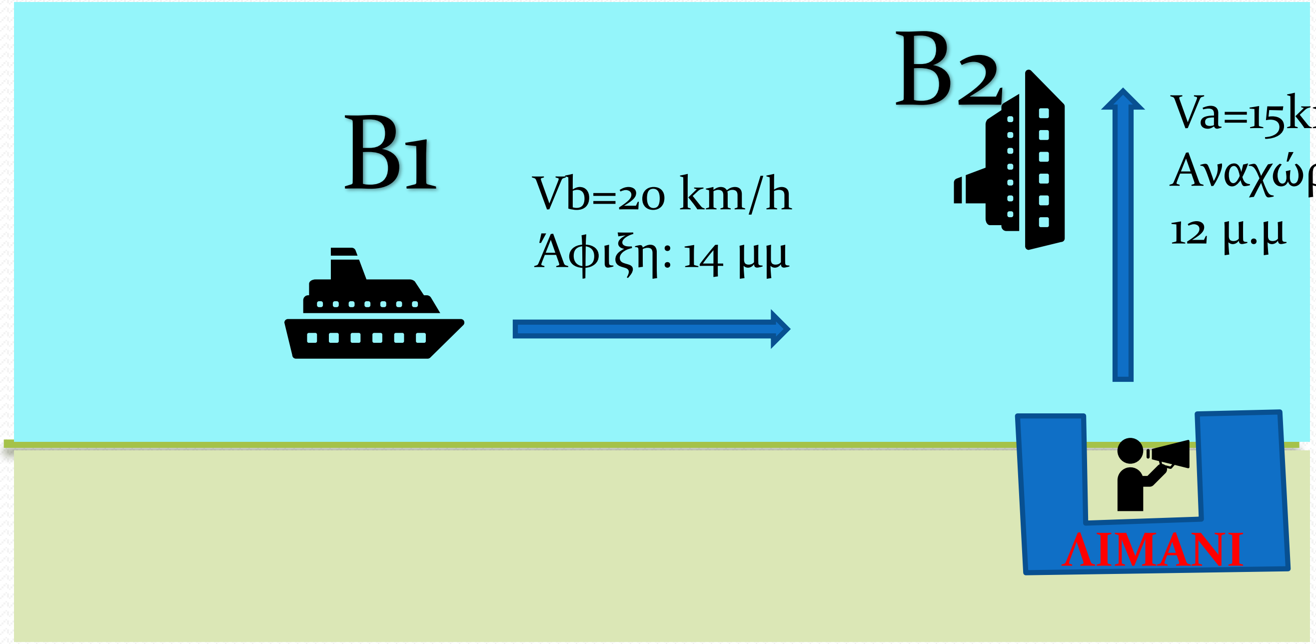
- Ποιό είναι το εμβαδόν του μεγαλύτερου ορθογωνίου που μπορεί να εγγραφεί στην έλλειψη $\chi^2+4y^2-16=0$? (Μην χρησιμοποιείτε αριθμομηχανή, μπορείτε να αφήσετε τετραγωνικές ρίζες στην απάντησή σας.)





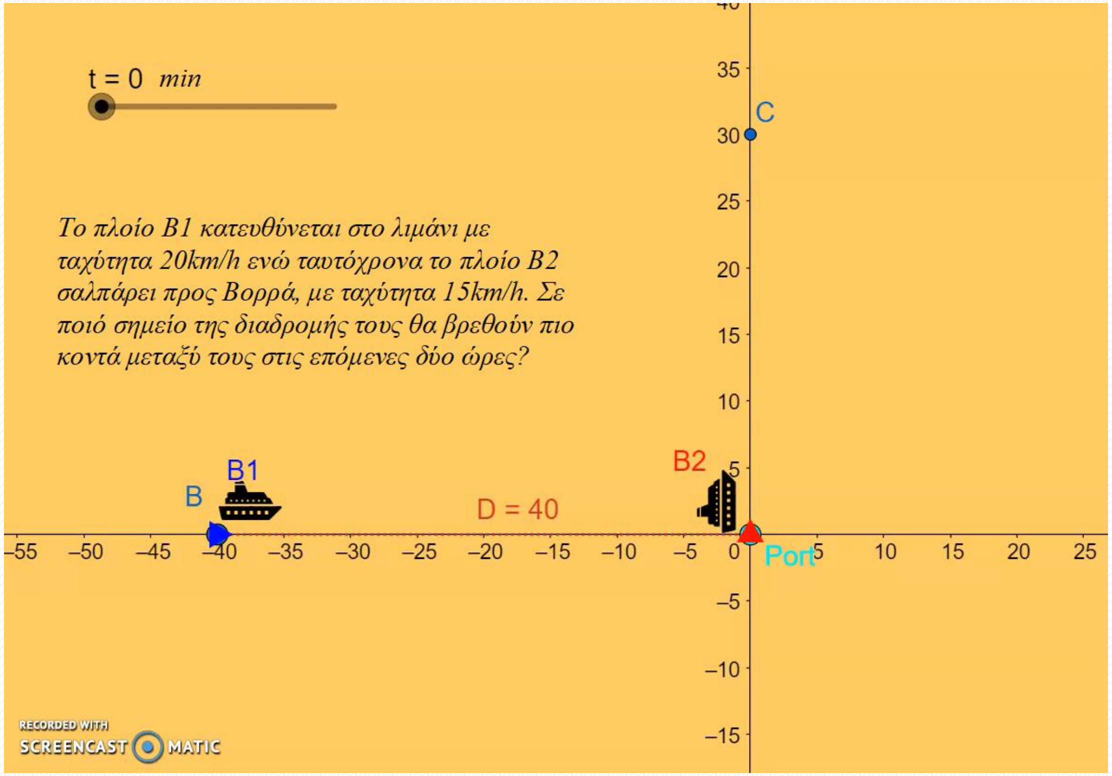
Βελτιστοποίηση στη γεωμετρία

- Το σκάφος B2 αφήνει μια αποβάθρα το μεσημέρι και ταξιδεύει βόρεια με 15 km/h. Ταυτόχρονα, το σκάφος B1 κατευθύνεται ανατολικά προς την ίδια αποβάθρα με ταχύτητα 20 km/h και φτάνει εκεί στις 2:00 μ.μ. Ποιά ώρα είναι τα δύο σκάφη πιο κοντά μεταξύ τους;



Βελτιστοποίηση στη γεωμετρία

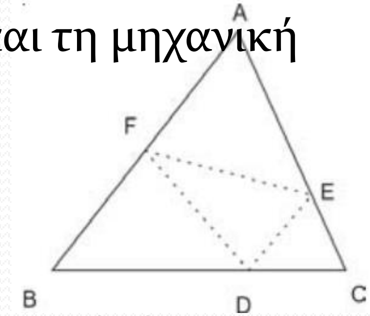
- Το σκάφος B2 αφήνει μια αποβάθρα το μεσημέρι και ταξιδεύει βόρεια με 15 km/h. Ταυτόχρονα, το σκάφος B1 κατευθύνεται ανατολικά προς την ίδια αποβάθρα με ταχύτητα 20 km/h και φτάνει εκεί στις 2:00 μ.μ. Ποιά ώρα είναι τα δύο σκάφη πιο κοντά μεταξύ τους;



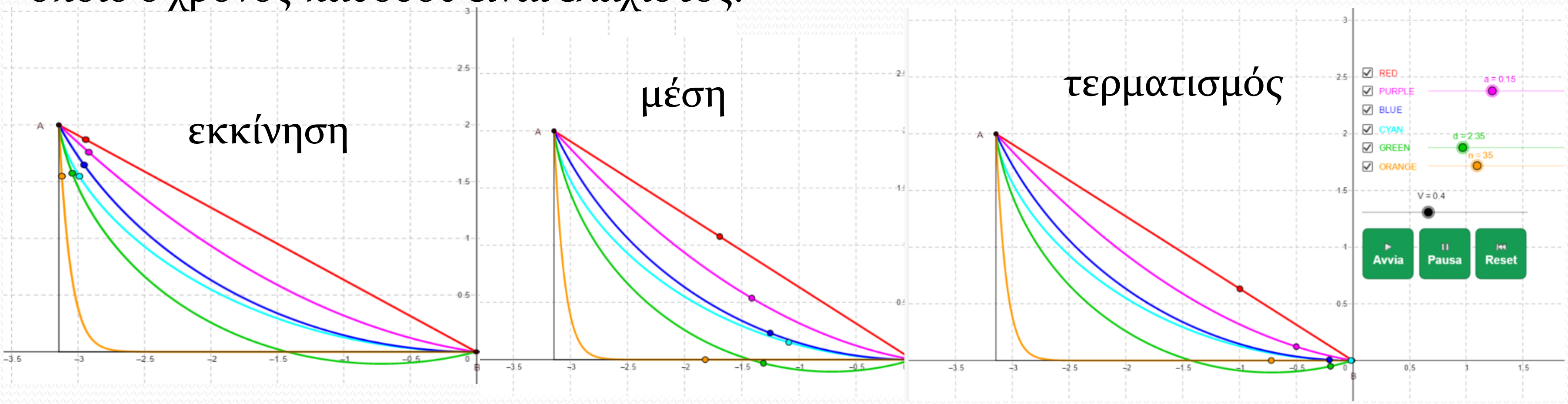
Βελτιστοποίηση στη γεωμετρία

Μερικά **ιστορικά παραδείγματα** βελτιστοποίησης στη γεωμετρία και τη μηχανική

- Το πρόβλημα του **Fagano**. Σε δεδομένο τρίγωνο εγγράψτε άλλο τρίγωνο (δλδ με τις κορυφές του πάνω στις πλευρές του μεγαλύτερου), με τη μικρότερη περίμετρο. (Είναι ποδικό τρίγωνο με κορυφές τα ίχνη των υψών).



- Το πρόβλημα της **<u>βραχυστόχρονης καμπύλης</u>**. Ο Ιωάννης Μπερνούλι λίγο πρίν το 1700, έθεσε στους γεωμέτρες (έτσι λέγονταν τότε μαθηματικοί και φυσικοί) το ακόλουθο πρόβλημα: Έστω δύο σημεία Α και Β σε διαφορετικά επίπεδα (στάθμες). Ένα μικρό σωματίδιο ολισθαίνει από το Α προς το Β υπό τη δράση της βαρύτητας, ξεκινώντας από την ηρεμία στο Α. Προσδιορίστε το σχήμα e της καμπύλης για το οποίο ο χρόνος καθόδου είναι ελάχιστος.



Για όποιον/α ενδιαφέρεται περισσότερο για τέτοια προβλήματα δείτε το Optimization with classical problems στα resources του μαθήματος στο e-class.

Βελτιστοποίηση στη γεωμετρία

ΓΕΝΙΚΕΣ ΟΔΗΓΙΕΣ

Τα προβλήματα βελτιστοποίησης στην γεωμετρία συνήθως περιλαμβάνουν την χρήση διαφορικού λογισμού (παραγώγισης) για να βρεθούν τα ακρότατα μιας συνάρτησης (μέγιστα/ελάχιστα). Στο πρώτο στάδιο πρέπει να διαμορφώσουμε την αντικειμενική συνάρτηση με βάση τα δεδομένα που μας δίνουν. Στο δεύτερο στάδιο μόνον χρησιμοποιούμε διαφορικό λογισμό. Τα βήματα είναι τα εξής:

ΠΡΩΤΟ ΣΤΑΔΙΟ

1. Φτιάχνουμε ένα σκαρίφημα, ένα σχεδιάκι του προβλήματος ΠΑΝΤΟΤΕ και εξετάζουμε δεδομένα και ζητούμενο.
2. Προσπαθούμε να βρούμε την αντικειμενική συνάρτηση και τις μεταβλητές απόφασης και να τα διατυπώσουμε.
3. Η αντικειμενική συνάρτηση θα πρέπει να είναι συνάρτηση ΜΙΑΣ μεταβλητής και μόνον. Προσπαθούμε λοιπόν να εκφράσουμε τις υπόλοιπες μεταβλητές συναρτήσει της μίας αυτής, εκμεταλλευόμενοι γνωστές σχέσεις και περιορισμούς.

ΔΕΥΤΕΡΟ ΣΤΑΔΙΟ

1. Βρίσκουμε την πρώτη παράγωγο της αντικειμενικής συνάρτησης και την εξισώνουμε με το μηδέν. Οι ρίζες θα είναι σημεία ακρότατων.
2. Για να δούμε αν είναι ελάχιστα ή μέγιστα πρέπει να εξετάσουμε το πρόσημο της δεύτερης παραγώγου.
3. Μπορεί να χρειαστεί να κάνουμε κάποια επιβεβαίωση δίνοντας τιμές.
4. Τέλος, ξανακοιτάζουμε την ερώτηση και απαντάμε με σαφήνεια.

βελτιστοποίηση

Είδος συνάρτησης	**ΜΕΘΟΔΟΙ**		
Στοχική συνάρτηση	ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΣ ΙΣΟΤΗΤΑΣ	ΑΝΙΣΟΤΙΚΟΣ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΣ	ΧΩΡΙΣ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟ
Γραμμική	Πολλαπλασιαστές Λαγκράντζ	Γραμμικός προγραμματισμός	Calculus
Μη γραμμική	Πολλαπλασιαστές Λαγκράντζ		Calculus
Σύνθετη	Προσομείωση		

ΜΕΘΟΔΟΣ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

ΜΕ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟ
ΙΣΟΤΗΤΑΣ --------- ΑΝΙΣΟΤΗΤΑΣ

ΧΩΡΙΣ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟ

Πολλαπλασιαστές Λαγκράντζ

Γραμμικός προγραμματισμός

Calculus

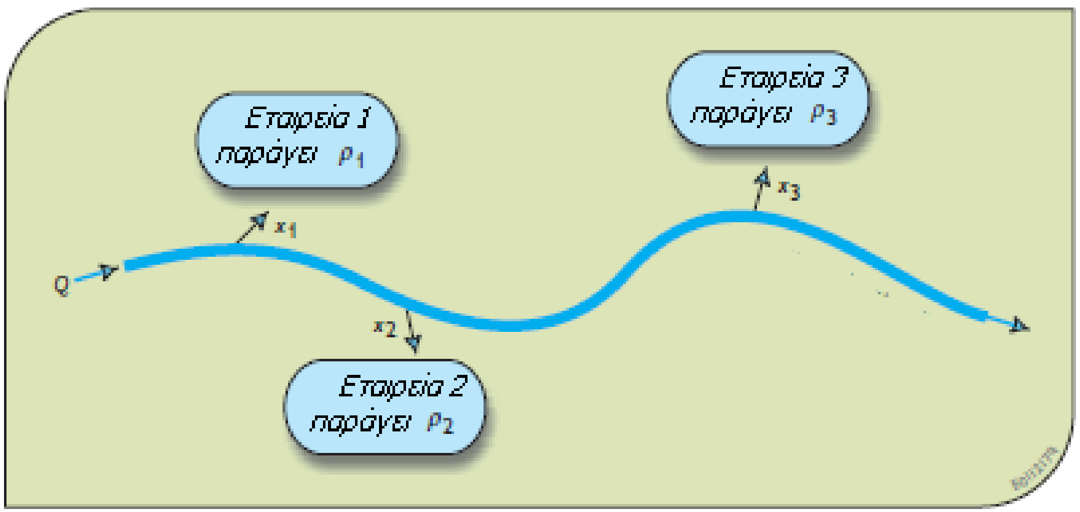
Βελτιστοποίηση - Calculus

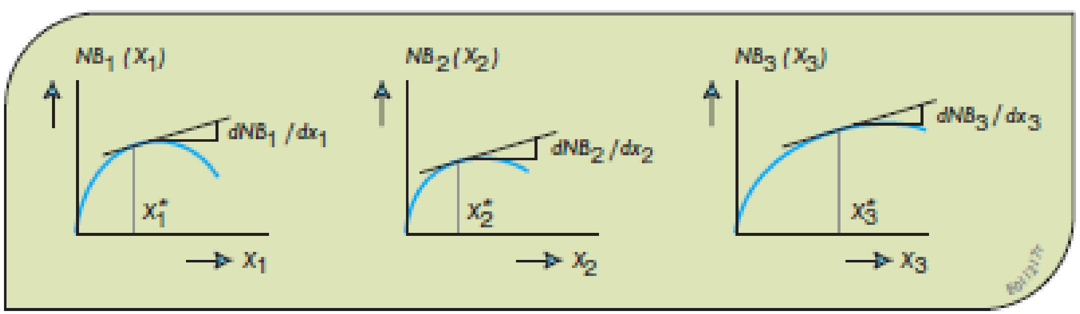
Εφαρμόζεται σε γραμμικές ή μη γραμμικές συναρτήσεις. Σε ένα τέτοιο μοντέλο οι μεταβλητές απόφασης δεν έχουν περιορισμούς και μπορούν να πάρουν οποιεσδήποτε τιμές.

* Εάν η συνάρτηση έχει **συνεχείς πρώτες και δεύτερες παραγώγους** τότε είναι σχετικά απλό να γράψουμε την συνθήκη πρώτης τάξης για βέλτιστη τιμή.
* Οι **ρίζες** της **πρώτης παραγώγου** θα είναι τα σημεία των ακρότατων.
* Διερευνούμε το πρόσημο της **δεύτερης μερικής παραγώγου**, προκειμένου να σιγουρευτούμε αν είναι μέγιστα ή ελάχιστα (αρνητική και θετική τιμή αντίστοιχα).

Βελτιστοποίηση - Calculus

- **ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1**: Τρείς εταιρείες που ανήκουν στην ίδια ιδιοκτησία, παίρνουν νερό από ποτάμι (x_i) για τις ανάγκες της παραγωγής των προϊόντων τους, ρ_i. Το καθαρό όφελος (Net Benefit) Nbi της κάθε εταιρείας από την πώληση του προϊόντος της, είναι συνάρτηση του νερού που της διατίθεται. Ζητείται το ποσό του νερού που θα πρέπει να δοθεί στην κάθε εταιρεία προκειμένου να μεγιστοποιηθεί το κέρδος της ιδιοκτησίας.





Συναρτήσεις καθαρού οφέλους:

$$NB_1(x_1) = 6x_1 - x_1^2$$

$$NB_2(x_2) = 7x_2 - 1.5x_2^2$$

$$NB_3(x_3) = 8x_3 - 0.5x_3^2$$

Μεταβλητές απόφασης: x1,x2,x3

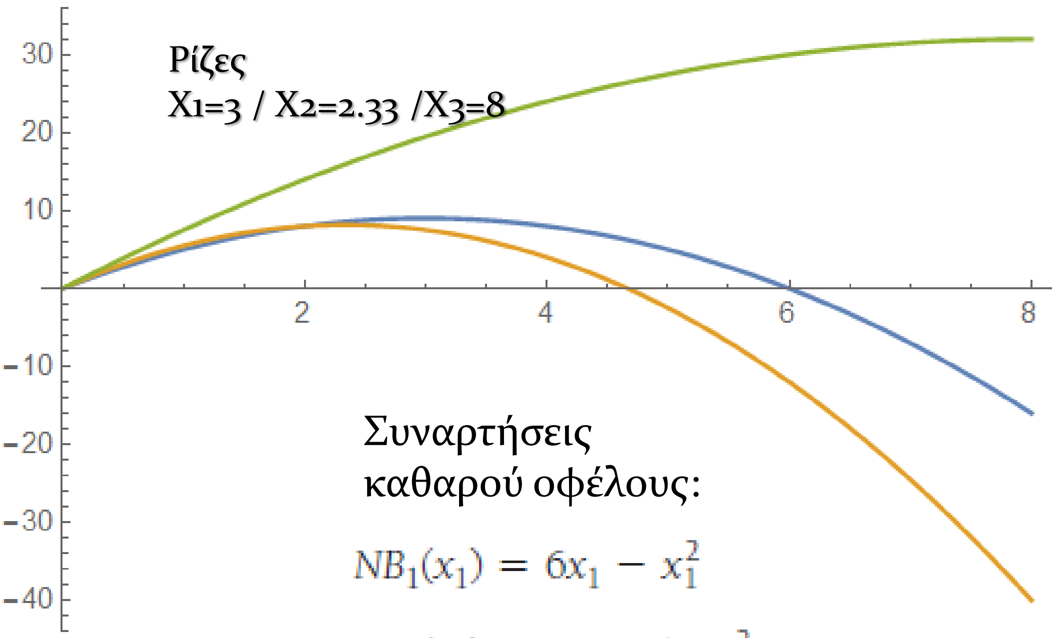
Στοχική συνάρτηση : max NB = Σ Nbi

Περιορισμοί : δεν υπάρχουν (το ποτάμι έχει νερό για όλους)

Βελτιστοποίηση - Calculus

- **ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1**:
- Μεταβλητές απόφασης: x1,x2,x3
- Στοχική συνάρτηση : max NB = Σ Nbi
- Περιορισμοί : δεν υπάρχουν (το ποτάμι έχει νερό για όλους)

```
Plot[{6 x - x^2, 7 x - 1.5 x^2, 8 x - 0.5 x^2}, {x, 0, 8}]
```



