ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΟΝ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟ Ζ

ΑΣΚΗΣΗ 1 Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός **Ζ** της μοναδιαίας βηματικής ακολουθίας $u[n] = \begin{cases} 1 & \text{όταν} \quad n \geq 0 \\ 0 & \text{όταν} \quad n < 0 \end{cases}$.

ΛΥΣΗ: Με βάση τον ορισμό του μετασχηματισμού Ζ είναι:

$$X(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} u[n].z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} 1.z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (z^{-1})^n = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1} \quad (1)$$

Η μοναδιαία βηματική ακολουθία επηρεάζει τα όρια της άθροισης.

Η σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} (z^{-1})^n$ είναι το άθροισμα απείρων όρων φθίνουσας γεωμετρική προόδου με πρώτο όρο το 1 και λόγο z^{-1}.

Επομένως για να υπάρχει το άθροισμα θα πρέπει $|z| < 1$ ή $|z| > 1$

Η σχέση $|z| > 1$ ορίζει το **πεδίο σύγκλισης** του μετασχηματισμού, δηλαδή το σύνολο τιμών του μιγαδικού επιπέδου $-z$ για τις οποίες το άθροισμα του μετασχηματισμού Ζ συγκλίνει.

ΑΣΚΗΣΗ 2 Να βρεθεί ο μετασχηματισμός **Ζ** της ακολουθίας $x[n] = n \cdot a^n u[n]$.

ΛΥΣΗ: Σύμφωνα με τον μετασχηματισμό $x[n] = a^n u[n] \leftrightarrow \frac{z}{z-a} = X(z)$. Η παράγωγος της $X(z)$, ως προς z, δίνει:

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-a}\right) = \frac{(z)'(z-a)-(z-a)' \cdot z}{(z-a)^2} = \frac{1\cdot(z-a)-1\cdot z}{(z-a)^2} = \frac{-a}{(z-a)^2} \quad (1)$$

Με βάση την ιδιότητα $n \cdot x[n] \to -z\frac{dX(z)}{dz}$, προκύπτει ότι:

$$\mathbf{Z}\{n \cdot a^n u[n]\} = \frac{az}{(z-a)^2} \quad (2).$$

ΑΣΚΗΣΗ 3 Να προσδιοριστεί η αρχική και η τελική τιμή της απόκρισης συστήματος όταν :

$$Y(z) = \frac{2z^2}{(z-1)(z-\alpha)(z-\beta)} \quad , \quad |\alpha|,|\beta| < 1$$

ΛΥΣΗ: Από το θεώρημα αρχικής τιμής είναι:

$$y[0] = \lim_{z\to\infty} Y(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{2z^2}{(z-1)(z-\alpha)(z-\beta)} = 0 \quad (1)$$

Με βάση το θεώρημα της τελικής τιμής:

$$y[\infty] = \lim_{z\to 1}(z-1)\ Y(z) = \lim_{z\to 1} \frac{2z^2}{(z-\alpha)(z-\beta)} = \frac{2}{(1\text{-}\alpha)(1\text{-}\beta)} \quad (2)$$

ΑΣΚΗΣΗ 4 Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Z των παρακάτω συναρτήσεων

$$F_1(z) = \frac{10z}{(z-1)(z-0.5)} \quad , \quad F_2(z) = \frac{2z^3+z}{(z-2)^2(z-1)}$$

$$F_3(z) = \frac{z^2+z+2}{(z-1)(z^2-z+1)} \quad , \quad F_4(z) = \frac{z(z+1)}{(z-1)(z-.25)^2}$$

ΛΥΣΗ:

α) $$\frac{F_1(z)}{z} = \frac{k_1}{z-1} + \frac{k_2}{z-0.5} = \frac{20}{z-1} + \frac{20}{z-0.5} \quad (1)$$

Άρα
$$F_1(z) = 20\frac{z}{z-1} - 20\frac{z}{z-0.5} \Rightarrow$$
$$f_1(k) = IZT[F_1(z)] = 20(1-0.5^k)u(k) \quad (2)$$