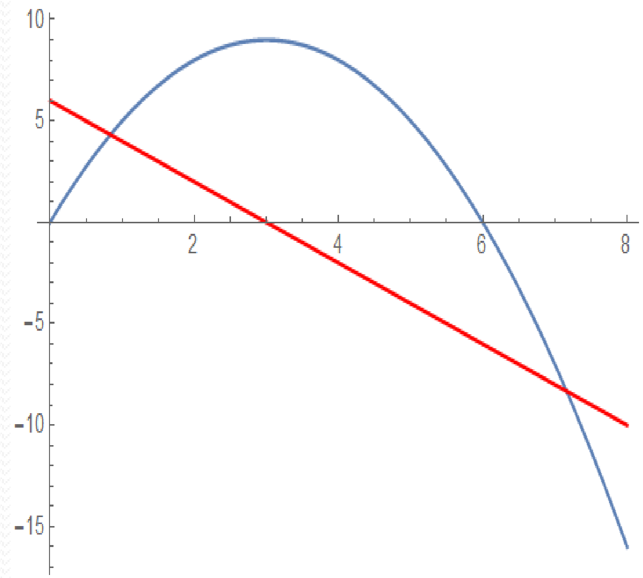
Ρίζες
X1=3 / X2=2.33 /X3=8

Συναρτήσεις καθαρού οφέλους:

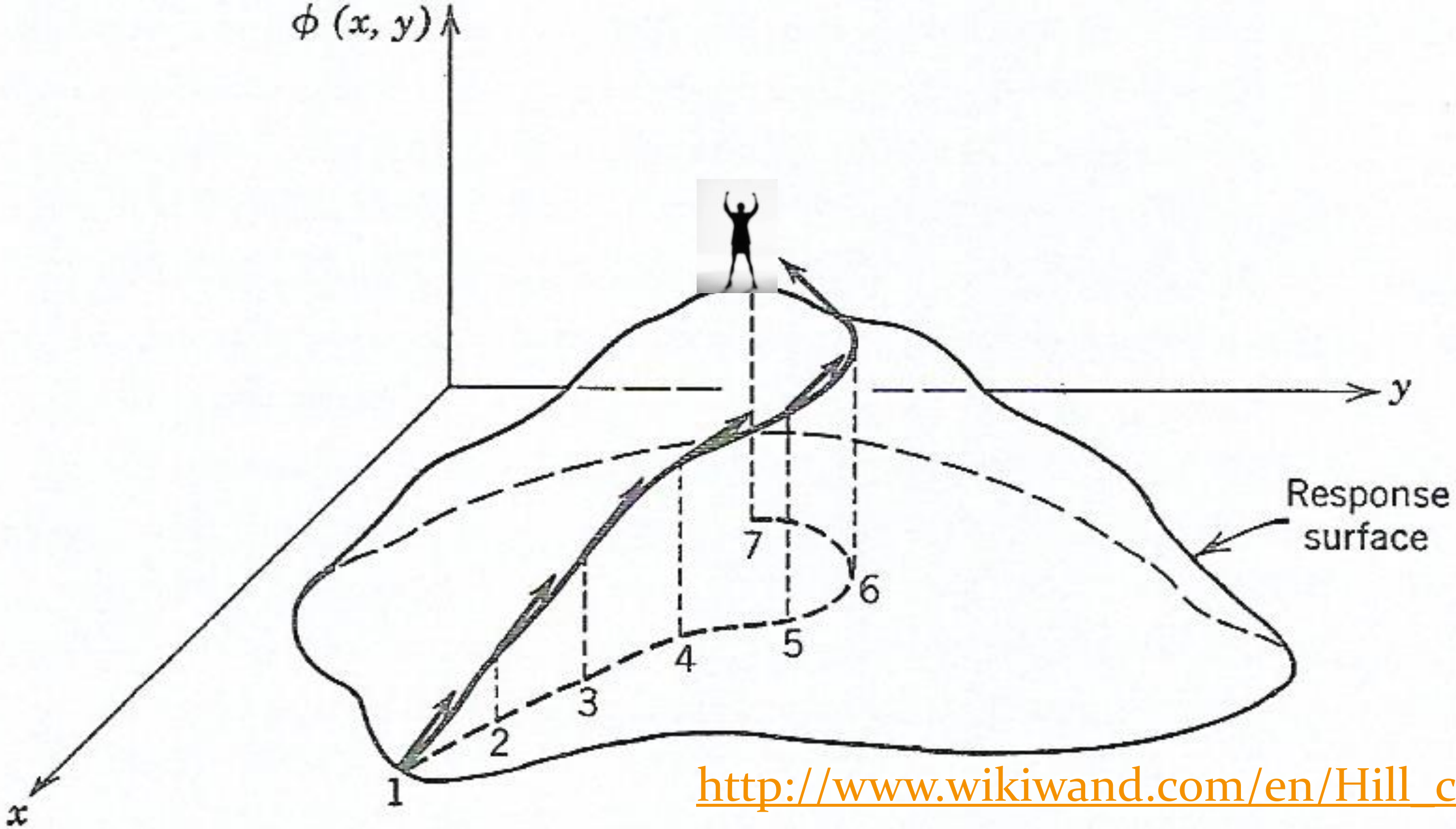
$$NB_1(x_1) = 6x_1 - x_1^2$$

$$NB_2(x_2) = 7x_2 - 1.5x_2^2$$

$$NB_3(x_3) = 8x_3 - 0.5x_3^2$$



Βελτιστοποίηση
αποτομότερη ανάβαση λόφου

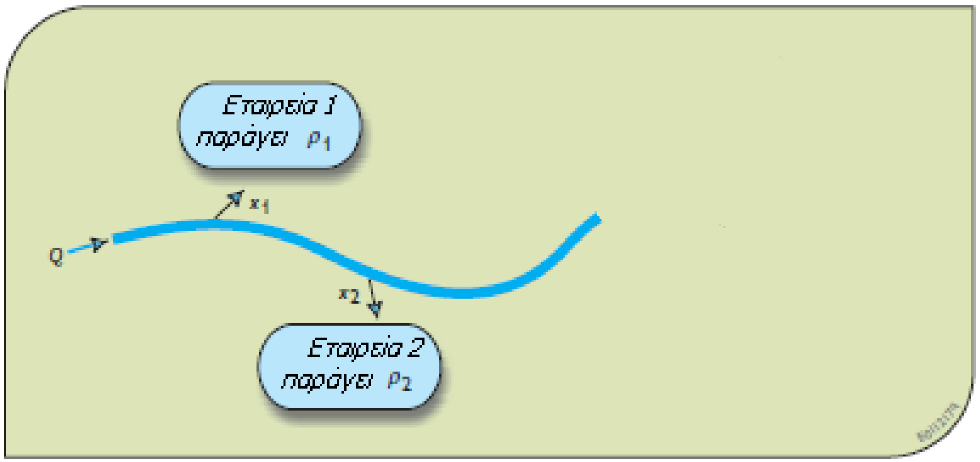


http://www.wikiwand.com/en/Hill_climbing

Fig. 17-4. Illustrative example of finding maximum of a function, φ, of two variables, x and y by a discrete step, steepest-ascent technique. (After ***Hufschmidt, Footnote 2, Fig.***

Βελτιστοποίηση – πολλαπλασιαστές Λακράντζ

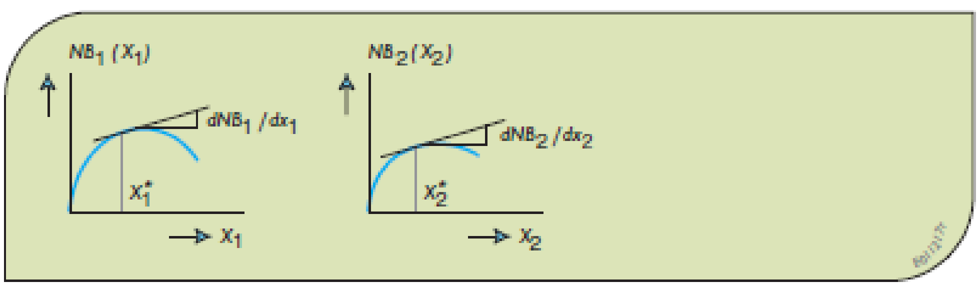
- **ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2**: Δύο εταιρείες που ανήκουν στην ίδια ιδιοκτησία, παίρνουν νερό από ποτάμι (x_i) για τις ανάγκες της παραγωγής των προϊόντων τους, p_i. Το καθαρό όφελος (Net Benefit) Nbi της κάθε εταιρείας από την πώληση του προϊόντος της, είναι συνάρτηση του νερού που της διατίθεται. Ζητείται το ποσό του νερού που θα πρέπει να δοθεί στην κάθε εταιρεία προκειμένου να μεγιστοποιηθεί το κέρδος της ιδιοκτησίας, **υπό τον περιορισμό $x_1+7x_2= 6$**



Συναρτήσεις καθαρού οφέλους:

$$NB_1(x_1) = 6x_1 - x_1^2$$

$$NB_2(x_2) = 7x_2 - 1.5x_2^2$$

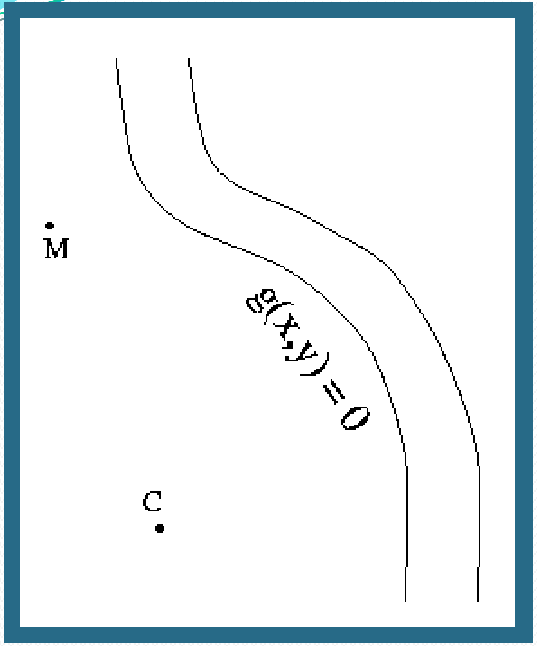


Μεταβλητές απόφασης: x_1, x_2

Στοχική συνάρτηση : maximize NB = Σ Nbi

Περιορισμοί : **$x_1+7x_2=6$**

Βελτιστοποίηση – πολ/στες Λακράντζ

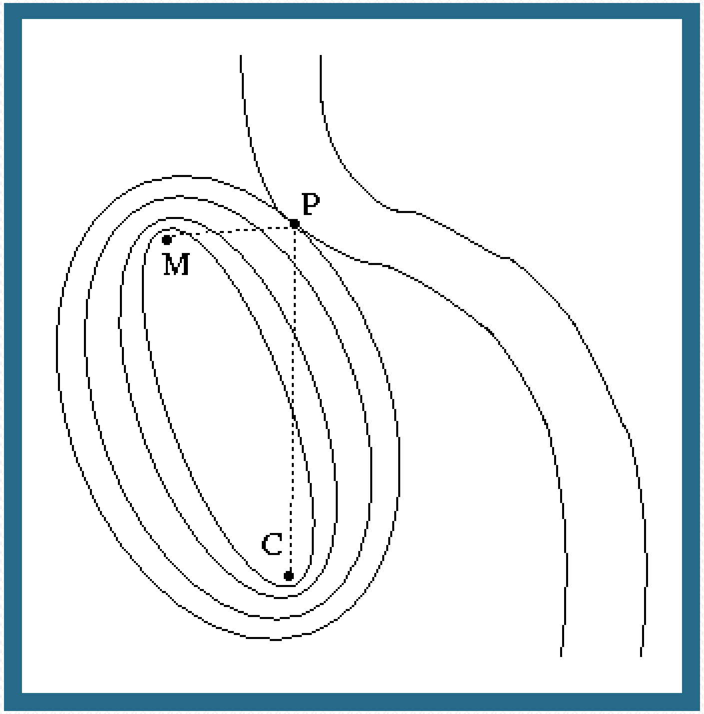


ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΓΑΛΑΤΟΥΣ
Η ωραία Γαλατού θέλει να γυρίσει από την αγελάδα (M) στον καλό της τσοπανάκο (C) , όσο πιο γρήγορα γίνεται. Πρέπει όμως, στον γυρισμό, να περάσει από το ποτάμι να ξεπλύνει την καρδάρα της. Ποιά διαδρομή πρέπει να ακολουθήσει;

Από την γεωμετρία ξέρουμε ότι **η έλλειψη** είναι ο γεωμετρικός τόπος σημείων που τα άθροισμα των αποστάσεών τους από δύο σημεία (τις δύο εστίες) είναι σταθερό.

Επομένως, αν γράψουμε ελλείψεις με εστίες τα M και C, μέχρι που κάποια απ’αυτές ακουμπήσει στο Ποτάμι P, θα έχουμε την συντομότερη διαδρομή.

Στις εφαρμογές της μεθόδου το ποτάμι είναι η συνάρτηση περιορισμού (constraint function) και οι ελλείψεις είναι οι καμπύλες level curves.



Βελτιστοποίηση - – πολ/στες Λακράντζ

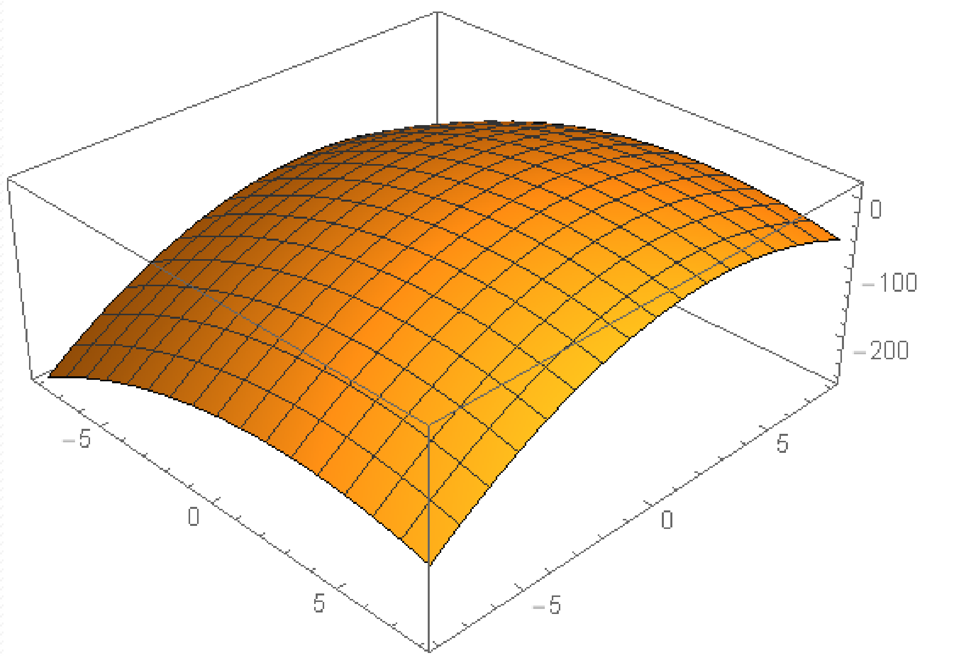
- **ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2**:
- Μεταβλητές απόφασης: x1,x2
- Στοχική συνάρτηση : max NB = Σ Nbi
- Περιορισμοί : $\mathbf{x_1+7x_2=6}$

Συναρτήσεις καθαρού οφέλους:

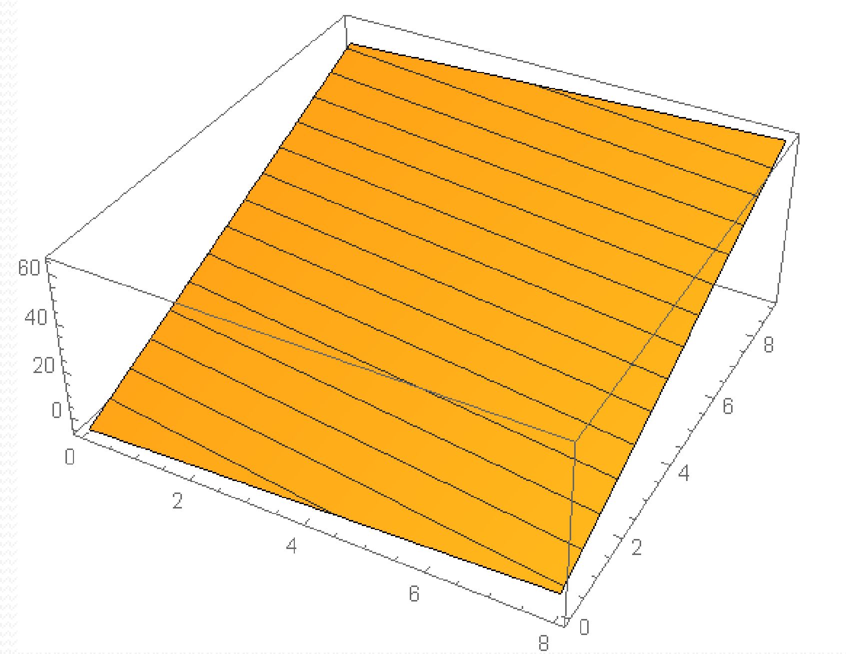
$$NB_1(x_1) = 6x_1 - x_1^2$$

$$NB_2(x_2) = 7x_2 - 1.5x_2^2$$

```
Plot3D[6 x - x^2 + 7 y - 1.5 y^2, {x, -8, 8}, {y, -8, 8}]
```




```
Plot3D[{ x + 7 y - 6}, {x, 0, 8}, {y, 0, 9}, Mesh → Aut
Mesh → All, MeshFunctions → Automatic, Mesh → Auto
```



Βελτιστοποίηση – πολ/στες Λακράντζ

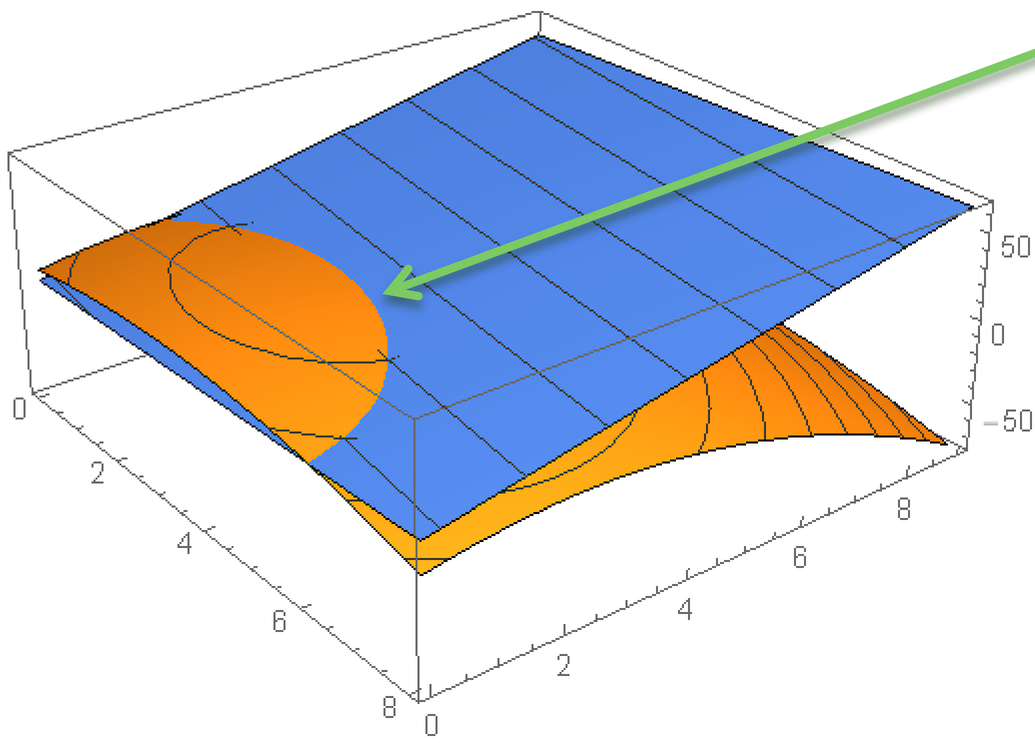
- **ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2**:
- Μεταβλητές απόφασης: x1,x2
- Στοχική συνάρτηση : max NB = Σ Nbi
- Περιορισμοί : **x1+7x2= 6**

Συναρτήσεις καθαρού οφέλους:

$$NB_1(x_1) = 6x_1 - x_1^2$$

$$NB_2(x_2) = 7x_2 - 1.5x_2^2$$

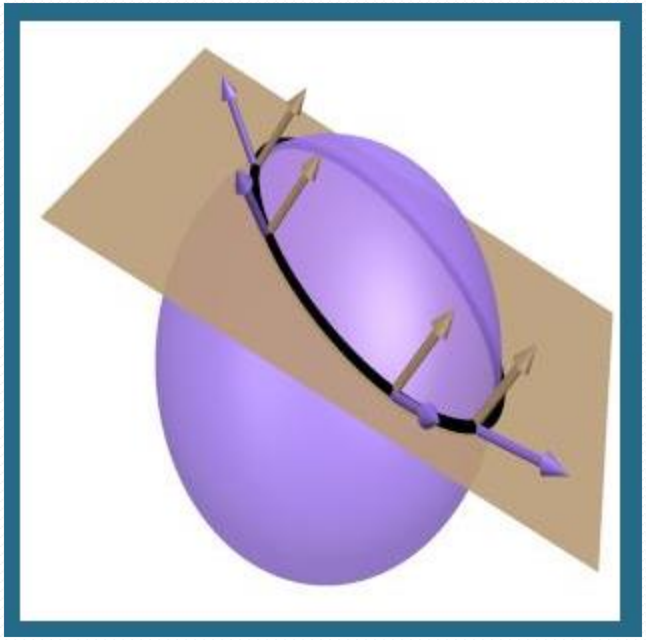
```
Plot3D[{6 x - x^2 + 7 y - 1.5 y^2, x + 7 y - 6}, {x, 0, 8}, {y, 0, 9}
 MeshFunctions → {#3 &}, Mesh → All, MeshFunctions → Automat
 MeshFunctions → {#3 &}]
```

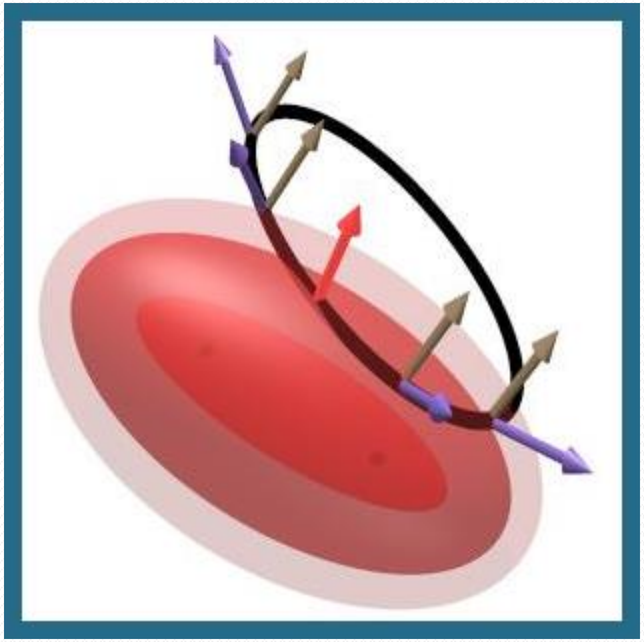


Οι λύσεις μας είναι στην τομή των δυό επιφανειών (στοχικής συνάρτησης και συνάρτησης περιορισμών) και πρέπει να βρούμε ποιό σημείο της καμπύλης αυτής έχει το μεγαλύτερο υψόμετρο (= τιμή της στοχικής Συνάρτησης)

Βελτιστοποίηση – πολ/στες Λακράντζ

ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ ΣΕ Ν ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ





http://www.slimy.com/~steuard/teaching/tutorials/Lagrange.html

Βελτιστοποίηση – πολ/στες Λακράντζ

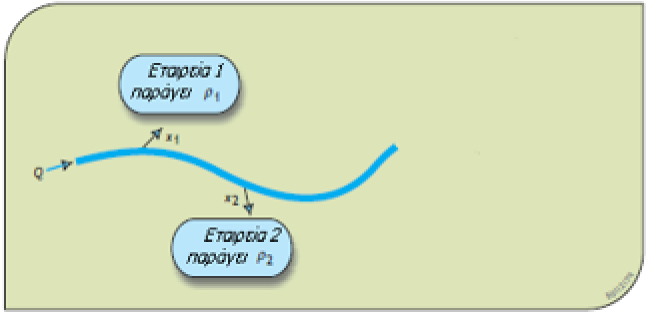
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 λυμένο :

- Μεταβλητές απόφασης: x1,x2
- Στοχική συνάρτηση : maximize NB = Σ Nbi
- Περιορισμός : **x1+7x2= 6**

Συναρτήσεις καθαρού οφέλους:

$$NB_1(x_1) = 6x_1 - x_1^2$$

$$NB_2(x_2) = 7x_2 - 1.5x_2^2$$



ΛΥΣΗ

1. Langr(x,y,lamda) = $6x-x^2+7y-1.5y^2-\lambda(x+7y-6)$
2. Lx=∂ (Langr) /∂x = 6-2x-λ
3. Ly=∂ (Langr) /∂y = 7-3y-14λ
4. Lλ=∂ (Langr) /∂λ = x—7y + 6

Εξισώνουμε τις 2 και 3 με μηδέν και παίρνουμε τα x,y συναρτήσει του λ (x=3-λ/2, y = 7/3-7λ/3)

5. Αντικαθιστούμε τις τιμές x,y στην 4, εξισώνουμε με μηδέν και βρίσκουμε το λ (λ=79,8/101=0,79)
6. Με γνωστή την τιμή του λ επιστρέφουμε στις 2 και 3 και βρίσκουμε τα x (=2.61) και y (=0.49)
7. Για αυτές τις τιμές η στοχική συνάρτηση NB (x,y) παίρνει τη μέγιστη τιμή την υποκείμενη στον περιορισμό (11.92).

Βελτιστοποίηση – πολ/στες Λακράντζ

Cobb-Douglas Production Function

Η αρχική συνάρτηση παραγωγής Cobb-Douglas, που αναπτύχθηκε τη δεκαετία του 1920 από τον οικονομολόγο Paul Douglas και τον μαθηματικό Charles Cobb, περιγράφει τη σχέση μεταξύ της ποσότητας της παραγωγής και δύο συντελεστών παραγωγής, του κεφαλαίου και της εργασίας, ως εξής:

$$Q = AK^{\alpha}L^{\beta} \text{ where } \alpha + \beta = 1$$

το K, αντιπροσωπεύει τη χρηματική αξία των φυσικών περιουσιακών στοιχείων που είναι απαραίτητα για την παραγωγή, όπως κτίρια, μηχανήματα και εξοπλισμός. Η εργασία,μεγάλο L, αντιπροσωπεύει την παραγωγική προσπάθεια του εργατικού δυναμικού, μετρούμενη σε ανθρωποώρες. Ο εκθέτης α είναι μια τιμή μεταξύ 0 και 1 που μέτρά την ανταπόκριση ή την ελαστικότητα της παραγωγής σε σχέση με το κεφάλαιο. Για παράδειγμα, μια ελαστικότητα του α=0,5, ή 50%, σημαίνει ότι κάθε δολάριο επένδυσης κεφαλαίου μεταφράζεται σε αύξηση της παραγωγής αξίας 0,50 $. Ο άλλος εκθέτης, β, είναι η ελαστικότητα της παραγωγής σε σχέση με την εργασία. Οι δύο ελαστικότητες είναι συμπληρωματικά ποσοστά που αθροίζονται έως και 100%, αντανακλώντας την αναλογική συμβολή κάθε παράγοντα σε οποιαδήποτε αύξηση της παραγωγής.

Το A είναι μια αναλογία της παραγωγής προς τη συνολική εισροή και αντικατοπτρίζει τη συνολική ποιότητα ή αποτελεσματικότητα της παραγωγικής διαδικασίας. Καθώς η τεχνολογία βελτιώνεται και οι δεξιότητες και η εκπαίδευση του εργατικού δυναμικού αυξάνονται, οι επιχειρήσεις θα μετατρέπουν την εργασία και το κεφάλαιο σε προϊόντα παραγωγής πιο αποτελεσματικά, πράγμα που σημαίνει ότι η συνολική παραγωγικότητα των συντελεστών θα πρέπει να αυξάνεται με την πάροδο του χρόνου.

Βελτιστοποίηση – πολ/στες Λακράντζ

- **2ο ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ λυμένο**

Example 1

We will revisit the Cobb-Douglas function $f(x,y) = x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}$ and the budget constraint function $100x + 100y = 400000$. We will use the method of Lagrange multiplier described above to find the optimal solutions.

First we will create the Lagrange equation

$L(x,y) = x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}} - \lambda(100x + 100y - 400000$	**<u>Βήμα 1ο:</u>** Δημιουργήστε την συνάρτηση Λαγκράντζ L(x,y) = f(x,y)– λ[g(x,y) – k]

Now find $L_x = 0$, $L_y = 0$ and $L_\lambda = 0$.

$L_x = \frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}}y^{\frac{1}{3}} - 100\lambda$ $Ly = \frac{1}{3}x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{-2}{3}} - 100\lambda$ $L_\lambda = -100x - 100y + 400000$	**<u>Βήμα 2ο:</u>** Βρείτε τις μερικές παραγώγους ως προς κάθε μιά μεταβλητή x,y και ως προς τον πολλαπλασιαστή Λαγκράντζ, λ

Εδώ, τα x,y εμφανίζονται μαζί στις πρώτες παραγώγους, οπότε δεν μπορούμε να συνεχίσουμε όπως στο πρώτο παράδειγμα.

Βελτιστοποίηση – πολ/στες Λακράντζ

Οπότε, θα εξισώσουμε τις Lx, Ly με το μηδέν και θα λύσουμε ως προς λ και τις δύο

Using $L_x = 0$, $L_y = 0$ to solve for x and y

Set the first derivative $L_x = 0$ to get and solve for $\lambda = \dfrac{\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}}y^{\frac{1}{3}}}{100}$ and then set $L_y = 0$ and

solve for λ again to get $\lambda = \dfrac{\frac{1}{3}x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{-2}{3}}}{100}$

We now need to use the results to turn the equation $L_\lambda = 0$ into an equation of one variable only. To do this we will set the λ equations equal to each other and solve for y as shown below.

$$\frac{\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}}y^{\frac{1}{3}}}{100} = \frac{\frac{1}{3}x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{-2}{3}}}{100} \;\text{->}\; \frac{\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}}y^{\frac{1}{3}}}{100} = \frac{\frac{1}{3}x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{-2}{3}}}{100} \;\text{->}$$ multiply both sides by 100 and then

by 3 to get $2x^{\frac{-1}{3}}y^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{-2}{3}} \rightarrow \dfrac{2y^{\frac{1}{3}}}{y^{\frac{-2}{3}}} = \dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{-1}{3}}} \rightarrow 2y = x \rightarrow y = \dfrac{1}{2}x$

Now substitute the values of y into $L_\lambda = 0$ to get $-100x - 100(\frac{1}{2}x) + 400000 = 0$ and

solve for x = 2666.66 and then find y to be y = 1333.33.

The value of x and y that will maximize production is x = 2666 and y = 1333 and the maximum production is 2116 units.

Βήμα 3ο: Θέστε κάθε μιά από τις μερικές παραγώγους ίσες με μηδέν για να πάρετε Lx=0, Ly=0, Lλ = 0. Χρησιμοποιώντας τις Lx=0, Ly=0, λύστε για λ με όρους x,y .

Βήμα 4ο: Εξισώνουμε τα λ που βρήκαμε και βρίσκουμε το x συναρτήσει του y (ή το ανάποδο).

Βήμα 5ο: Με το x συναρτήσει του y, επιστρέφουμε στην Lλ = 0 με μόνο άγνωστο το y και λύνουμε. Μετά, υπολογίζουμε και το x.

Βήμα 6ο: Τέλος, με τις τιμές αυτές που βρήκαμε υπολογίζουμε την τιμή της στοχικής συνάρτησης (μέγιστη τιμή υποκείμενη στον περιορισμό).

Βελτιστοποίηση – πολ/στες Λακράντζ

<u>Διαδικασία εφαρμογής της μεθόδου</u>
Για την μεγιστοποίηση ή ελαχιστοποίηση της συνάρτησης f(x,y) υποκείμενης σε περιορισμούς g(x,y) = k, κάνουμε τα επόμενα βήματα:

Βήμα 1ο: Δημιουργήστε την συνάρτηση Λαγκράντζ. Αυτή δημιουργείται από τον συνδυασμό της στοχικής συνάρτησης και της συνάρτησης περιορισμών ως εξής:
$L(x,y) = f(x,y) - \lambda[g(x,y) - k]$

Βήμα 2ο: Βρείτε τις μερικές παραγώγους ως προς κάθε μιά μεταβλητή x,y και ως προς τον πολλαπλασιαστή Λαγράντζ λ. (αν έχουμε πάνω από έναν περιορισμούς θα έχουμε και ισάριθμα λ_

Βήμα 3ο: Εξισώνοντας τις μερικές παραγώγους με μηδέν θα έχουμε τόσες εξισώσεις όσες και οι άγνωστοι. Κοιτάζουμε ποια είναι η προσφορότερη μέθοδος να λύσουμε το σύστημα (δες τα δύο προηγούμενα λυμένα παραδείγματα)

Αν M είναι η μέγιστη ή ελάχιστη τιμή της f(x,y) με περιορισμό g(x,y) = k τότε ο πολ/στής λ είναι ο ρυθμός αλλαγής της M συναρτήσει του k και δείχνει την μεταβολή στην M για μιά μονάδα αύξησης της k.

Βελτιστοποίηση – πολ/στες Λακράντζ

Παράδειγμα 3 – για σπίτι

Ένας περιορισμός ισότητας
Minimize: $f(x,y) = x^2 + y^2$
Με περιορισμό : $x + 2y - 1 = 0$

Δύο περιορισμοί ισότητας
minimize $g(x, y) = x^2 + 4y^2$
Με περιορισμούς :
$x + y = 0$
$x^2 + y^2 - 1 = 0$

Βελτιστοποίηση – πολ/στες Λακράντζ

Παράδειγμα 4 – για σπίτι

Έστω η στοχική συνάρτηση

$$p(x,y) = -2x^2 + 60x - 3y^2 + 72y + 100$$

δίνει το κέρδος μιας βιοτεχνίας επίπλου ανά εβδομάδα, όπου

x, πλήθος καρεκλών
y, πλήθος ανακλίντρων

Το μέγιστό κέρδος συμβαίνει με x=15 και y = 12. (χωρίς περιορισμό)

Λόγω όμως ανεπάρκειας πόρων μπορούν να κατασκευαστούν μόνο 20 καρέκλες την εβδομάδα

x+y=20

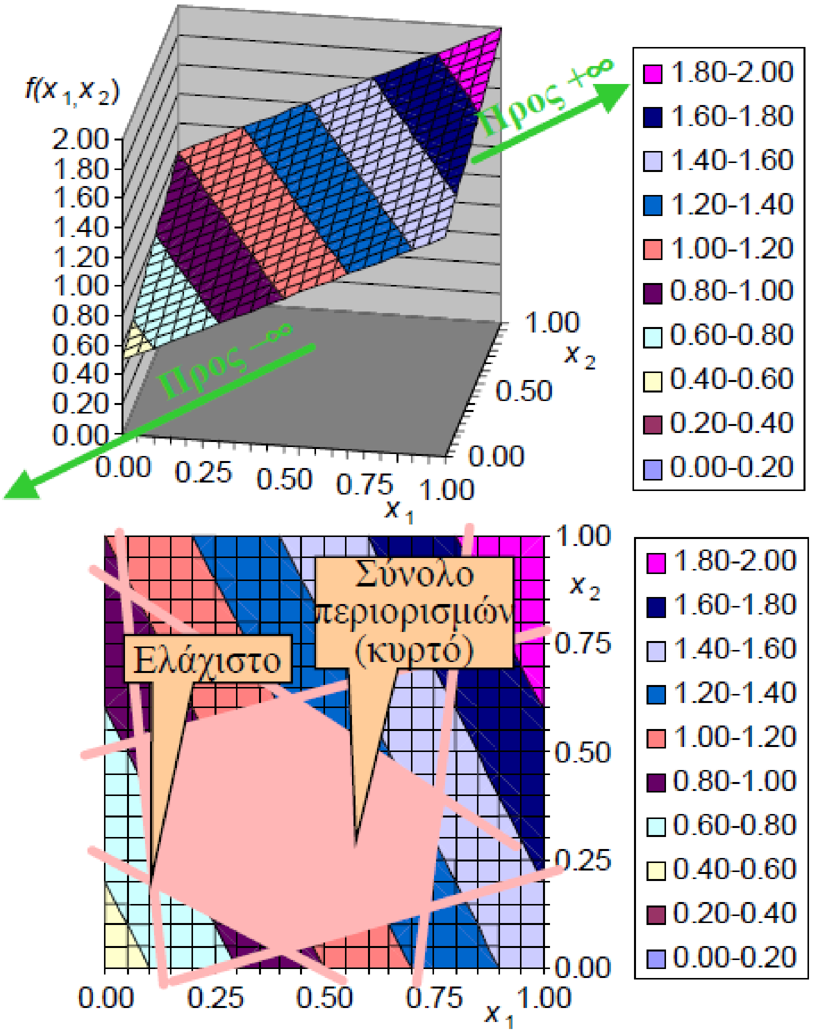
Πόσα κομμάτια τότε από το κάθε έπιπλο πρέπει να κατασκευάσει η βιοτεχνία για να έχει το μέγιστο κέρδος?

Βελτιστοποίηση - Γραμ. προγραμματισμός

ΜΕΘΟΔΟΣ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

ΜΕ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟ		ΧΩΡΙΣ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟ
ΙΣΟΤΗΤΑΣ	ΑΝΙΣΟΤΗΤΑΣ	
Πολλαπλασιαστές Λαγκράντζ	Γραμμικός προγραμματισμός	Calculus

Ειδική περίπτωση: γραμμικός προγραμματισμός



Γραμμικός προγραμματισμός: Πρόβλημα προσδιορισμού ακροτάτου στο οποίο τόσο η αντικειμενική συνάρτηση $f(\mathbf{x})$, όσο και οι περιορισμοί (εξισωτικοί $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ και ανισωτικοί $\mathbf{g}(\mathbf{x})$) είναι γραμμικές συναρτήσεις.

Παρατήρηση 1: Αν δεν υπάρχουν περιορισμοί το πρόβλημα δεν έχει λύση (η $f(\mathbf{x})$ απειρίζεται – βλ. διπλανό σχήμα που παριστάνει τη συνάρτηση $f(\mathbf{x}) = x_1 + 0.5\, x_2 + 0.5$).

Παρατήρηση 2: Το σύνολο των γραμμικών περιορισμών (εξισωτικών και ανισωτικών) είναι πάντα ένα κυρτό σύνολο που ονομάζεται πολύεδρο (στις δύο διαστάσεις πολύγωνο – βλ. διπλανό σχήμα).

Παρατήρηση 3: Η λύση του προβλήματος (το ελάχιστο της συνάρτησης) είναι μια κορυφή του πολυέδρου. Κατά συνέπεια το πρόβλημα ανάγεται στη συστηματική πορεία προς αυτή την κορυφή.

Βελτιστοποίηση - Γραμ. προγραμματισμός

Παράδειγμα 1 - Εκφώνηση

Πρόκειται να υλοποιηθεί ένα έργο άρδευσης - μια αρδευτική περίμετρος. Το διαθέσιμο νερό ανά καλλιεργητική περίοδο είναι 1800 μονάδες.

Δύο ειδικές καλλιέργειες η Α και η Β θα καλλιεργηθούν, και οι ανάγκες τους για νερό είναι 3 και 2 μονάδες αντίστοιχα ανά στρέμμα. Κάθε στρέμμα Α αποφέρει 300€ ενώ το Β αποφέρει 500 € /στρ.

Υπάρχει επίσης εκτίμηση ότι αν διατεθούν παραπάνω από 400 στρ. στην Α και 600 στρ. στην Β, οι επιπτώσεις στην αγορά θα είναι αντίστροφες.

ΖΗΤΕΙΤΑΙ: Η διατιθέμενη έκταση για κάθε καλλιέργεια που θα μεγιστοποιήσει το κέρδος.

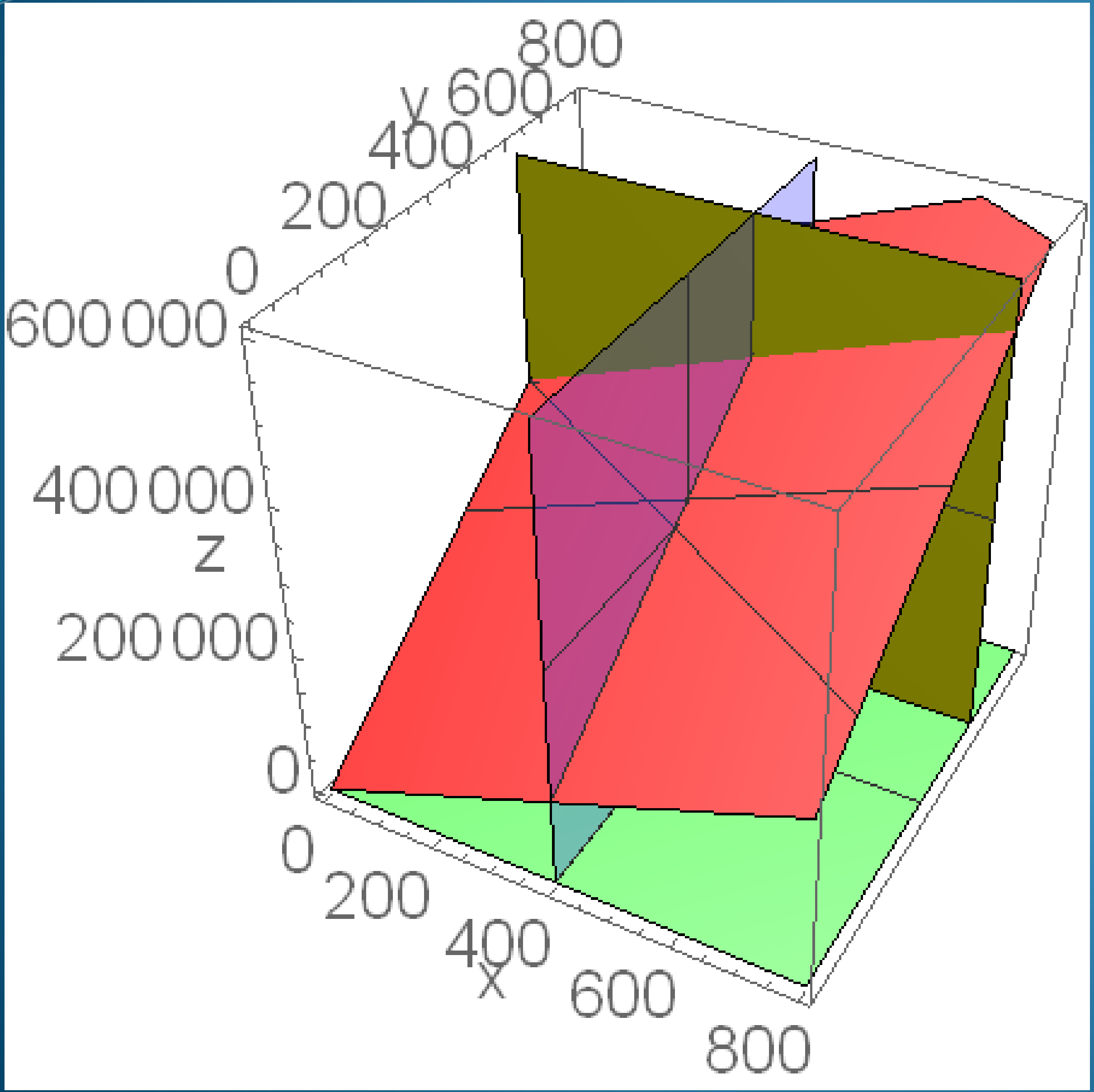
Παράδειγμα 1 - μορφοποίηση

Μεταβλητές απόφασης, X_1 και X_2 είναι τα στρέμματα που θα διατεθούν στις καλλιέργειες Α και Β.