β) Μέθοδος ανάπτυξης σε άθροισμα μερικών κλασμάτων.

$$\frac{F_2(z)}{z} = \frac{2z^2+1}{(z-2)^2(z-1)} = \frac{k_1}{z-1} + \frac{k_{21}}{z-2} + \frac{k_{22}}{(z-2)^2} \quad (3)$$

$$k_1 = \frac{2z^2+1}{(z-2)^2(z-1)}(z-1)\Bigg(_{z=1} = \frac{3}{1} = 3 \quad (4)$$

$$k_{22} = \lim_{z\to 2}\left[\frac{2z^2+1}{z-1}\right] = \frac{9}{1} = 9 \quad (5)$$

$$k_{21} = \lim_{z\to 2}\left[\frac{2z^2+1}{z-1}\right]' = \lim_{z\to 2}\left[\frac{4z(z-1)-(2z^2+1)}{(z-1)^2}\right] = \frac{8-(9)}{1} = -1 \quad (6)$$

Επομένως $\frac{F_2(z)}{z}=\frac{3}{z-1}-\frac{1}{z-2}+\frac{9}{(z-2)^2}$ (7)

ή $F_2(z)=3\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-2}+9\frac{z}{\left(z-2\right)^2}\overset{IZT}{\Rightarrow}$

$f_2(k)=Z^{-1}\left[F_2(z)\right]=\left(3-2^k+9k2^{k-1}\right)u(k)$ (8)

γ) $\frac{F_3(z)}{z}=\frac{z^2+z+2}{z(z-1)(z^2-z+1)}=\frac{\mathrm{k}_1}{\mathrm{z}}+\frac{\mathrm{k}_2}{\mathrm{z\text{-}1}}+\frac{\mathrm{k}_3}{\mathrm{z\text{-}e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{3}}}+\frac{\mathrm{k}_4=\overline{k_3}}{\mathrm{z\text{-}e}^{\mathrm{-j}\frac{\pi}{3}}}$ (13)

$k_1=\lim_{z\to 0}\left(\frac{F_3(z)}{z}z\right)=\frac{2}{(-1)1}=-2$ (14)

$k_2=\lim_{z\to 1}\left(\frac{F_3(z)}{z}(z-1)\right)=\frac{1+1+2}{(1-1+1)1}=4$ (15)

$$k_3=\lim_{z\to e^{j\frac{\pi}{3}}}\left(\frac{F_3(z)}{z}(z-e^{j\frac{\pi}{3}})\right)=\frac{e^{j\frac{2\pi}{3}}+e^{j\frac{\pi}{3}}+2}{e^{j\frac{\pi}{3}}\left(e^{j\frac{\pi}{3}}-1\right)\left(e^{j\frac{\pi}{3}}-e^{-j\frac{\pi}{3}}\right)}=$$

$$\frac{-0.5+\mathrm{j}0.866+0.5+\mathrm{j}0.866+2}{\left(0.5+\mathrm{j}0.866-1\right)2\mathrm{j}\sin\frac{\pi}{3}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{3}}}=\frac{2+\mathrm{j}1.732}{\left(-0.5+\mathrm{j}0.866\right)2\mathrm{j}0.866\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{3}}}=$$

$$\frac{2.645^{\angle 40.9^\circ}}{1^{\angle 60^\circ}1^{\angle 120^\circ}1^{\angle 90^\circ}1.732}=1.53^{\angle -229.1^\circ}$$

$\overline{k_3}=k_4=1.53^{\angle 229.1^\circ}$ (16)

Άρα $F_3(z)=-2+4\frac{z}{z-1}+1.53e^{-j229.1}\frac{z}{z-e^{j\frac{\pi}{3}}}+1.53e^{j229.1}\frac{z}{z-e^{-j\frac{\pi}{3}}}$ (17)

$$f_3(k)=-2\delta(k)+4u(k)+1.53e^{-j229.1}\left(e^{j\frac{\pi}{3}}\right)^k+1.53e^{j229.1}\left(e^{-j\frac{\pi}{3}}\right)^k\Rightarrow$$

$$f_3(k)=-2\delta(k)+4u(k)+1.53\left(e^{-j229.1}e^{j\frac{k\pi}{3}}+e^{j229.1}e^{-j\frac{k\pi}{3}}\right)=$$

$$-2\delta(k)+4u(k)+1.53(e^{j\left(\frac{k\pi}{3}-229.1\right)}+e^{-j\left(\frac{k\pi}{3}-229.1\right)})$$