Στοχική συνάρτηση που πρέπει να μεγιστοποιηθεί είναι η συνάρτηση κέρδους
Maximize $300\ X_1 + 500\ X_2$

Οι **περιορισμοί** που επιβάλλονται είναι
$X_1 < 400$
$X_2 < 600$
$3\ X_1 + 2\ X_2 < 1800$
$X_1 > 0,\ X_2 > 0$

Βελτιστοποίηση - Γραμ. προγραμματισμός



Maximize 300 X1 +500 X2

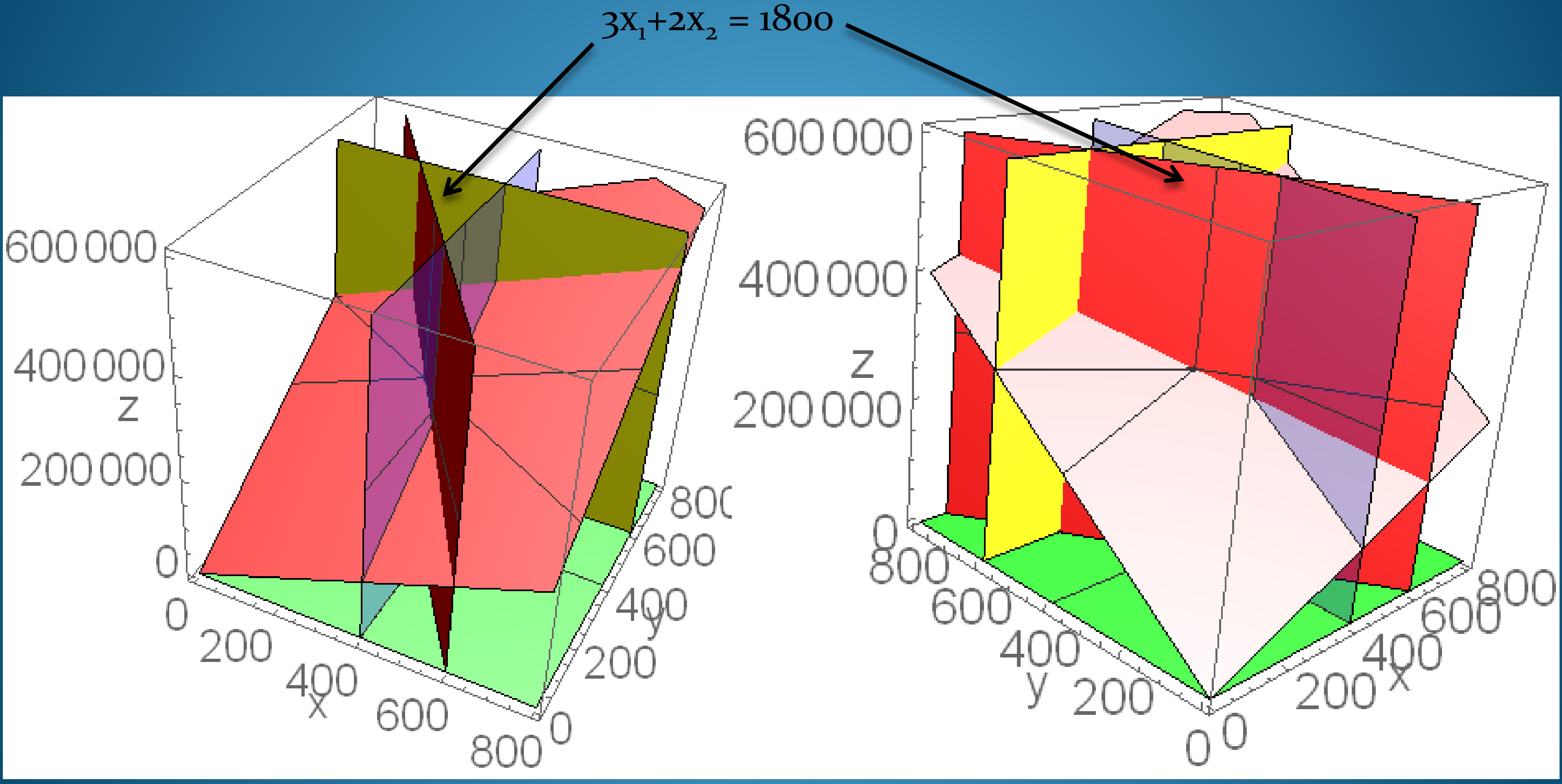
Οι **περιορισμοί** που επιβάλλονται είναι

0<X1 < 400

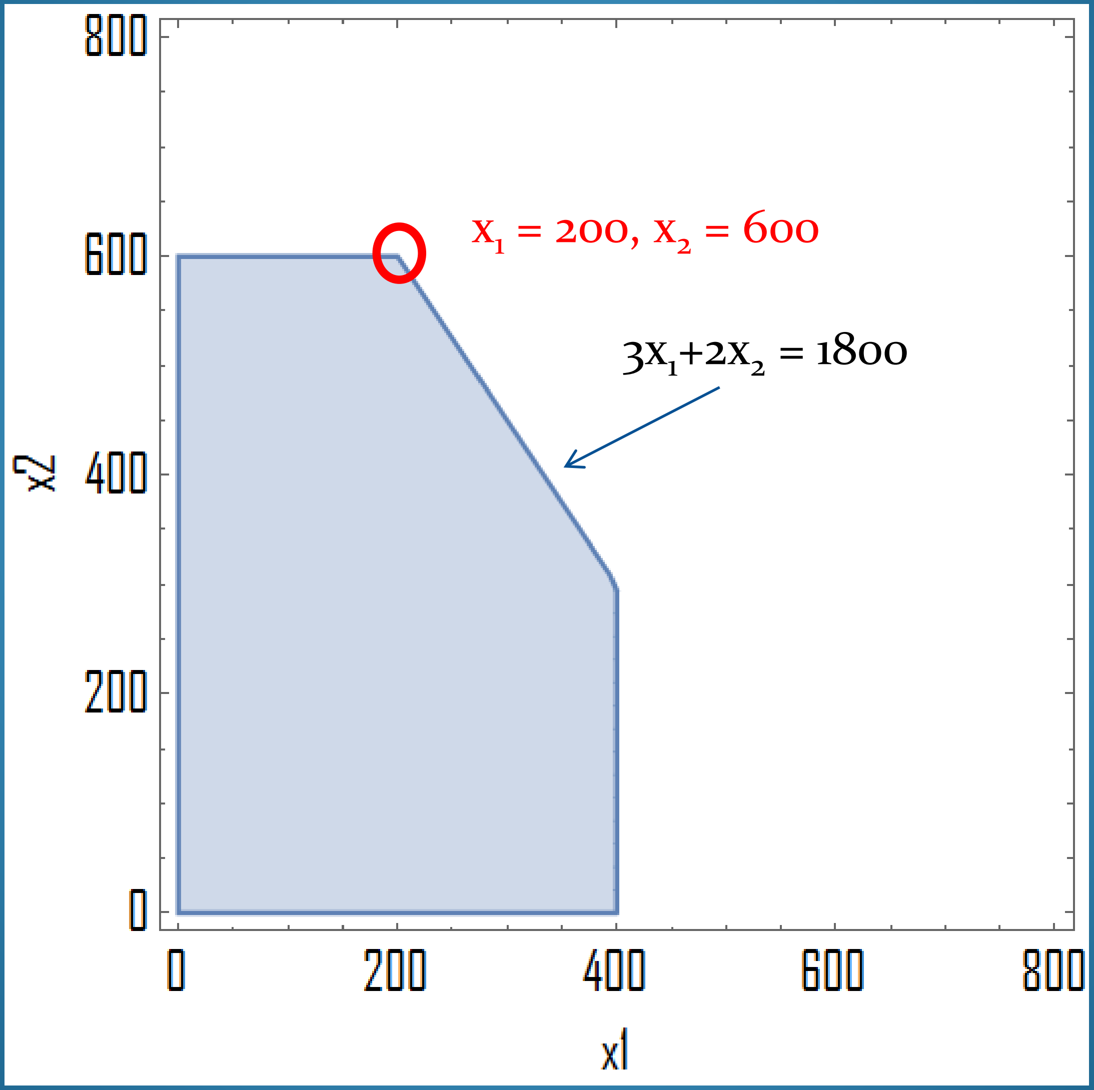
0<X2 < 600

3 X1 + 2 X2 < 1800

Βελτιστοποίηση - Γραμ. προγραμματισμός



Βελτιστοποίηση - Γραμ. προγραμματισμός

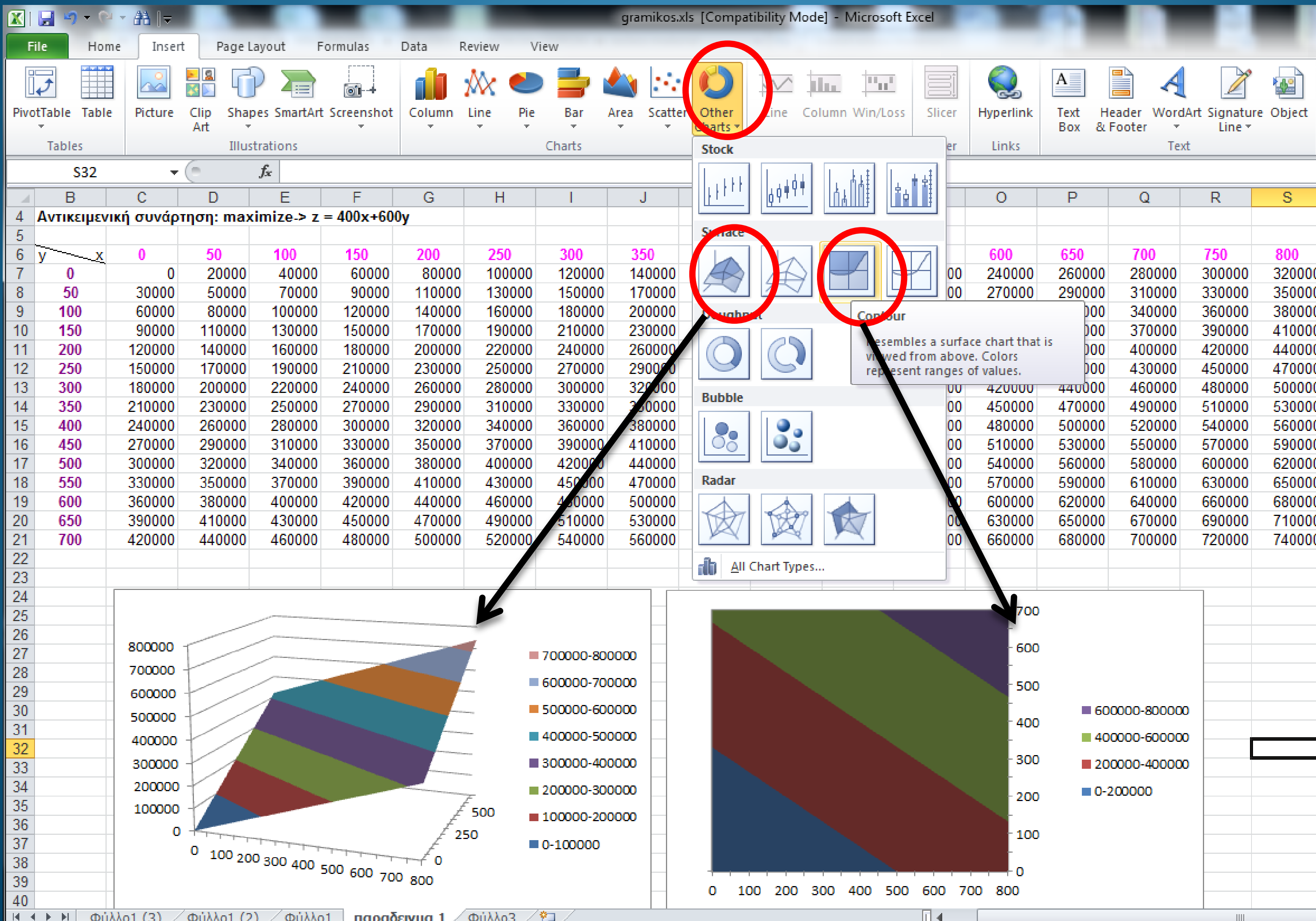


Εφικτή πολιτική

Πολύεδρο
Εφικτής
Πολιτικής

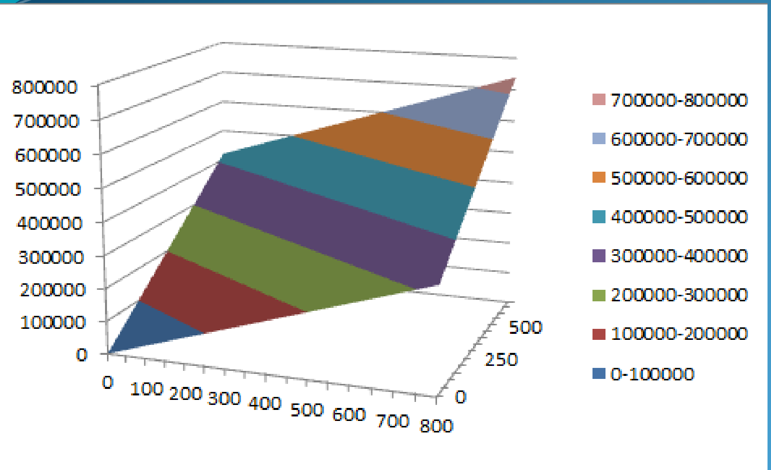
Βελτιστοποίηση - Γραμ. προγραμματισμός

Κατασκευή διαγραμμάτων επιφάνειας στο Excell: grammikos.xls

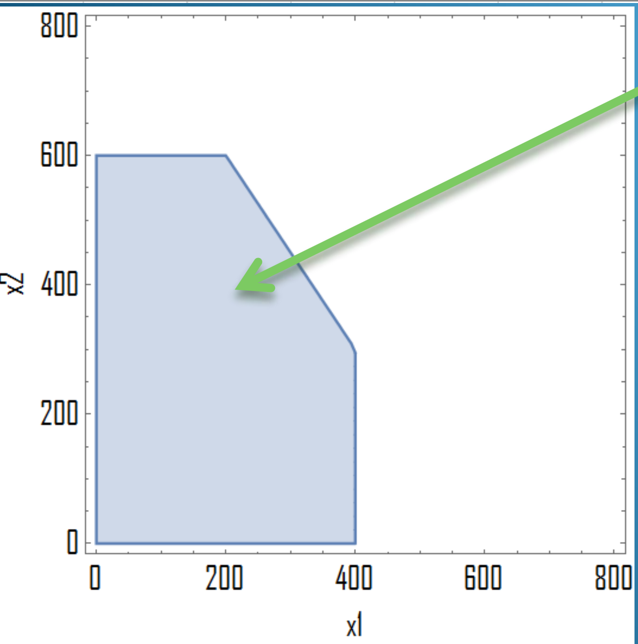


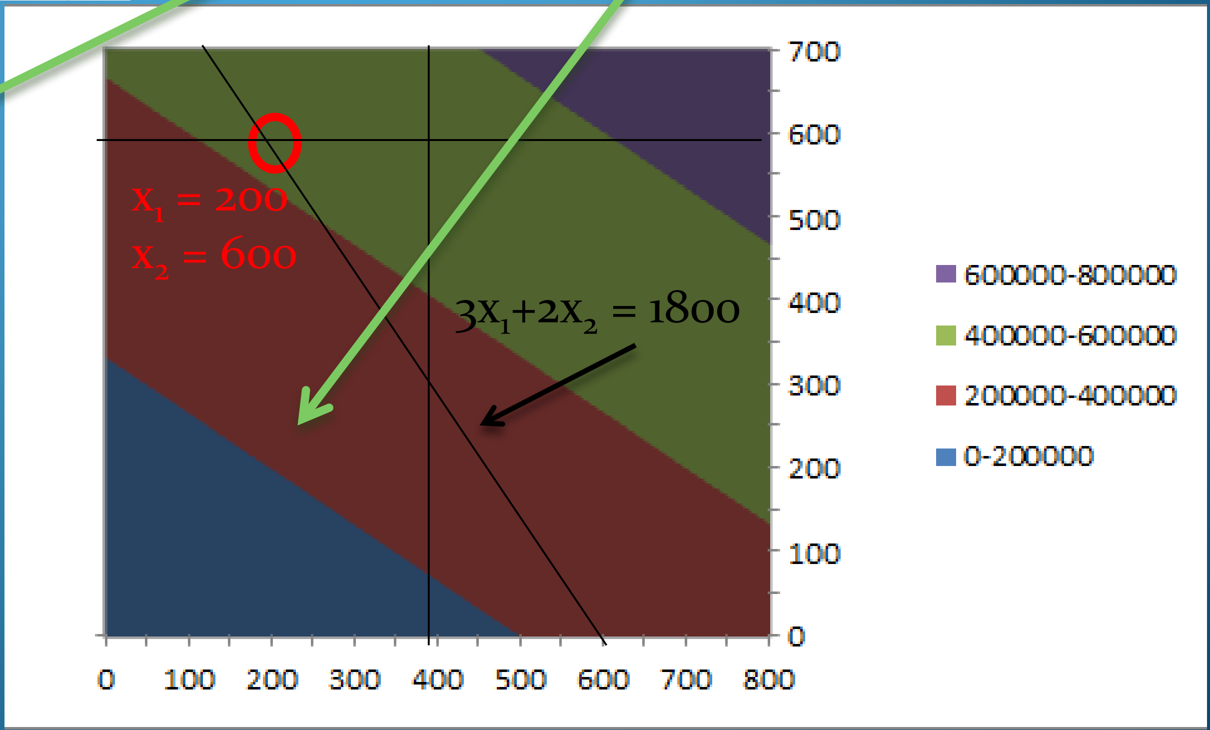
Βελτιστοποίηση - Γραμ. προγραμματισμός

Κατασκευή διαγραμμάτων επιφάνειας στο Excel: grammikos.xls



Πολύεδρο
Εφικτής
Πολιτικής





Βελτιστοποίηση - Γραμ. προγραμματισμός

- Στα περισσότερα προβλήματα βελτιστοποίησης εμφανίζονται πολλές μεταβλητές απόφασης και περιορισμοί έτσι ώστε να μην είναι δυνατή μια γραφική λύση.
- Για αυτά τα προβλήματα έχει αναπτυχθεί ο αλγόριθμος Simplex (Dantzig, 1963) που στο Excell εκτελείται από το πρόσθετο Solver.

Βελτιστοποίηση - Γραμ. προγραμματισμός

Παράδειγμα 2

Μία βιοτεχνία επίπλων κατασκευάζει τέσσερα είδη τραπεζιών. Κάθε τραπέζι απαιτεί έναν αριθμό ωρών λειτουργίας της μηχανής παραγωγής, έναν αριθμό ανθρωποωρών και έναν αριθμό μονάδων ξύλου. Στον πίνακα 9.1 παρουσιάζονται οι απαιτήσεις αυτές και το κέρδος (σε €) από την πώληση κάθε τραπεζιού. Για την επόμενη εβδομάδα, η βιοτεχνία διαθέτει 400 ώρες λειτουργίας της μηχανής, 600 ανθρωποώρες και 1.000 μονάδες ξύλου. Η αγορά θέτει ορισμένους περιορισμούς σχετικά με το μέγιστο αριθμό τραπεζιών που μπορούν να πουληθούν. Συγκεκριμένα, είναι αδύνατο να πουληθούν πάνω από 100 τραπέζια τύπου 1, 200 τραπέζια τύπου 2, 50 τραπέζια τύπου 3 και 100 τραπέζια τύπου 4. Το πρόβλημα είναι η ανεύρεση του αριθμού των τραπεζιών κάθε τύπου που πρέπει να παραχθούν ώστε να μεγιστοποιηθεί το κέρδος της βιοτεχνίας.

Πίνακας 9.1 Απαιτήσεις πόρων και μοναδιαία κόστη τραπεζιών.

τύπος	ώρες μηχανής	ανθρωποώρες	μονάδες ξύλου	μοναδιαίο κέρδος
Τραπέζι 1	2	4	6	50
Τραπέζι 2	1	2	2	17
Τραπέζι 3	3	1	1	36
Τραπέζι 4	2	2	2	25

Βελτιστοποίηση - Γραμ. προγραμματισμός

Παράδειγμα 2

Αν x1,x2,x3,x4 ο αριθμός των παραγόμενων τραπεζιών τότε η **<u>διατύπωση του προβλήματος</u>** αλγεβρικά είναι η παρακάτω:

Μία βιοτεχνία επίπλων κατασκευάζει τέσσερα είδη τραπεζιών. Κάθε τραπέζι απαιτεί έναν αριθμό ωρών λειτουργίας της μηχανής παραγωγής, έναν αριθμό ανθρωποωρών και έναν αριθμό μονάδων ξύλου. Στον πίνακα 9.1 παρουσιάζονται οι απαιτήσεις αυτές και το κέρδος (σε €) από την πώληση κάθε τραπεζιού. Για την επόμενη εβδομάδα, η βιοτεχνία διαθέτει 400 ώρες λειτουργίας της μηχανής, 600 ανθρωποώρες και 1.000 μονάδες ξύλου. Η αγορά θέτει ορισμένους περιορισμούς σχετικά με το μέγιστο αριθμό τραπεζιών που μπορούν να πουληθούν. Συγκεκριμένα, είναι αδύνατο να πουληθούν πάνω από 100 τραπέζια τύπου 1, 200 τραπέζια τύπου 2, 50 τραπέζια τύπου 3 και 100 τραπέζια τύπου 4. Το πρόβλημα είναι η ανεύρεση του αριθμού των τραπεζιών κάθε τύπου που πρέπει να παραχθούν ώστε να μεγιστοποιηθεί το κέρδος της βιοτεχνίας.

Πίνακας 9.1 Απαιτήσεις πόρων και μοναδιαία κόστη τραπεζιών.

τύπος	ώρες μηχανής	ανθρωπο ώρες	μονάδες ξύλου	μοναδιαίο κέρδος
Τραπέζι 1	2	4	6	50
Τραπέζι 2	1	2	2	17
Τραπέζι 3	3	1	1	36
Τραπέζι 4	2	2	2	25

Να μεγιστοποιηθεί η συνάρτηση:

$$50\,x_1 + 17\,x_2 + 36\,x_3 + 25\,x_4 \qquad (9.1)$$

Υπό τους περιορισμούς:

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 \le 400 \quad \text{(ώρες μηχανής)} \qquad (9.2)$$

$$4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \le 600 \quad \text{(ανθρωποώρες)} \qquad (9.3)$$

$$6x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \le 1.000 \quad \text{(μονάδες ξύλου)} \qquad (9.4)$$

$$x_1 \le 100 \quad \text{(πωλήσεις τραπεζιού 1)} \qquad (9.5)$$

$$x_2 \le 200 \quad \text{(πωλήσεις τραπεζιού 2)} \qquad (9.6)$$

$$x_3 \le 50 \quad \text{(πωλήσεις τραπεζιού 3)} \qquad (9.7)$$

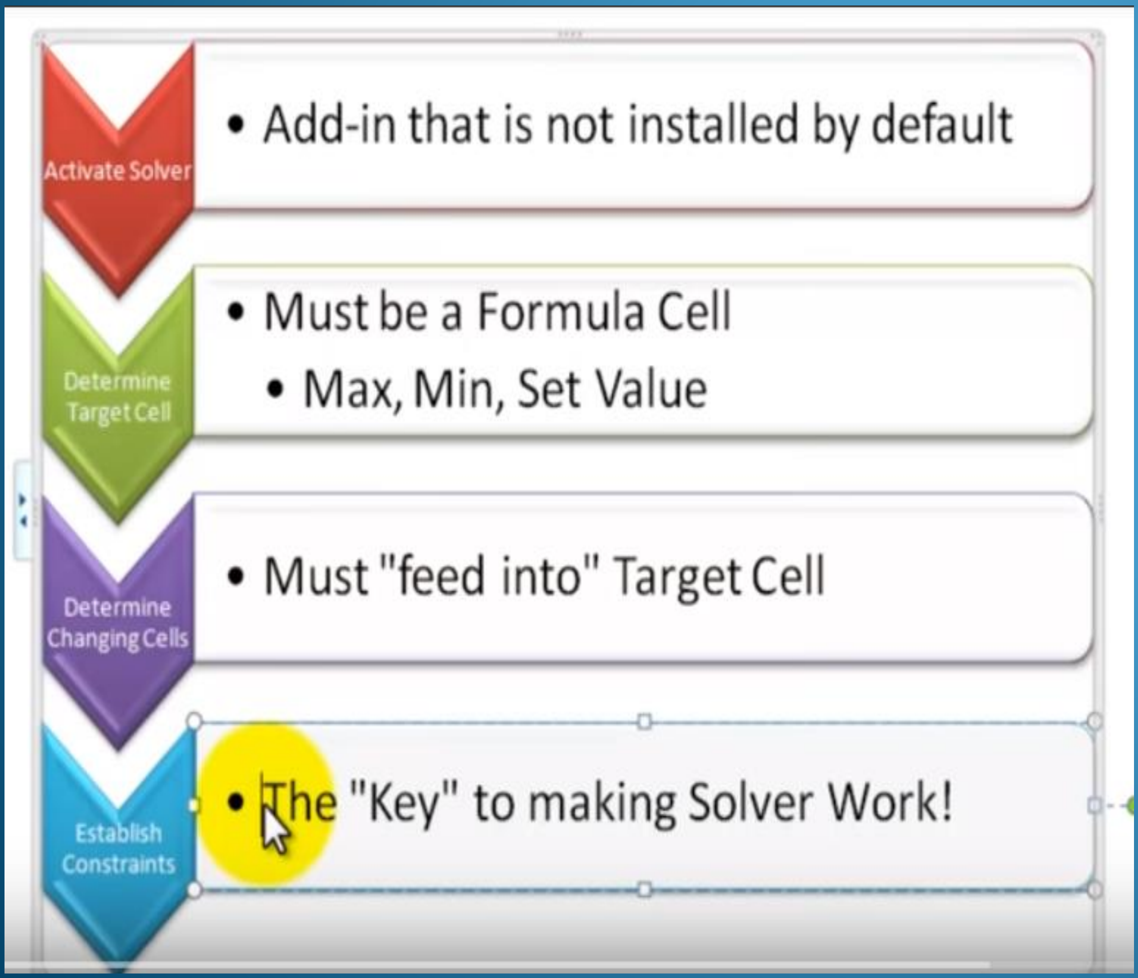
$$x_4 \le 100 \quad \text{(πωλήσεις τραπεζιού 4)} \qquad (9.8)$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \quad \text{(μη-αρνητικοί περιορισμοί)} \qquad (9.9)$$

Η σχέση (9.1) αντιπροσωπεύει το συνολικό κέρδος από την πώληση των τραπεζιών και είναι η αντικειμενική συνάρτηση. Οι μεταβλητές x_1, x_2, x_3 και x_4 αποτελούν τις μεταβλητές απόφασης. Οι υπόλοιπες ανισότητες αντιπροσωπεύουν τους περιορισμούς του προβλήματος.

Βελτιστοποίηση - Γραμ. προγραμματισμός

ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ SOLVER ΤΟΥ EXCELL



Σημεία προσοχής για τον Solver

Ο Solver είναι ένα Add-in στο Excell που πρέπει να εγκατασταθεί και να ενεργοποιηθεί.

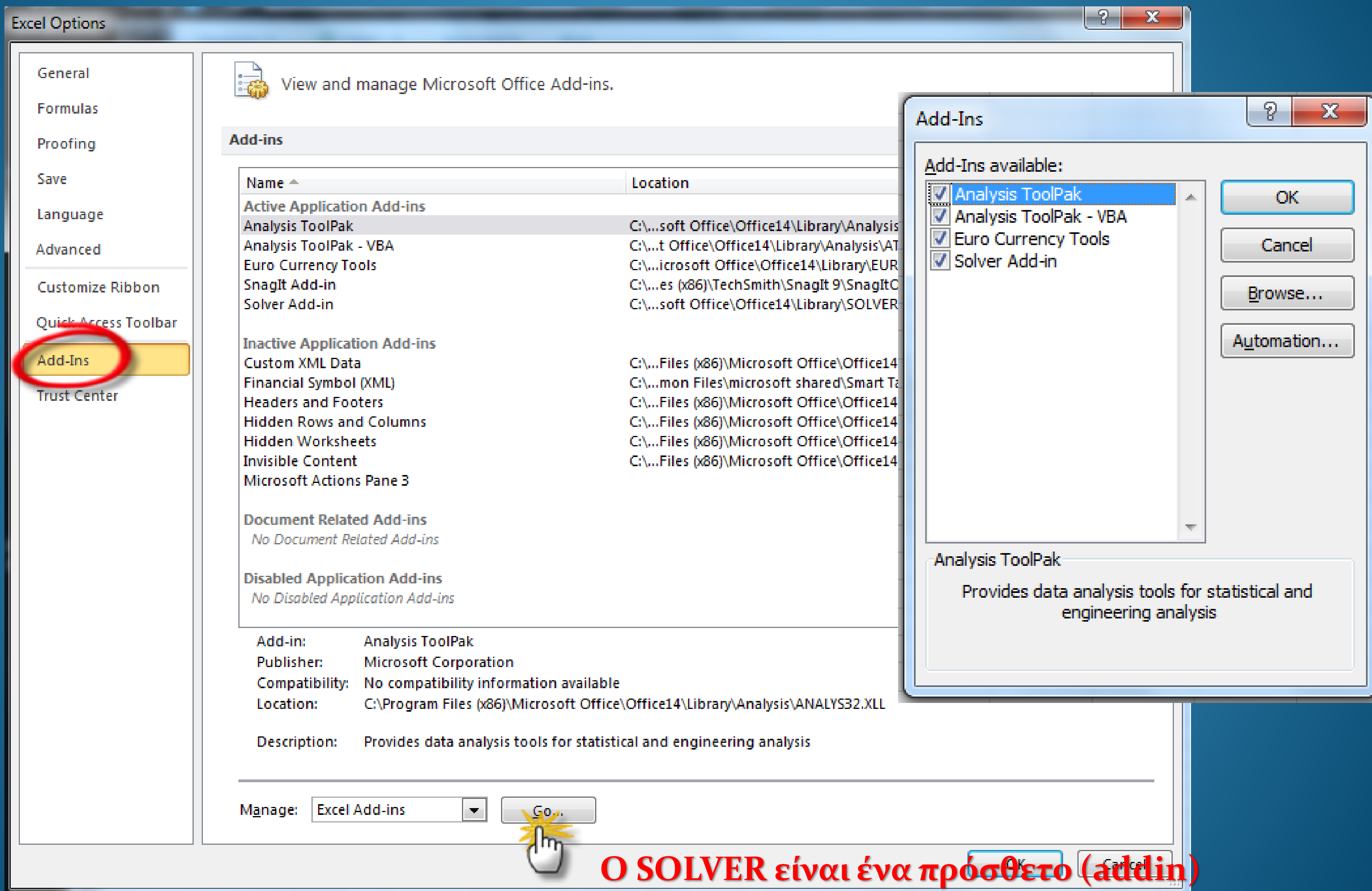
Το **κελί –στόχος (target cell)** πρέπει να περιέχει τύπο. Τίθεται σε συγκεκριμμένη τιμή, ή max ή min.

Τα κελιά που θα αλλάζουν (**changing cells**) περιέχουν τις μεταβλητές απόφασης.

Οι ***περιορισμοί*** είναι το κλειδί για να δουλέψει ο Solver.

Βελτιστοποίηση - Γραμ. προγραμματισμός

ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ SOLVER ΤΟΥ EXCELL

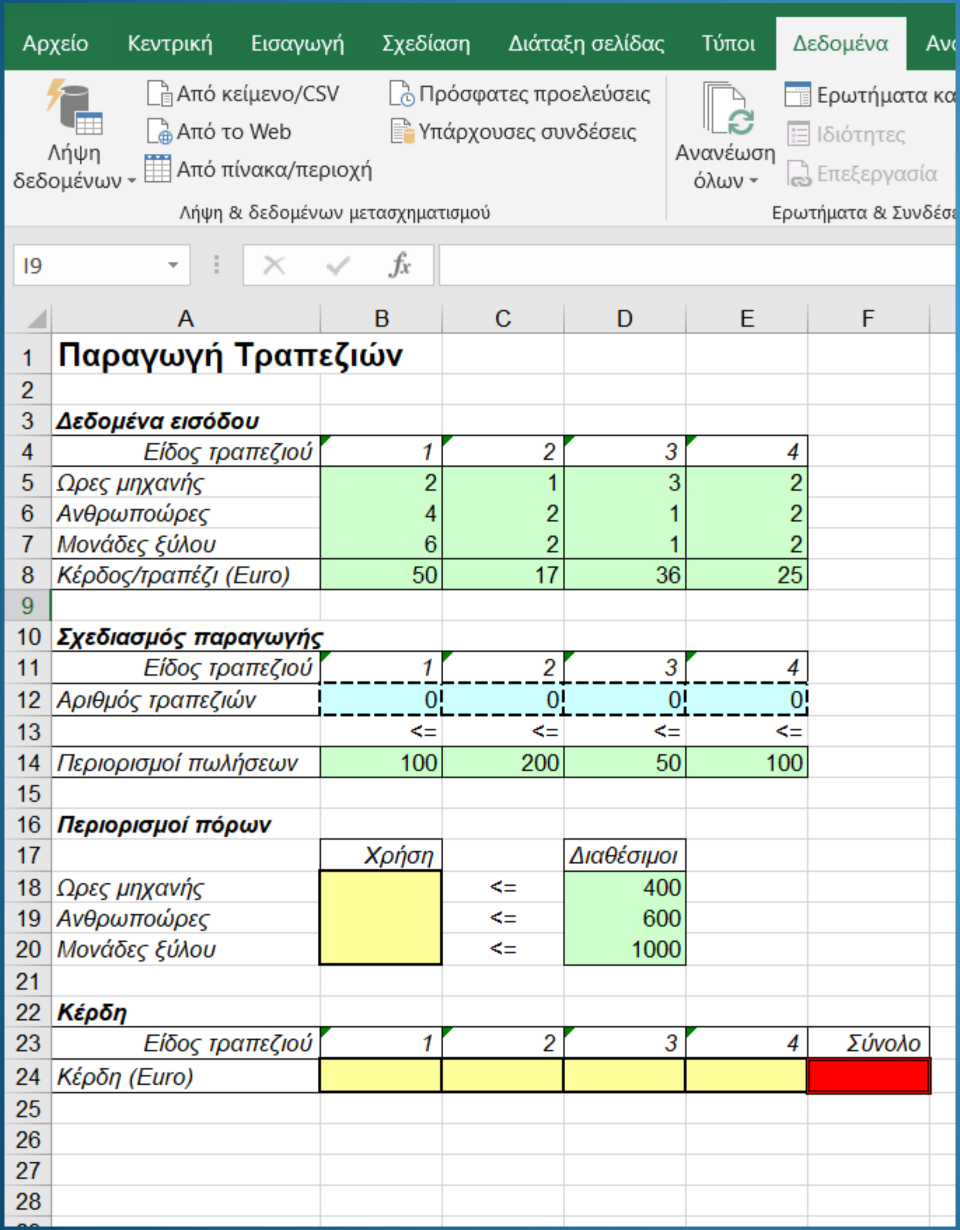


Ο SOLVER είναι ένα πρόσθετο (addin)

Premium Solver Plus - resources

Βελτιστοποίηση - Γραμ. προγραμματισμός

ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ SOLVER ΤΟΥ EXCELL

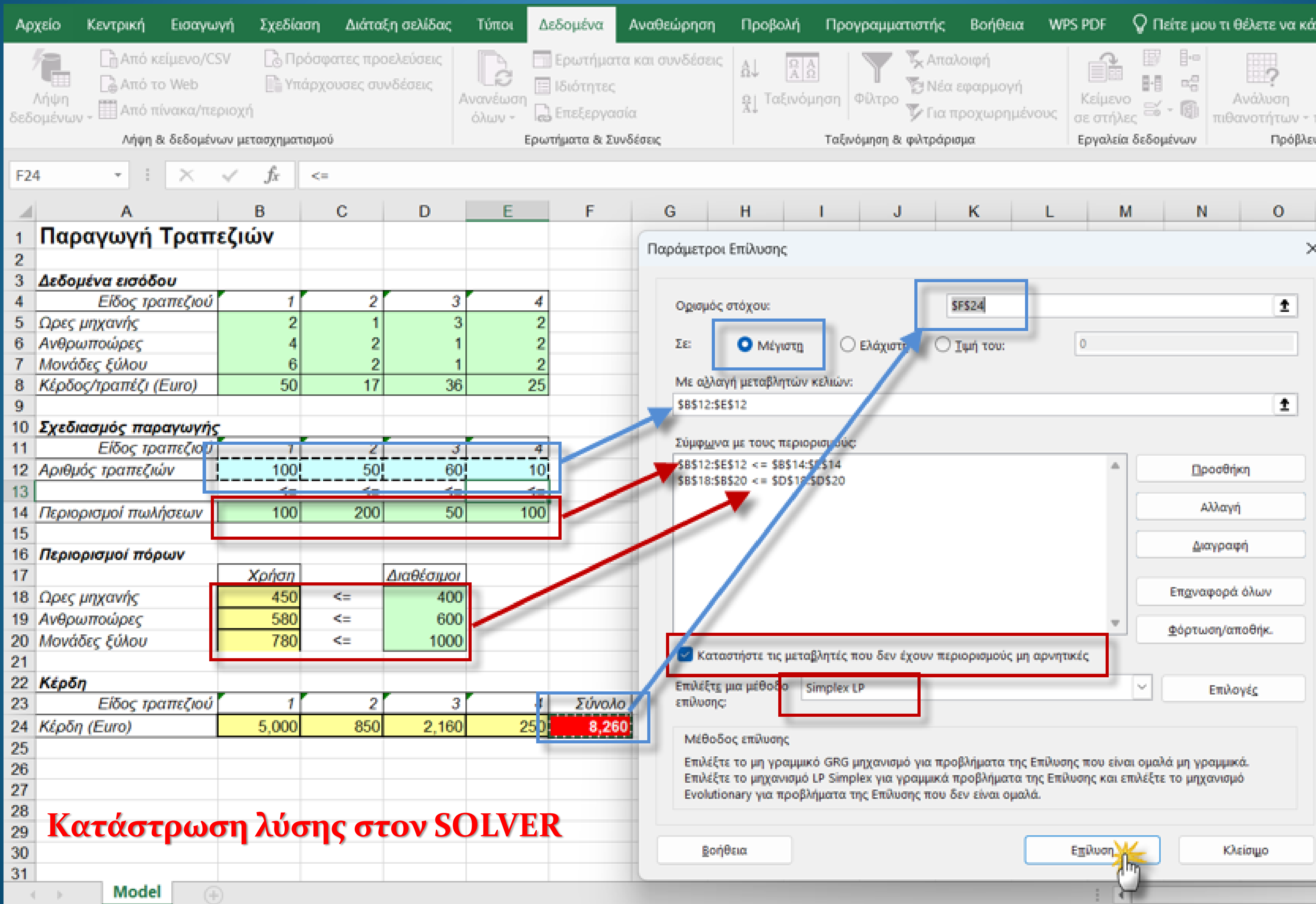


	A	B	C	D	E	F
1	**Παραγωγή Τραπεζιών**					
2						
3	***Δεδομένα εισόδου***					
4	*Είδος τραπεζιού*	*1*	*2*	*3*	*4*	
5	*Ωρες μηχανής*	2	1	3	2	
6	*Ανθρωποώρες*	4	2	1	2	
7	*Μονάδες ξύλου*	6	2	1	2	
8	*Κέρδος/τραπέζι (Euro)*	50	17	36	25	
9						
10	***Σχεδιασμός παραγωγής***					
11	*Είδος τραπεζιού*	*1*	*2*	*3*	*4*	
12	*Αριθμός τραπεζιών*	0	0	0	0	
13		<=	<=	<=	<=	
14	*Περιορισμοί πωλήσεων*	100	200	50	100	
15						
16	***Περιορισμοί πόρων***					
17		*Χρήση*		*Διαθέσιμοι*		
18	*Ωρες μηχανής*		<=	400		
19	*Ανθρωποώρες*		<=	600		
20	*Μονάδες ξύλου*		<=	1000		
21						
22	***Κέρδη***					
23	*Είδος τραπεζιού*	*1*	*2*	*3*	*4*	*Σύνολο*
24	*Κέρδη (Euro)*					
25						
26						
27						
28						