$f_3(k)=\left(-2\delta(k)+4u(k)+3.06\cos\left(\frac{k\pi}{3}-229.1\right)\right)u(k)$ (18)

δ) $\frac{F(z)}{z}=\frac{(z+1)}{(z-1)(z-.25)^2}=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{(z-.25)^2}+\frac{C}{(z-.25)}$ (19) (5.3.4)

Θα δώσουμε ένα άλλο τρόπο υπολογισμού των A,B,C.

$$A = \left.\frac{(z+1)}{(z-.25)^2}\right|_{z=1} = \frac{2}{(.75)^2} = 3.56 \quad (20)\,.$$

Για να υπολογίσουμε το B, πολλαπλασιάζουμε με $(z-.25)^2$

$$\frac{(z+1)}{(z-1)} = \frac{A}{z-1}(z-.25)^2 + B + C(z-.25)$$

Οπότε στο z = .25 υπολογίζουμε

$$B = \left.\frac{(z+1)}{(z-1)}\right|_{z=.25} = \frac{1.25}{-.75} = -\frac{5}{4}\frac{4}{3} = -\frac{5}{3} = -1.67 \quad (21)\,.$$

Υπολογισμός του C

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{(z+1)}{(z-1)}\right] = \frac{d}{dz}\left[\frac{A}{z-1}(z-.25)^2\right] + C\ ,$$

$$C = \frac{d}{dz}\left[\frac{(z+1)}{(z-1)}\right]_{z=.25} = \frac{1(z-1)-1(z+1)}{(z-1)^2} \Rightarrow$$

$$C = \left.\frac{-2}{(z-1)^2}\right|_{z=.25} = \frac{-2}{(-.75)^2} = -3.56 \qquad (22)$$

Οπότε $F(z) = \frac{(z+1)}{(z-1)(z-.25)^2} = \frac{3.56z}{z-1} + \frac{-1.67z}{(z-.25)^2} + \frac{-3.56z}{(z-.25)}$ (23)

Ο δεύτερος όρος μπορεί να γραφεί ως:

$$-1.67\frac{z}{(z-.25)^2} = \frac{-1.67}{.25}\frac{0.25z}{(z-.25)^2} = -6.68\frac{0.25z}{(z-.25)^2}\,.$$

Οπότε, $f(k) = \left[3.56 - 6.68\cdot k(.25)^k - 3.56(.25)^k\right]u(k)$ (24)

ΑΣΚΗΣΗ 5 Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Z της $X(z) = \frac{z^2+6z}{(z^2-2z+2)(z-1)}$

ΛΥΣΗ:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{k_1}{z-1} + \frac{k_2}{z-1+j} + \frac{k_3}{z-1-j} \quad (1)$$

Θα υπολογίσουμε τα k_i με τον τύπο του Heaviside.

$$k_1 = \lim_{z=1} \frac{z^2+6z}{\left(z^2-2z+2\right)\left(z-1\right)}(z-1) = 7 \quad (2)$$

$$k_3 = \lim_{z=1+j} \frac{z^2+6z}{\left(z^2-2z+2\right)\left(z-1\right)}(z-1-j) = \frac{1+j+6}{(1+j-1)(1+j-1+j)} =$$

$$= \frac{7+j}{j\cdot 2j} = \frac{7+j}{2j^2} = -\frac{7+j}{2} = -\frac{7}{2}-\frac{j}{2} \quad (3)$$

$$k_2 = -\frac{7}{2}+\frac{j}{2} = \overline{k_3} \quad (4)$$

Επομένως

$$X(z) = 7\frac{z}{z-1} + \left(-\frac{7}{2}+j\frac{1}{2}\right)\frac{z}{z-1+j} + \left(-\frac{7}{2}-j\frac{1}{2}\right)\frac{z}{z-1-j} \quad (5)$$