Αρχείο Blend.xls στα resources
ΟΔΗΓΙΕΣ ΧΡΗΣΗΣ στο Solver.docx

Βελτιστοποίηση - Γραμ. προγραμματισμός

ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ SOLVER ΤΟΥ EXCELL

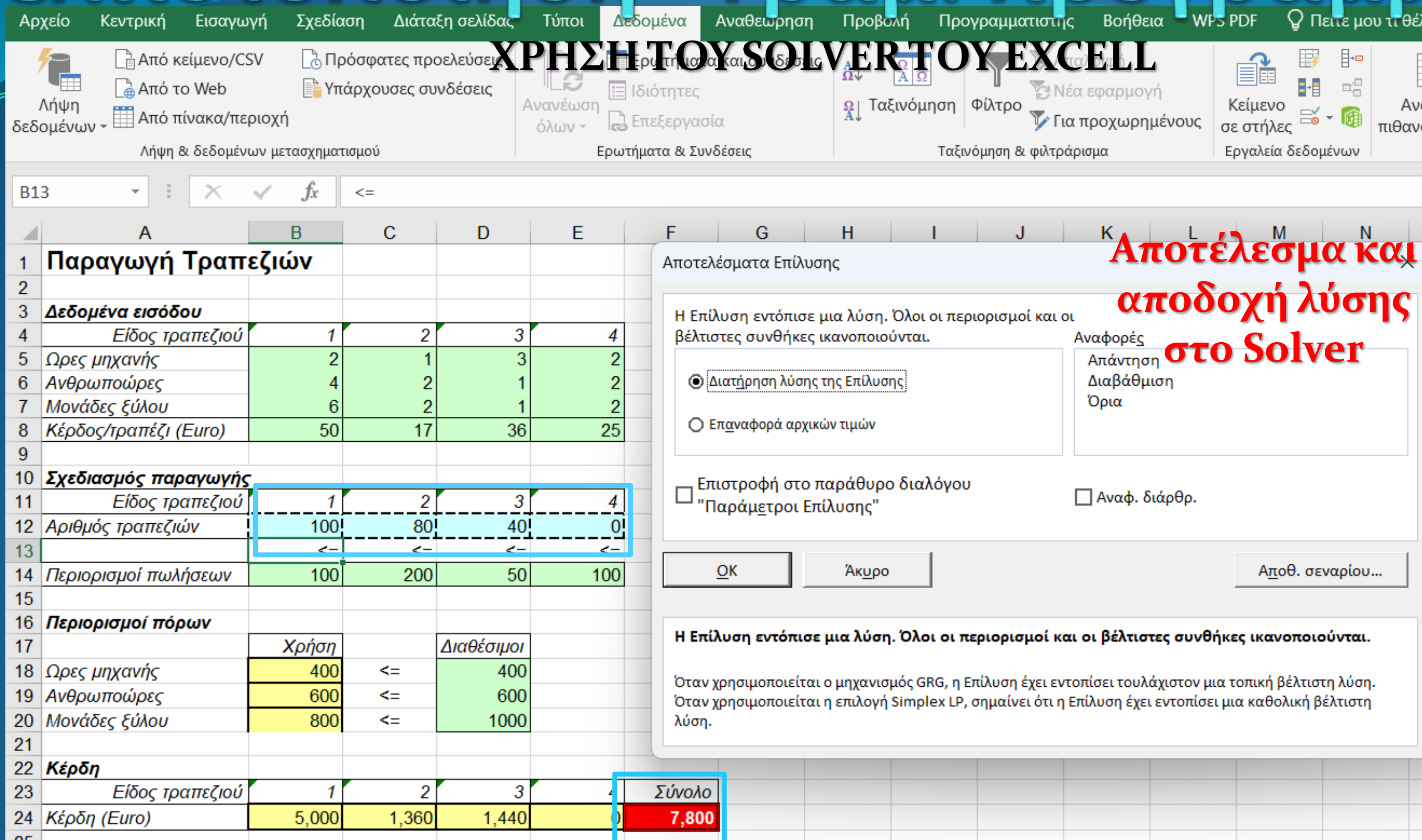


Κατάστρωση λύσης στον SOLVER

Βελτιστοποίηση - Γραμ. προγραμματισμός

ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ SOLVER ΤΟΥ EXCELL

Αποτέλεσμα και αποδοχή λύσης στο Solver



	A	B	C	D	E	F
1	**Παραγωγή Τραπεζιών**					
2						
3	***Δεδομένα εισόδου***					
4	*Είδος τραπεζιού*	*1*	*2*	*3*	*4*	
5	*Ωρες μηχανής*	2	1	3	2	
6	*Ανθρωποώρες*	4	2	1	2	
7	*Μονάδες ξύλου*	6	2	1	2	
8	*Κέρδος/τραπέζι (Euro)*	50	17	36	25	
9						
10	***Σχεδιασμός παραγωγής***					
11	*Είδος τραπεζιού*	*1*	*2*	*3*	*4*	
12	*Αριθμός τραπεζιών*	100	80	40	0	
13		<=	<=	<=	<=	
14	*Περιορισμοί πωλήσεων*	100	200	50	100	
15						
16	***Περιορισμοί πόρων***					
17		*Χρήση*		*Διαθέσιμοι*		
18	*Ωρες μηχανής*	400	<=	400		
19	*Ανθρωποώρες*	600	<=	600		
20	*Μονάδες ξύλου*	800	<=	1000		
21						
22	***Κέρδη***					
23	*Είδος τραπεζιού*	*1*	*2*	*3*	*4*	*Σύνολο*
24	*Κέρδη (Euro)*	5,000	1,360	1,440	0	7,800
25						

Microsoft Excel 9.0 Answer Report
Worksheet: [Blend-final.xls]Model
Report Created: 10/1/2001 12:51:51 μμ

Target Cell (Max)

Cell	Name	Original Value	Final Value
$F$24	Κέρδη Σύνολο	3,240,000	2,790,000

Adjustable Cells

Cell	Name	Original Value	Final Value
$B$12	Αριθμός τραπεζιών 1	50	100
$C$12	Αριθμός τραπεζιών 2	80	80
$D$12	Αριθμός τραπεζιών 3	40	40
$E$12	Αριθμός τραπεζιών 4	150	0

Constraints

Cell	Name	Cell Value	Formula	Status	Slack
$B$18	Ωρες μηχανής Χρήση	400	$B$18<=$D$18	Binding	0
$B$19	Ανθρωποώρες Χρήση	600	$B$19<=$D$19	Binding	0
$B$20	Μονάδες ξύλου Χρήση	800	$B$20<=$D$20	Not Binding	200
$B$12	Αριθμός τραπεζιών 1	100	$B$12<=$B$14	Binding	0
$C$12	Αριθμός τραπεζιών 2	80	$C$12<=$C$14	Not Binding	120
$D$12	Αριθμός τραπεζιών 3	40	$D$12<=$D$14	Not Binding	10
$E$12	Αριθμός τραπεζιών 4	0	$E$12<=$E$14	Not Binding	100

Microsoft Excel 9.0 Sensitivity Report
Worksheet: [Blend-final.xls]Model
Report Created: 10/1/2001 12:51:51 μμ

Adjustable Cells

Cell	Name	Final Value	Reduced Cost	Objective Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
$B$12	Αριθμός τραπεζιών 1	100	6000	18000	1E+30	6000
$C$12	Αριθμός τραπεζιών 2	80	0	6000	3000	1125
$D$12	Αριθμός τραπεζιών 3	40	0	12750	5250	2250
$E$12	Αριθμός τραπεζιών 4	0	-900	9000	900	1E+30

Constraints

Cell	Name	Final Value	Shadow Price	Constraint R.H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease
$B$18	Ωρες μηχανής Χρήση	400	3900	400	25	100
$B$19	Ανθρωποώρες Χρήση	600	1050	600	200	50
$B$20	Μονάδες ξύλου Χρήση	800	0	1000	1E+30	200

Βελτιστοποίηση - Γραμ. προγραμματισμός

Παράδειγμα για σπίτι επιμερισμός αρδευτικού νερού…

- Έστω δύο καλλιέργειες, 1 και 2. Μια μονάδα καλλιέργειας 1 φέρνει τέσσερις μονάδες κέρδους και μια μονάδα καλλιέργειας 2 φέρνει πέντε μονάδες κέρδους. Η ζήτηση στην αγορά για την σοδειά 1 είναι A μονάδες και για την 2 είναι B μονάδες. Έστω x η ποσότητα νερού που απαιτείται για A μονάδες καλλιέργειας 1, και y η ποσότητα νερού που απαιτείται για B μονάδες της καλλιέργειας 2.
- Οι γραμμικές σχέσεις μεταξύ των ποσοτήτων των παραγόμενων καλλιεργειών (δηλ. των απαιτήσεων A και B) και του διαθέσιμου νερού (δηλ. χ και ψ) για τις δύο καλλιέργειες είναι
- $A = 0.5(x - 2) + 2$

  $B = 0.6(y - 3) + 3$

Βελτιστοποίηση - Γραμ. προγραμματισμός

Παράδειγμα για σπίτι επιμερισμός αρδευτικού νερού…

Λύση:

- Στόχος: Να μεγιστοποιηθεί το κέρδος από τις καλλιέργειες 1 και 2

$$Maximize\ f = 4A + 5B;$$

- Εκφραζόμενες σαν συναρτήσεις της διαθέσιμης ποσότητας νερού

$$Maximize\quad f = 4[0.5(x - 2) + 2] + 5[0.6(y - 3) + 3]$$

$$f = 2x + 3y + 10$$

Βελτιστοποίηση - Γραμ. προγραμματισμός

Παράδειγμα για σπίτι επιμερισμός αρδευτικού νερού…

Υπό τους περιορισμούς

- $x+y \leq 10$: Μέγιστη διαθεσιμότητα νερού
- $x \geq 2$: Ελάχιστη ποσότητα νερού για την καλλιέργεια 1
- $y \geq 3$: Ελάχιστη ποσότητα νερού για την καλλιέργεια 2

- Το πρόβλημα είναι το ίδιο με τη μεγιστοποίηση της

$$f' = 2x + 3y$$

υπό τους ίδιους περιορισμούς.

ΛΥΣΤΕ ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΓΡΑΦΙΚΑ ΚΑΙ ΜΕ SOLVER

Λύση: $x = 2; y = 8; \ f' = 28$

Βελτιστοποίηση - Γραμ. προγραμματισμός

2ο Παράδειγμα για σπίτι …

Έστω ένα υδροσύστημα αποτελείται από μιά βιομηχανία και μια εγκατάσταση καθαρισμού λυμάτων που ανήκει στην βιομηχανία. Η βιομηχανία παράγει προϊόντα που πωλούνται για 10 Κ/τεμάχιο ενώ κοστίζουν 3Κ/τεμάχιο. Κατά την παραγωγή για κάθε ένα τεμάχιο τελικού προϊόντος παράγονται δύο μονάδες ακάθαρτου νερού (λυμάτων). Η διοίκηση πρέπει να αποφασίσει, πέραν του αριθμού προϊόντων που θα παράγει, και πόσες μονάδες λυμάτων θα πρέπει να παροχετεύει δίχως επεξεργασία (καθαρισμό) στο ποτάμι έτσι ώστε, αφενός να μεγιστοποιεί το κέρδος της και αφετέρου να ικανοποιεί τις απαιτήσεις για την ποιότητα του νερού στο ποτάμι, που ισχύουν από την νομοθεσία. Η μονάδα επεξεργασίας έχει μέγιστη ικανότητα επεξεργασίας 10 μονάδων λυμάτων με 80% καθαρισμό και με κόστος 0,6Κ/μονάδα. Επιβάλλεται επιπλέον και ένας φόρος περιβαλλοντικού χαρακτήρα για το νερό που αφήνεται δίχως καθαρισμό στο ποτάμι ίσος με2Κ/μονάδα. Η περιβαλλοντική αρχή έχει επιβάλλει στις βιομηχανίες ανώτατο όριο λυμάτων που μπορούν να παροχετεύσουν στο ποτάμι ίσο με 4 μονάδες νερού/βιομηχανία.

Ζητείται να σχηματοποιήσετε το πρόβλημα σαν πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού και να το λύσετε.

Βελτιστοποίηση - Γραμ. προγραμματισμός

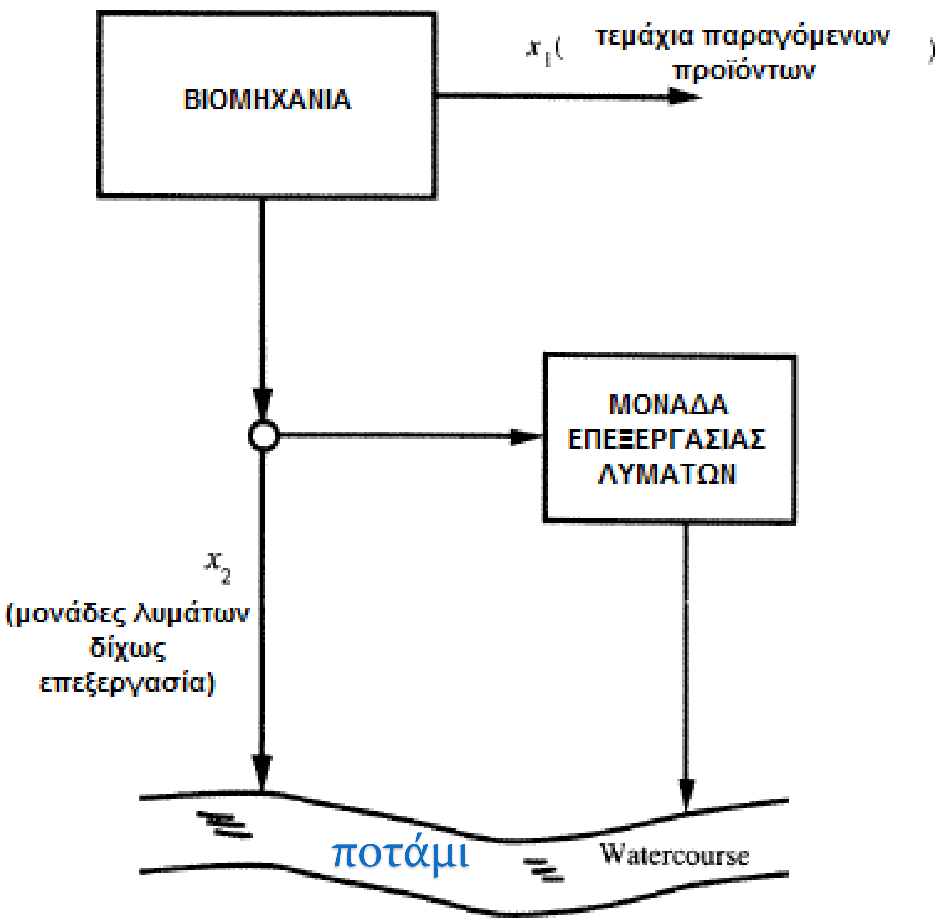


FIGURE 3.1.1
Schematic diagram of manufacturing-waste treatment system.

2ο Παράδειγμα για σπίτι

…

Μεταβλητές απόφασης:

χ1,χ2

Διατυπώστε

1.Στοχική συνάρτηση

2.Περιορισμούς

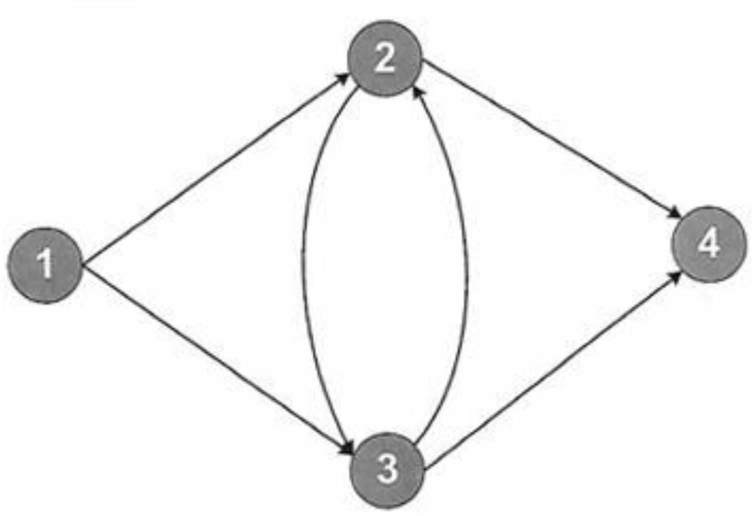
Γραμ. Προγραμματισμός στα δίκτυα

Έννοιες δικτύων

Ένα δίκτυο αποτελείται από ένα σύνολο **κόμβων** (nodes) και ένα σύνολο **συνδέσμων** (links) ή **ακμών** (arcs). Κάθε σύνδεσμος ενώνει δύο κόμβους που ονομάζονται **κόμβοι αρχής και τέλους** του συνδέσμου. Διαμέσου των συνδέσμων συνήθως μετακινείται κάποιο αγαθό. Η ποσότητα που διακινείται στη μονάδα του χρόνου ονομάζεται **ροή**. Συστήματα των οποίων η δομή είναι καθαρά δικτυακή είναι τα οδικά δίκτυα, τα δίκτυα υδροδότησης, μεταφοράς ενέργειας, τηλεπικοινωνιών, κ.ά. Οι σύνδεσμοι αντιπροσωπεύουν δρόμους, αγωγούς μεταφοράς, αγωγούς ροής δεδομένων, κ.ά. Οι κόμβοι αναπαριστούν τα σημεία τομής των συνδέσμων όπως διασταυρώσεις δρόμων, εγκαταστάσεις αποθήκευσης / επεξεργασίας νερού, τηλεπικοινωνιακά κέντρα, κ.α.

Η σχηματική απεικόνιση των δικτύων γίνεται με τη βοήθεια των **γράφων** (graphs). Στα διαγράμματα αυτά οι κόμβοι παριστάνονται με κύκλους ενώ οι σύνδεσμοι με κατευθυνόμενα ευθύγραμμα τμήματα. Στο σχήμα 10.1 παρουσιάζεται ένα απλό διάγραμμα δικτύου, το οποίο αποτελείται από τέσσερις κόμβους και έξι συνδέσμους. Συνήθως, κάθε κόμβος συμβολίζεται με έναν αριθμό ή γράμμα. Οι αριθμοί αυτοί μπορούν να χρησιμοποιηθούν και για το

Σημειώσεις για ανάλυση δικτύων και τα επόμενα παραδείγματα στο αρχείο SOLVER2 - resources

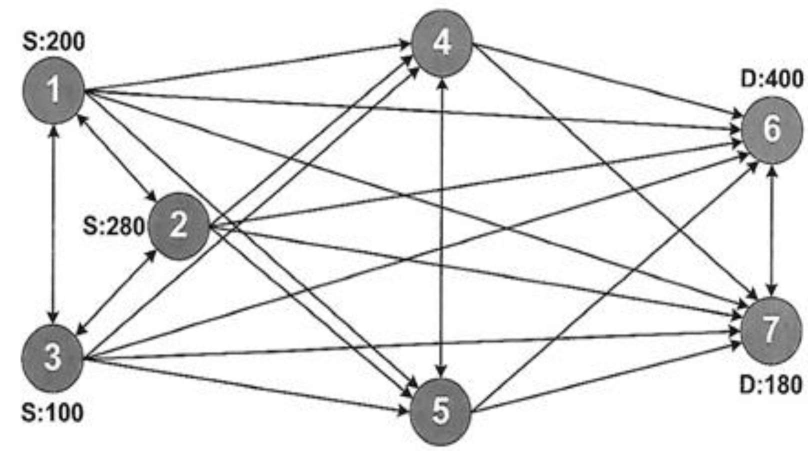


Σχήμα 10.1 Σχηματική αναπαράσταση ενός δικτύου (γράφος).

Γραμ. Προγραμματισμός στα δίκτυα

Πρόβλημα ροής ελάχιστου κόστους

Το **πρόβλημα ροής ελάχιστου κόστους** (minimum cost flow) είναι ένα από τα γενικότερα προβλήματα δικτύων. Τα περισσότερα προβλήματα δικτύων αποτελούν απλοποιημένες περιπτώσεις του ή μπορούν να τροποποιηθούν κατάλληλα ώστε πάρουν τη μορφή του. Το πρόβλημα αυτό εμφανίζεται σε περιπτώσεις διακίνησης αγαθών από διάφορες **προελεύσεις / πηγές** σε διάφορους **προορισμούς**. Συχνά οι προελεύσεις και οι προορισμοί ονομάζονται και σημεία **προσφοράς** και **ζήτησης** αντίστοιχα. Η προσφορά / δυναμικότητα κάθε πηγής είναι συνήθως περιορισμένη και η ζήτηση κάθε προορισμού προσδιορισμένη. Οι σύνδεσμοι του δικτύου αντιπροσωπεύουν τους δυνατούς τρόπους διακίνησης. Σε κάθε σύνδεσμο αντιστοιχεί ένα μοναδιαίο κόστος μεταφοράς ενώ η ποσότητα που μπορεί να μετακινηθεί περιορίζεται μεταξύ ενός ελάχιστου και ενός μέγιστου ορίου. Το ζητούμενο είναι ο **βέλτιστος τρόπος διακίνησης**, δηλαδή η κάλυψη της ζήτησης με το μικρότερο κόστος μεταφοράς. Στη συνέχεια παρουσιάζεται ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα.



Σχήμα 10.2 Γραφική απεικόνιση του δικτύου μεταφοράς.

συμβολισμό των συνδέσμων. Για παράδειγμα, ο σύνδεσμος που συνδέει τους κόμβους 1 και 2 συμβολίζεται ως «1-2».

Μια βιομηχανία διαθέτει τρία εργοστάσια παραγωγής ενός προϊόντος (1, 2, 3) και δύο μεγάλες αποθήκες (4, 5). Προμηθεύει δε δύο πελάτες (6, 7). Κάθε εργοστάσιο έχει μια ετήσια δυναμικότητα παραγωγής την οποία δεν μπορεί να υπερβεί και οι πελάτες έχουν ανάγκες (ζήτηση) οι οποίες πρέπει να

ικανοποιηθούν. Στο σχήμα 10.2 παρουσιάζεται το δίκτυο μεταφοράς, όπου τα βέλη καθορίζουν τις επιτρεπόμενες διαδρομές μεταξύ των κόμβων (εργοστάσια, αποθήκες, πελάτες). Ταυτόχρονα παρουσιάζονται οι ετήσιες δυναμικότητες των εργοστασίων και η ετήσια ζήτηση κάθε πελάτη (σε τόνους προϊόντος).

Πίνακας 10.1 Κόστη μεταφοράς στις επιτρεπόμενες διαδρομές.

	1	2	3	4	5	6	7
1	–	5,0	3,0	5,0	5,0	20,0	20,0
2	9,0	–	9,0	1,0	1,0	8,0	15,0
3	0,4	8,0	–	1,0	0,5	10,0	12,0
4	–	–	–	–	1,2	2,0	12,0
5	–	–	–	0,8	–	2,0	12,0
6	–	–	–	–	–	–	1,0
7	–	–	–	–	–	7,0	–

Γραμ. Προγραμματισμός στα δίκτυα

Το πρόβλημα ροής ελάχιστου κόστους χαρακτηρίζεται από τα ακόλουθα στοιχεία:

- Κάθε κόμβος του δικτύου ανήκει σε μια από τις ακόλουθες τρεις κατηγορίες:
  - **Κόμβος προέλευσης**, ο οποίος χαρακτηρίζεται από μια συγκεκριμένη προσφορά / δυναμικότητα.
  - **Κόμβος προορισμού**, ο οποίος χαρακτηρίζεται από μια συγκεκριμένη ζήτηση.
  - **Διακλάδωση**, κόμβος διαμέσου του οποίου απλώς διακινείται το αγαθό.

Προκειμένου να επιτευχθεί μια πιο γενική μορφή του προβλήματος, για κάθε κόμβο n ορίζεται η γενικευμένη ποσότητα s_n, η οποία ονομάζεται **προσφορά**. Με βάση την ποσότητα αυτή κάθε κόμβος χαρακτηρίζεται ως:

- Κόμβος προέλευσης όταν $s_n > 0$.
- Κόμβος προορισμού όταν $s_n < 0$.
- Διακλάδωση όταν $s_n = 0$.

Μέσω κάθε συνδέσμου m μετακινείται μια συγκεκριμένη ποσότητα του αγαθού. Η ποσότητα αυτή ονομάζεται **ροή** και συμβολίζεται με f_m.

Η ροή σε κάθε σύνδεσμο περιορίζεται μεταξύ ενός **άνω ορίου** u_m και ενός **κάτω ορίου** l_m.

Η ροή των αγαθών διαμέσου των συνδέσμων συνοδεύεται από κάποιο κόστος το οποίο καθορίζεται από το **μοναδιαίο κόστος** μεταφοράς κάθε συνδέσμου που συμβολίζεται με c_m. Το κόστος μεταφοράς σε κάθε σύνδεσμο είναι ίσο με το γινόμενο $f_m c_m$.

Πρόβλημα ροής ελάχιστου κόστους

Μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού

Κάθε πρόβλημα δικτύου μπορεί να παρασταθεί ως ένα μοντέλο γραμμικού (ή ακέραιου γραμμικού) προγραμματισμού. Η ιδιότητα αυτή είναι πολύ χρήσιμη επειδή επιτρέπει την εφαρμογή γνωστών μεθόδων για την επίλυση προβλημάτων δικτύων. Στο πρόβλημα ροής ελαχίστου κόστους οι μεταβλητές απόφασης είναι οι ροές στους συνδέσμους. Η αντικειμενική συνάρτηση αντιπροσωπεύει το συνολικό κόστος διακίνησης και δίνεται από τη σχέση:

$$Z = \sum_{m=1}^{M} f_m c_m \qquad (10.1)$$

όπου με M συμβολίζεται ο συνολικός αριθμός των κόμβων του δικτύου. Το πρόβλημα είναι η ελαχιστοποίηση της συνάρτησης Z κάτω από τους περιορισμούς:

$$f_m \geq l_m \quad (m = 1, \cdots, M) \qquad (10.2)$$

$$f_m \leq u_m \quad (m = 1, \cdots, M) \qquad (10.3)$$

$$\sum f_{n,out} - \sum f_{n,in} = s_n \quad (n = 1, \cdots, N) \qquad (10.4)$$

όπου η ποσότητα $f_{n,out}$ αντιπροσωπεύει τη ροή σε ένα σύνδεσμο που έχει ως αρχή τον κόμβο n, και η ποσότητα $f_{n,in}$ αντιπροσωπεύει τη ροή σε ένα σύνδεσμο που έχει ως τέλος τον κόμβο n. Με N συμβολίζεται ο αριθμός των κόμβων του δικτύου. Οι σχέσεις (10.2) και (10.3) εκφράζουν τους περιορισμούς που θέτουν οι χωρητικότητες των συνδέσμων ενώ η σχέση (10.4) εκφράζει το ισοζύγιο της ροής σε κάθε κόμβο.

Γραμ. Προγραμματισμός στα δίκτυα

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Μοντέλο Ροής Ελάχιστου Κόστους

Αριθμός Κόμβων	7
Αριθμός Συνδέσμων	26
Συνολικό Κόστος	

Επίλυση

Αρχείο MinCost.xls στα resources
ΟΔΗΓΙΕΣ ΧΡΗΣΗΣ στο Solver2.docx

Δεδομένα Συνδέσμων

Α/Α	Όνομα	Αρχή	Τέλος	Ελάχ.	Μεγ.	Κόστος	Ροή
1	Συν. 1	1	2	0	200	5	
2	Συν. 2	1	3	0	200	3	
3	Συν. 3	1	4	0	200	5	
4	Συν. 4	1	5	0	200	5	
5	Συν. 5	1	6	0	200	20	
6	Συν. 6	1	7	0	200	20	
7	Συν. 7	2	1	0	200	9	
8	Συν. 8	2	3	0	200	9	
9	Συν. 9	2	4	0	200	1	
10	Συν. 10	2	5	0	200	1	
11	Συν. 11	2	6	0	200	8	
12	Συν. 12	2	7	0	200	15	
13	Συν. 13	3	1	0	200	0.4	
14	Συν. 14	3	2	0	200	8	
15	Συν. 15	3	4	0	200	1	
16	Συν. 16	3	5	0	200	0.5	
17	Συν. 17	3	6	0	200	10	
18	Συν. 18	3	7	0	200	12	
19	Συν. 19	4	5	0	200	1.2	
20	Συν. 20	4	6	0	200	2	
21	Συν. 21	4	7	0	200	12	

Δεδομένα Κόμβων

Α/Α	Ονομα	Προσφ.	Ισοζύγ.
1	Εργ. 1	200	
2	Εργ. 2	280	
3	Εργ. 3	100	
4	Αποθ. 4	0	
5	Αποθ. 5	0	
6	Πελ. 6	-400	
7	Πελ. 7	-180	

Γραμ. Προγραμματισμός στα δίκτυα

Μοντέλο Ροής Ελάχιστου Κόστους

Αριθμός Κόμβων	7
Αριθμός Συνδέσμων	26
Συνολικό Κόστος	3320

Επίλυση

προσφορά = ισοζύγιο

Δεδομένα Συνδέσμων

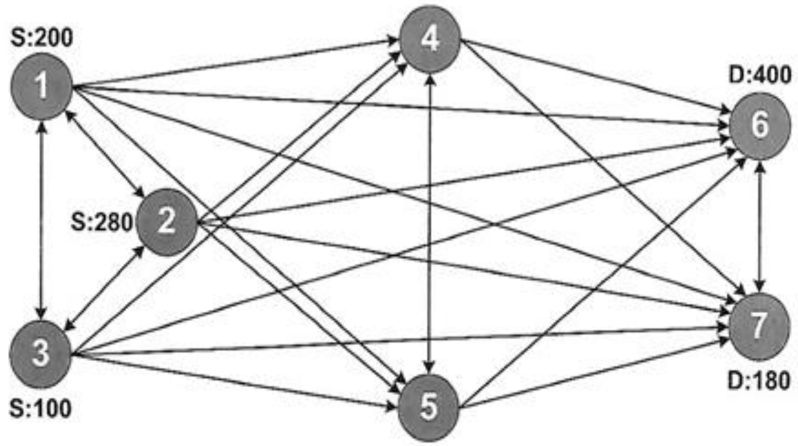
Α/Α	Όνομα	Αρχή	Τέλος	Ελάχ.	Μεγ.	Κόστος	Ροή
1	Συν. 1	1	2	0	200	5	0
2	Συν. 2	1	3	0	200	3	200
3	Συν. 3	1	4	0	200	5	0
4	Συν. 4	1	5	0	200	5	0
5	Συν. 5	1	6	0	200	20	0
6	Συν. 6	1	7	0	200	20	0
7	Συν. 7	2	1	0	200	9	0
8	Συν. 8	2	3	0	200	9	0
9	Συν. 9	2	4	0	200	1	100
10	Συν. 10	2	5	0	200	1	0
11	Συν. 11	2	6	0	200	8	180
12	Συν. 12	2	7	0	200	15	0
13	Συν. 13	3	1	0	200	0.4	0
14	Συν. 14	3	2	0	200	8	0
15	Συν. 15	3	4	0	200	1	100
16	Συν. 16	3	5	0	200	0.5	200
17	Συν. 17	3	6	0	200	10	0
18	Συν. 18	3	7	0	200	12	0
19	Συν. 19	4	5	0	200	1.2	0
20	Συν. 20	4	6	0	200	2	200
21	Συν. 21	4	7	0	200	12	0
22	Συν. 22	5	4	0	200	0.8	0
23	Συν. 23	5	6	0	200	2	200
24	Συν. 24	5	7	0	200	12	0
25	Συν. 25	6	7	0	200	1	180
26	Συν. 26	7	6	0	200	7	0

Δεδομένα Κόμβων

Α/Α	Ονομα	Προσφ.	Ισοζύγ.
1	Εργ. 1	200	200
2	Εργ. 2	280	280
3	Εργ. 3	100	100
4	Αποθ. 4	0	0
5	Αποθ. 5	0	0
6	Πελ. 6	-400	-400
7	Πελ. 7	-180	-180

Αρχείο MinCostFinal.xls στα resources ΟΔΗΓΙΕΣ ΧΡΗΣΗΣ στο Solver2.docx

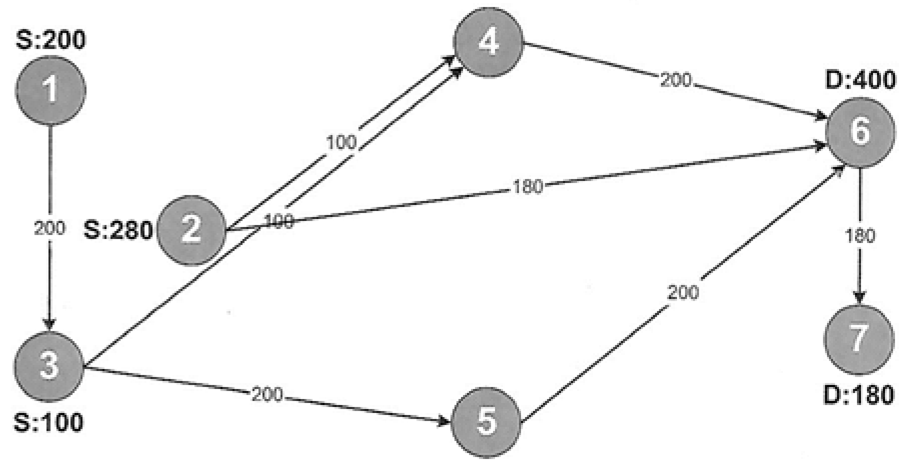
Γραμ. Προγραμματισμός στα δίκτυα



Σχήμα 10.2 Γραφική απεικόνιση του δικτύου μεταφοράς.

συμβολισμό των συνδέσμων. Για παράδειγμα, ο σύνδεσμος που συνδέει τους κόμβους 1 και 2 συμβολίζεται ως «1-2».

ΛΥΣΗ



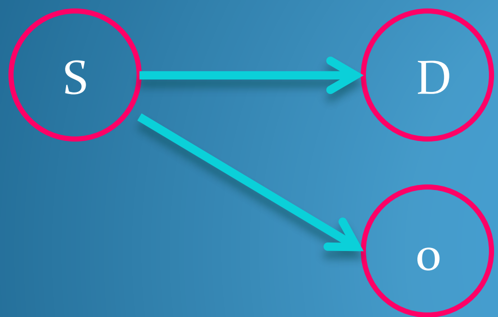
Σχήμα 10.4 Το βέλτιστο πρόγραμμα διακίνησης.

Γραμ. Προγραμματισμός στα δίκτυα

ΠΑΡΑΛΛΑΓΕΣ

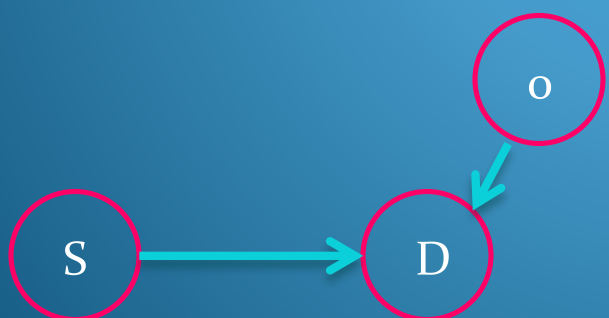
προσφορά ≠ ισοζύγιο

1Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ: ΤΑ ΕΡΓΟΣΤΑΣΙΑ ΠΑΡΑΓΟΥΝ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΖΗΤΗΣΗ



- Εισάγουμε τεχνητούς συνδέσμους από κάθε κόμβο προέλευσης προς έναν τεχνητό εξωτερικό κόμβο (o)
- Κάτω όριο μηδέν, πάνω όριο πολύ μεγάλο
- Μοναδιαίο κόστος μηδέν

2Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ: ΤΑ ΕΡΓΟΣΤΑΣΙΑ ΠΑΡΑΓΟΥΝ ΛΙΓΟΤΕΡΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΖΗΤΗΣΗ



- Εισάγουμε τεχνητούς συνδέσμους προς κάθε κόμβο προορισμού από έναν τεχνητό εξωτερικό κόμβο (o)
- Κάτω όριο μηδέν, πάνω όριο πολύ μεγάλο
- Μοναδιαίο κόστος μηδέν

Αρχεία MinCost2.xls
MinCost3.xls
στα resources
ΟΔΗΓΙΕΣ ΧΡΗΣΗΣ *στο*
Solver2.docx

Γραμ. Προγραμματισμός στα δίκτυα

ΠΑΡΑΛΛΑΓΕΣ: ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΡΟΗΣ

Μοντέλο Μέγιστης Ροής

Αριθμός Κόμβων	5
Αριθμός Συνδέσμων	7
Συνολικό Κόστος	-3

Επίλυση

Δεδομένα Συνδέσμων

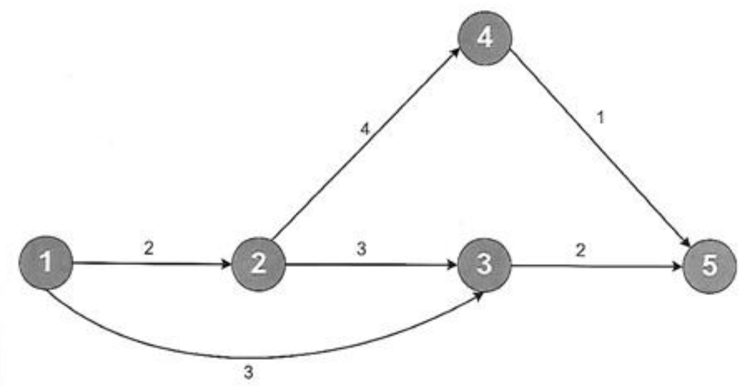
Α/Α	Όνομα	Αρχή	Τέλος	Ελάχ.	Μεγ.	Κόστος	Ροή
1	Συν. 1	1	2	0	2	0	1
2	Συν. 2	1	3	0	3	0	2
3	Συν. 3	2	3	0	3	0	0
4	Συν. 4	2	4	0	4	0	1
5	Συν. 5	3	5	0	2	0	2
6	Συν. 6	4	5	0	1	0	1
7	Συν. 7	5	1	0	1000000	-1	3

Δεδομένα Κόμβων

Α/Α	Όνομα	Προσφ.	Ισοζύγ.
1	Κόμβ. 1	0	0
2	Κόμβ. 2	0	0
3	Κόμβ. 3	0	0
4	Κόμβ. 4	0	0
5	Κόμβ. 5	0	0

Σχήμα 10.7 Το μοντέλο μέγιστης ροής.

Αρχείο MaxFlow.xls στα resources
ΟΔΗΓΙΕΣ ΧΡΗΣΗΣ στο Solver2.docx



Σχήμα 10.6 Δίκτυο μεταφοράς φυσικού αερίου και χωρητικότητες αγωγών.

Πρόβλημα μέγιστης ροής

Μια ειδική περίπτωση προβλήματος δικτύων είναι το πρόβλημα της **μέγιστης ροής**. Στο πρόβλημα αυτό κάποιο αγαθό μεταφέρεται από μία μοναδική πηγή σε ένα μοναδικό προορισμό μέσω των συνδέσμων ενός δικτύου. Αυτό που ενδιαφέρει είναι ο υπολογισμός της μέγιστης δυνατής ποσότητας που μπορεί να διακινηθεί, υπό τους περιορισμούς που θέτουν η τοπολογία του δικτύου και οι χωρητικότητες των συνδέσμων. Στη συνέχεια παρουσιάζεται μια τυπική εφαρμογή του προβλήματος μέγιστης ροής.

Μια εταιρεία φυσικού αερίου διαθέτει ένα δίκτυο αγωγών για τη μεταφορά του αερίου από μια πηγή σε μία πόλη, όπως φαίνεται στο σχήμα 10.6. Κατά τη μεταφορά από την πηγή (κόμβος 1) στην πόλη (κόμβος 5), το αέριο μπορεί να περάσει από μια σειρά σταθμών. Οι σύνδεσμοι του δικτύου αντιπροσωπεύουν αγωγούς διαφορετικών διαμέτρων. Στο ίδιο σχήμα παρουσιάζονται οι μέγιστες χωρητικότητες των αγωγών σε χιλιάδες κυβικά μέτρα φυσικού αερίου την ώρα. Η εταιρεία θα επιθυμούσε να γνωρίζει ποια είναι η μέγιστη ποσότητα φυσικού αερίου που μπορεί να διοχετευτεί στην πόλη και μέσω ποιων διαδρομών.

Γραμ. Προγραμματισμός στα δίκτυα

ΠΑΡΑΛΛΑΓΕΣ: ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΡΟΗΣ

Το πρόβλημα αρχικά φαίνεται να μη σχετίζεται άμεσα με το πρόβλημα ροής ελάχιστου κόστους και ο λόγος είναι ότι δεν υπάρχουν κόμβοι με συγκεκριμένη προσφορά ή ζήτηση αλλά ούτε ενδιαφέρει το κόστος μεταφοράς. Όμως μπορεί να μετατραπεί σε ένα ισοδύναμο πρόβλημα ροής ελάχιστου κόστους με τις ακόλουθες ενέργειες:

1. Η προσφορά όλων των κόμβων ορίζεται ίση με μηδέν.
2. Εισάγεται ένα τεχνητός σύνδεσμος που συνδέει τον προορισμό (κόμβος 5) με την πηγή (κόμβος 1).