$$(5) \overset{IZT}{\Rightarrow} x(k) = 7 + \left(-\frac{7}{2}+j\frac{1}{2}\right)\left(\sqrt{2}\right)^k e^{-j\frac{\pi}{4}k} + \left(-\frac{7}{2}-j\frac{1}{2}\right)\left(\sqrt{2}\right)^k e^{j\frac{\pi}{4}k} \Rightarrow$$

$$x(k) = 7 - \frac{7}{2}\left(\sqrt{2}\right)^k e^{-j\frac{\pi}{4}k} - \frac{7}{2}\left(\sqrt{2}\right)^k e^{j\frac{\pi}{4}k} +$$

$$+ j\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}\right)^k e^{-j\frac{\pi}{4}k} - j\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}\right)^k e^{j\frac{\pi}{4}k} \Rightarrow$$

$$x(k) = 7 - \frac{7}{2}\left(\sqrt{2}\right)^k \left[e^{j\frac{\pi}{4}k} + e^{-j\frac{\pi}{4}k}\right] - j\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}\right)^k \left[e^{j\frac{\pi}{4}k} - e^{-j\frac{\pi}{4}k}\right] \Rightarrow$$

$$x(k) = 7 - \frac{7}{2}\left(\sqrt{2}\right)^k 2\cos\frac{\pi}{4}k - j\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}\right)^k 2j\sin\frac{\pi}{4}k \Rightarrow$$

$$x(k) = \left(7 - 7\left(\sqrt{2}\right)^k \cos\frac{\pi}{4}k + \left(\sqrt{2}\right)^k \sin\frac{\pi}{4}k\right)u(k) \quad (5)$$

ΑΣΚΗΣΗ 6 Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Z των

$a)\quad H(z) = \dfrac{(z-1)(z+0.8)}{(z+0.5)(z+0.2)},$

$\beta)\quad H(z) = \dfrac{(z^2-1)(z+0.8)}{(z-0.5)^2(z+0.2)}$

ΛΥΣΗ:

$$a)\quad H(z)=\frac{(z-1)(z+0.8)}{(z+0.5)(z+0.2)},$$

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{C_1}{z}+\frac{C_2}{z-0.5}+\frac{C_3}{z+0.2}$$

$$C_1=\frac{X(z)}{z}z\Big|_{z=0}=8,\qquad C_2=\frac{X(z)}{z}(z-0.5)\Big|_{z=0.5}=-1.857,$$

$$C_3=\frac{X(z)}{z}(z+0.2)\Big|_{z=-0.2}=-5.143,$$

$$X(z)=8-\frac{1.857z}{z-0.5}-\frac{5.143z}{z+0.2}$$

$$x[n]=8\delta[n]-1.857(0.5)^n u[n]-5.143(-0.2)^n u[n]$$

$$\beta)\quad H(z)=\frac{(z^2-1)(z+0.8)}{(z-0.5)^2(z+0.2)}$$

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{C_1}{z}+\frac{C_2}{z+0.2}+\frac{C_3}{z-0.5}+\frac{C_4}{(z-0.5)^2}$$

$$C_1=\frac{X(z)}{z}z\Big|_{z=0}=-16,\qquad C_2=\frac{X(z)}{z}(z+0.2)\Big|_{z=-0.2}=5.88,$$

$$C_4=\frac{X(z)}{z}(z-0.5)\Big|_{z=0.5}=-2.79,$$

$$C_3=\frac{d}{dz}\left(\frac{(z^2-1)(z+0.8)}{z(z+0.2)}\right)\Bigg|_{z=0.5}=11.12$$

$$X(z)=-16-\frac{5.88z}{z+0.2}-\frac{11.12z}{z-0.5}-\frac{2.79z}{(z-0.5)^2}$$

$$x[n]=-16\delta[n]+5.88(-0.2)^n u[n]+11.12(0.5)^n u[n]-2.79n(0.5)^n u[n].$$