Αρχείο MaxFlow.xls στα resources
ΟΔΗΓΙΕΣ ΧΡΗΣΗΣ στο Solver2.docx

Μοντέλο Μέγιστης Ροής

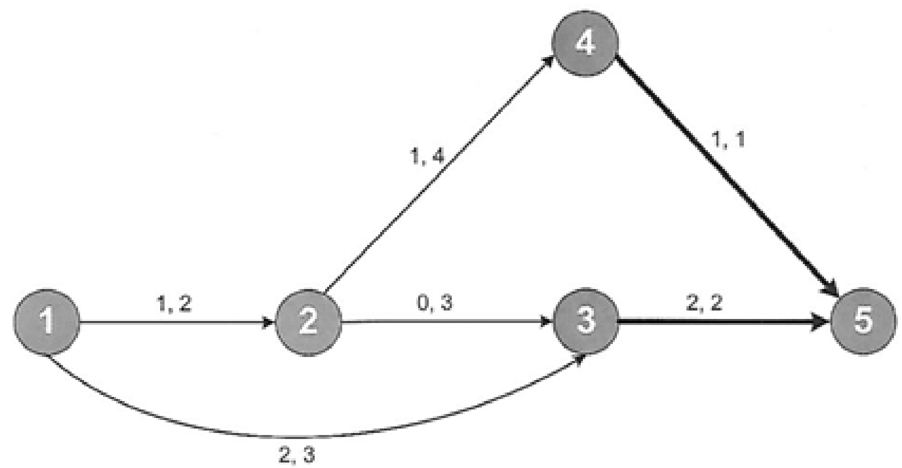
Αριθμός Κόμβων	1	
Αριθμός Συνδέσμων	1	Επίλυση
Συνολικό Κόστος	#######	

Δεδομένα Συνδέσμων

Α/Α	Όνομα	Αρχή	Τέλος	Ελάχ.	Μεγ.	Κόστος	Ροή
1	Συν. 1						
2	Συν. 2						
3	Συν. 3						
4	Συν. 4						
5	Συν. 5						
6	Συν. 6						
7	Συν. 7						
8	Συν. 8						
9	Συν. 9						
10	Συν. 10						
11	Συν. 11						
12	Συν. 12						
13	Συν. 13						
14	Συν. 14						
15	Συν. 15						
16	Συν. 16						
17	Συν. 17						
18	Συν. 18						
19	Συν. 19						

Δεδομένα Κόμβων

Α/Α	Ονομα	Προσφ.	Ισοζύγ.
1	Κόμβος 1		0
2	Κόμβος 2		0
3	Κόμβος 3		0
4	Κόμβος 4		0
5	Κόμβος 5		0
6	Κόμβος 6		0
7	Κόμβος 7		0
8	Κόμβος 8		0
9	Κόμβος 9		0
10	Κόμβος 10		0
11	Κόμβος 11		0
12	Κόμβος 12		0
13	Κόμβος 13		0
14	Κόμβος 14		0
15	Κόμβος 15		0
16	Κόμβος 16		0
17	Κόμβος 17		0
18	Κόμβος 18		0
19	Κόμβος 19		0



Σχήμα 10.8 Μέγιστη ροή στο δίκτυο μεταφοράς φυσικού αερίου.

3. Το κάτω όριο ροής σε κάθε σύνδεσμο ορίζεται ίσο με μηδέν.
4. Το πάνω όριο ροής σε κάθε σύνδεσμο, εκτός από τον τεχνητό, ορίζεται ίσο με τη χωρητικότητά του.
5. Το πάνω όριο ροής του τεχνητού συνδέσμου ορίζεται ίσο με ένα μεγάλο αριθμό (π.χ. 10^6).
6. Το μοναδιαίο κόστος σε κάθε σύνδεσμο, εκτός από τον τεχνητό, ορίζεται ίσο με μηδέν.
7. Το μοναδιαίο κόστος του τεχνητού συνδέσμου ορίζεται ίσο με μια οποιαδήποτε αρνητική τιμή (π.χ. -1).

Το σημείο-κλειδί στις παραπάνω ενέργειες είναι η εισαγωγή του τεχνητού συνδέσμου και ο καθορισμός αρνητικού μοναδιαίου κόστους γι αυτόν. Με τον τρόπο αυτό, το μοντέλο ροής ελάχιστου κόστους επιχειρεί να μεγιστοποιήσει τη ροή στον τεχνητό σύνδεσμο γιατί έτσι ελαχιστοποιείται το συνολικό κόστος. Επειδή πρέπει να ικανοποιείται το ισοζύγιο του φυσικού

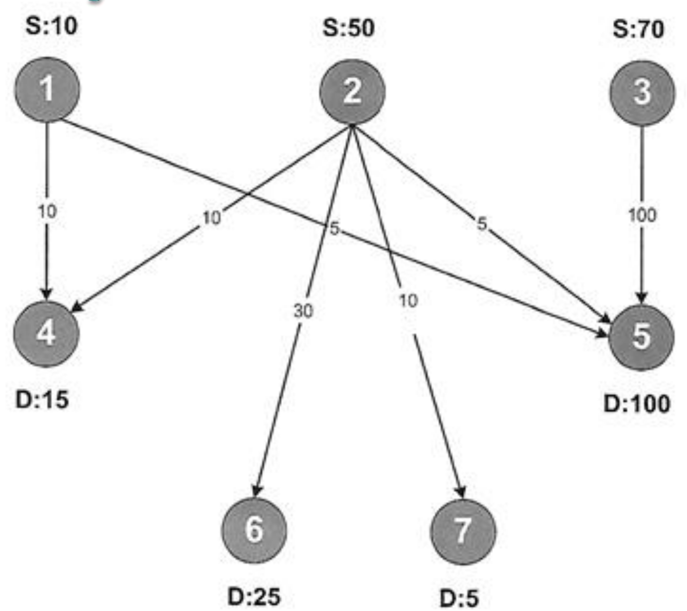
Γραμ. Προγραμματισμός στα δίκτυα

ΠΑΡΑΛΛΑΓΕΣ: ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΥΔΑΤΙΚΩΝ ΠΟΡΩΝ 1

Πρόβλημα διαχείρισης υδατικών πόρων

Στην παράγραφο αυτή εξετάζεται ένα ρεαλιστικό παράδειγμα που μπορεί να αντιμετωπιστεί με τις μεθόδους ανάλυσης δικτύων που παρουσιάσθηκαν στις προηγούμενες παραγράφους. Το πρόβλημα αφορά στην ορθολογική διαχείριση των υδατικών πόρων ενός νησιού. Στο νησί αυτό υπάρχουν δύο περιοχές με ανάγκες για νερό ύδρευσης και άρδευσης. Στον πίνακα 10.3 παρουσιάζονται οι τέσσερις κατηγορίες κατανάλωσης νερού και η ετήσια ζήτηση (σε χιλιάδες κυβικά μέτρα νερού). Το προσφερόμενο νερό προέρχεται από τρεις πηγές με διαφορετικές ετήσιες δυναμικότητες (σε χιλιάδες κυβικά μέτρα νερού), όπως αναλυτικά παρουσιάζονται στον πίνακα 10.4.

Στο σχήμα 10.11 παρουσιάζεται το δίκτυο μεταφοράς. Οι πηγές νερού αντιπροσωπεύονται από τους κόμβους 1, 2 και 3 ενώ οι καταναλώσεις από τους κόμβους 4, 5, 6 και 7. Στο ίδιο σχήμα παρουσιάζονται οι χωρητικότητες (σε χιλιάδες κυβικά μέτρα νερού ανά έτος) των αγωγών που συνδέουν τις πηγές με τους κόμβους κατανάλωσης.



Σχήμα 10.11 Το δίκτυο μεταφοράς νερού.

Πίνακας 10.3 Κατηγορίες ζήτησης και ετήσια ζήτηση σε νερό.

Κατηγορία Ζήτησης	Κόμβος	Ετήσια Ζήτηση
Ύδρευση περιοχής 1	4	15
Ύδρευση περιοχής 2	5	100
Άρδευση περιοχής 1	6	25
Άρδευση περιοχής 2	7	5

Πίνακας 10.4 Πηγές νερού και ετήσιες δυναμικότητες.

Πηγή	Κόμβος	Ετήσια Δυναμικότητα
Υπόγεια νερά	1	10
Φράγμα	2	50
Μονάδα αφαλάτωσης	3	70

Αρχείο Water.xls στα resources
ΟΔΗΓΙΕΣ ΧΡΗΣΗΣ στο Solver.docx

Γραμ. Προγραμματισμός

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΥΔΑΤΙΚΩΝ ΠΟΡΩΝ 2

Βελτιστοποίηση της διαχείρισης Υδροσυστήματος διπλού σκοπού με δύο ταμιευτήρες.

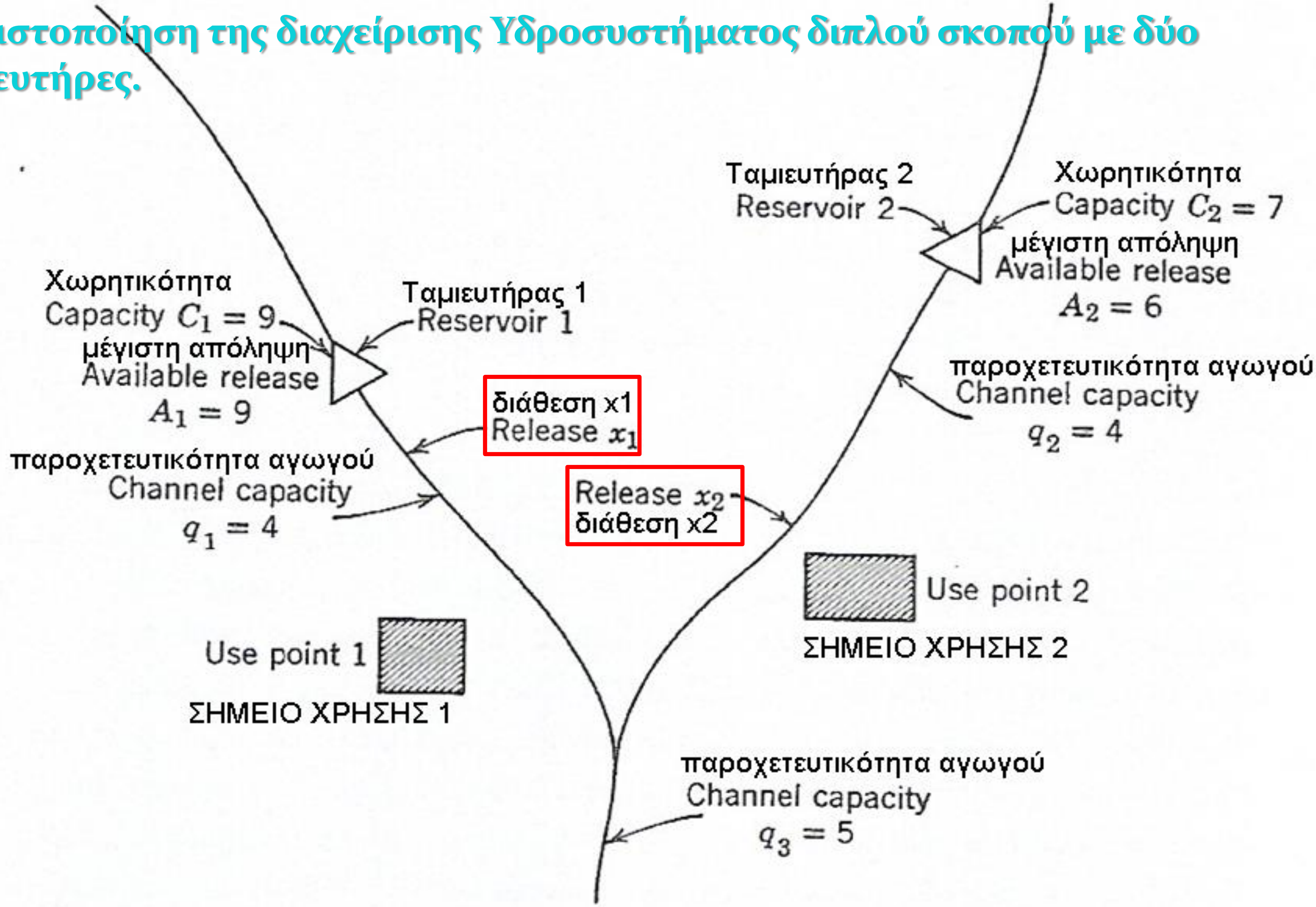


Fig. 17-3. Two-reservoir, two-purpose system, Example 17-3.

Γραμ. Προγραμματισμός

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΥΔΑΤΙΚΩΝ ΠΟΡΩΝ 2

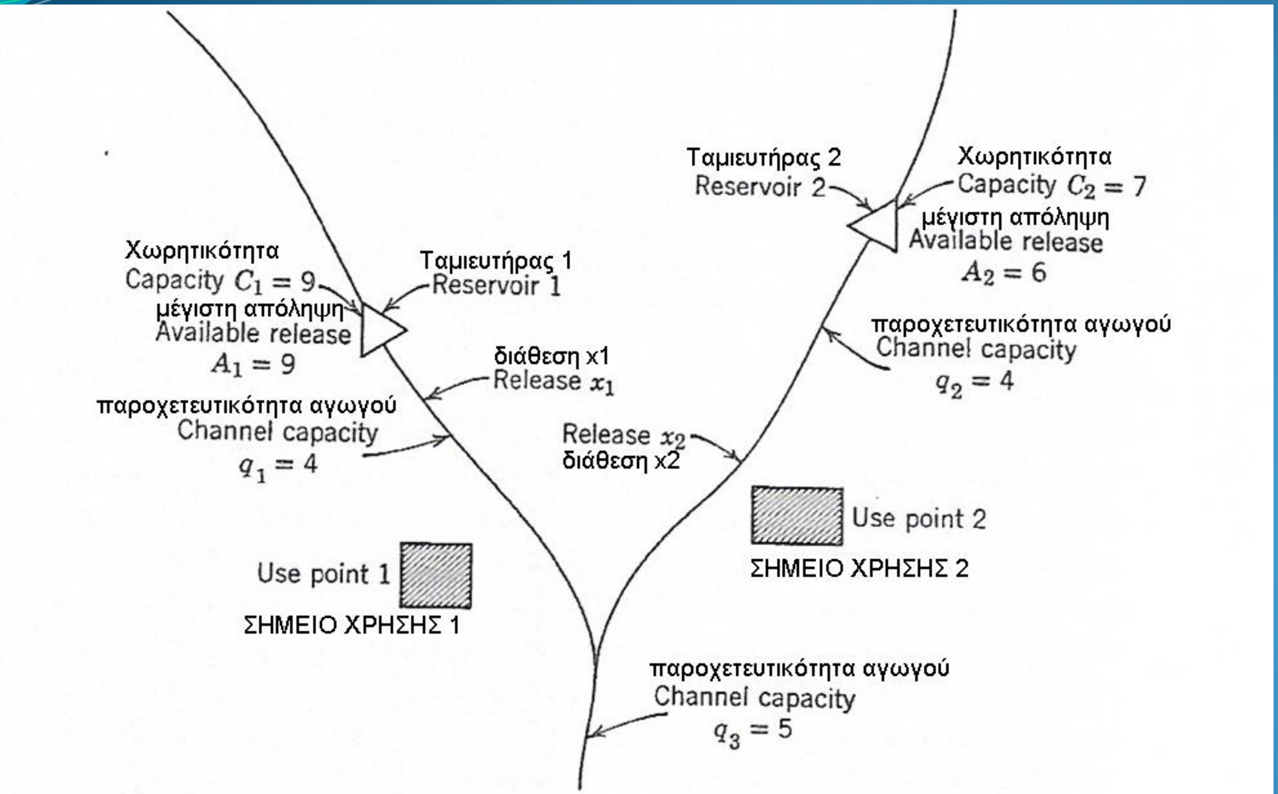


Fig. 17-3. Two-reservoir, two-purpose system, Example 17-3.

Βελτιστοποίηση της διαχείρισης Υδροσυστήματος διπλού σκοπού με δύο ταμιευτήρες.

Στοχική συνάρτηση
Max B = 2x1+3x2

Ai η ποσότητα νερού η διαθέσιμη για απόληψη στον χρόνο Δt κσι ισούται με την χωρητικότητα S* στην αρχή του Δi συν τις εισροές Qi κατά την διάρκεια του Δt.

Υποδείξεις για τους περιορισμούς

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 &\le q_3 = 5 \\
x_1 \qquad &\le q_1 = 4 \\
x_2 &\le q_2 = 4 \\
9 - x_1 \qquad &\le C_1 = 9 \\
6 - \qquad x_2 &\le C_2 = 7
\end{aligned}
$$

Βελτιστοποίηση – θέματα εξετάσεων

1. Μεγάλο αστικό συγκρότημα υδροδοτείται από ταμιευτήρα και σύστημα γεωτρήσεων. Περιγράψτε το διαχειριστικό πρόβλημα, τις παραμέτρους που θα ληφθούν υπόψη, τα δεδομένα που θα απαιτηθούν, και τα κριτήρια και τους περιορισμούς της διαχείρισης. **(1 μονάδα)**

2. Το κόστος κατασκευής λιμνοδεξαμενής είναι 300 000 €, και η ετήσια απόδοσή της είναι 150 000 m^3 νερού. Κάνοντας τις απαραίτητες παραδοχές, εκτιμήστε το κόστος του νερού ανά m^3. **(1 μονάδα)**

2. Στα πλαίσια μελέτης αναμόρφωσης του υδρευτικού συστήματος οικισμού σχεδιάζεται νέα δεξαμενή χωρητικότητας 500 m^3 με ύψος 5 m, ορθογωνική κάτοψη και δύο θαλάμους σε επαφή. Υπολογίστε τις διαστάσεις της δεξαμενής σε τρόπο ώστε να ελαχιστοποιηθεί το εμβαδό των τοιχωμάτων της. **(1 μονάδα)**

4. Το κόστος κατασκευής C αρδευτικού ταμιευτήρα, ανηγμένο σε ετήσια βάση, δίνεται από την προσεγγιστική σχέση $C = a\,(0.5 + \theta^{0.8})^{0.6}$. Το ετήσιο όφελος B από τη χρήση του ταμιευτήρα δίνεται προσεγγιστικά από τη σχέση $B = \beta\,(0.1 + \theta^{0.9})^{0.3}$. Στα παραπάνω α και β είναι αριθμητικές σταθερές και θ είναι ο λόγος του ύψους του φράγματος προς το ανώτατο δυνατό ύψος φράγματος που από την τοπογραφία και γεωλογία της περιοχής καθορίστηκε σε 30 m. Βρείτε το ύψος του φράγματος που μεγιστοποιεί το λόγο B / C. (1.5 μονάδα)

Πολυκριτηριακή ανάλυση

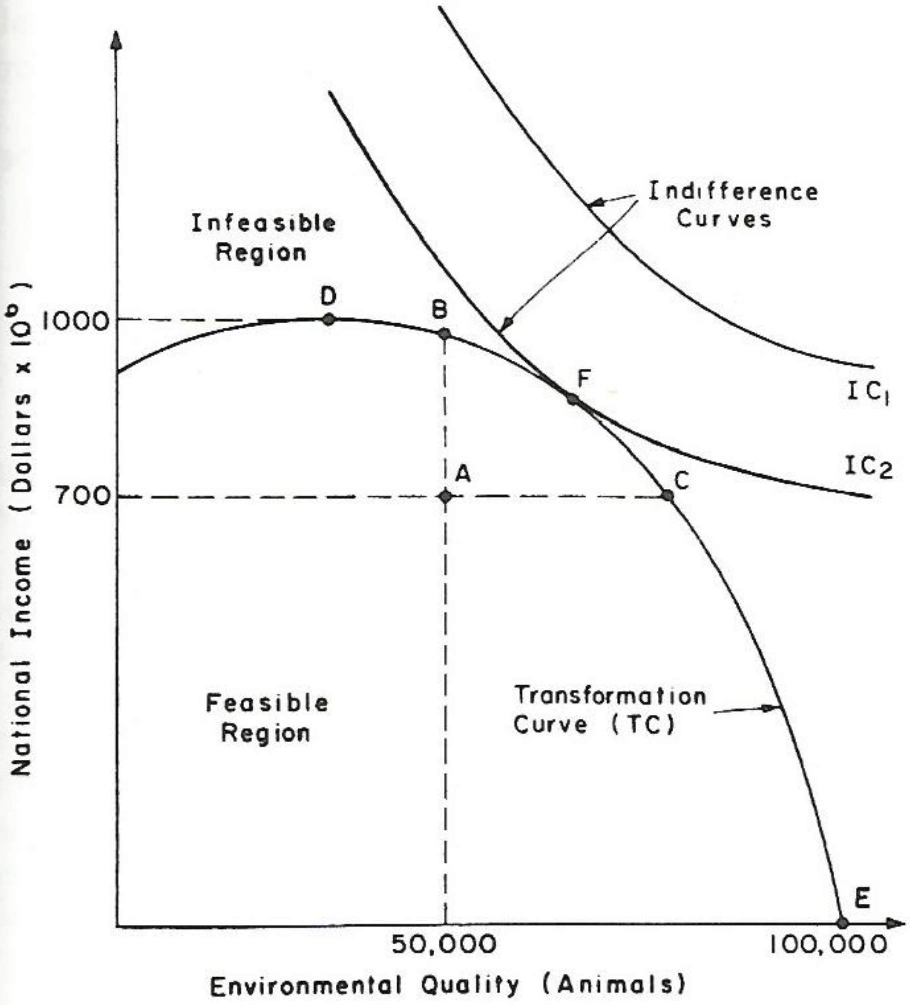


Figure 13.1 Graphical representation of multiobjective analysis. (From Cohon and Marks, 1973. Copyrighted by the American Geophysical Union.)

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Τεχνικές ανάλυσης δεδομένων και λήψης αποφάσεων, Ασημακόπουλος Δ., Αραμπατζής Γ. Παπασωτηρίου,2002
2. Σημειώσεις στο μάθημα ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΥΔΑΤΙΚΩΝ ΠΟΡΩΝ, Κουτσογιάννης Δ. , Ευστρατιάδης Α., ΕΜΠ. Πολιτικοί Μηχανικοί.
3. Mays L., Tung Y., Hydrosystems Engineering and management, 1992, MacGraw Hill
4. https://www.matheno.com/blog/how-to-solve-optimization-problems-in-calculus/
5. Water Resources Systems, Planning and Management, Loucks D., van Beek E. UNESCO PUBLISHING – STUDIES IN HYDROLOGY, 2005.