ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ - ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 1 Έστω το σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς $G(s)=\dfrac{1}{s+\alpha}$. Να βρεθεί η διακριτή συνάρτηση μεταφοράς $G(z)$ με τη μέθοδο της αμετάβλητης κρουστικής απόκρισης.

ΛΥΣΗ: Η απόκριση αν είσοδος είναι η κρουστική θα είναι g(t)=e^{-aT}

Από τον ορισμό του Z.T έχουμε:

$$G(z)=\sum_{k=0}^{\infty} g(kT)z^{-k}=\sum_{k=0}^{\infty} e^{-akT}z^{-k}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(e^{-aT}z^{-1}\right)^{k} \quad (1)$$

ή

$$G(z)=\frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}=\frac{z}{z-e^{-aT}}=1+e^{-aT}z^{-1}+e^{-2aT}z^{-2}+.... \quad (2)$$

Παρατηρούμε από τις σχέσεις (1) και (2) ότι η παραπάνω μέθοδος διατηρεί την κρουστική απόκριση στα διακριτά χρονικά σημεία t=kT.

Ας ελέγξουμε κατά πόσο το ψηφιακό σύστημα που προκύπτει από τη μέθοδο αυτή διατηρεί τη βηματική απόκριση του αναλογικού συστήματος.

Η βηματικη απόκριση του αναλογικού φίλτρου είναι:

$$\mathrm{Y(s)}=\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s+a}=\frac{1/a}{s}-\frac{1/a}{s+\alpha}\overset{L^{-1}}{\Rightarrow}y(t)=\frac{1-e^{-aT}}{a} \quad (3)$$

Η βηματική απόκριση του ψηφιακού φίλτρου είναι:

$$\mathrm{Y(z)}=\frac{z}{z-1}\cdot\frac{z}{z-e^{-\alpha T}}=\frac{1}{1-e^{-\alpha T}}\left(\frac{z}{z-1}-\frac{z-e^{-\alpha T}}{z-e^{-\alpha T}}\right)\overset{IZT}{\Rightarrow}$$

$$y(k)=\frac{1}{1-e^{-\alpha T}}\left(1-e^{-aT}e^{-akT}\right)u(k) \quad (4)$$

Προφανώς από τις σχέσεις (3) και (4) προκύπτει ότι η βηματική απόκριση του αναλογικού συστήματος διαφέρει από αυτή του διακριτοποιημένου συστήματος.

ΑΣΚΗΣΗ 2 Να βρεθεί το ψηφιακό φίλτρο που προκύπτει από τη μετατροπή του πρωτοβάθμιου αναλογικού φίλτρου χαμηλών συχνοτήτων $G(s)=\dfrac{1}{s+1}$ χρησιμοποιώντας την εκθετική μέθοδο.

ΛΥΣΗ: Εκθετική μέθοδος

Η ζητούμενη συνάρτηση μεταφοράς προκύπτει ως εξής.

$$G(z)=(1-z^{-1})Z(\frac{G(s)}{s}) \quad (1)$$

$$(1)\Rightarrow G(z)=(1-z^{-1})Z\left[\frac{1}{s(s+1)}\right]=(1-z^{-1})Z\left[\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}\right]\Rightarrow$$

$$G(z)=(1-z^{-1})\left[\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-e^{-T}}\right]=(1-z^{-1})\left[\frac{(1-e^{-T})z}{(z-1)(z-e^{-T})}\right]\Rightarrow$$

$$G(z)=\frac{(1-e^{-T})z^{-1}}{1-e^{-T}z^{-1}} \quad (2)$$

Για T=1sec έχουμε:

$$G(z)=\frac{0.632(z-1)}{(z-1)(z-0.368)}=\frac{0.632}{z-0.368} \quad (3)$$

Για μοναδιαία βηματική είσοδο όπου $X(z)=\frac{z}{z-1}$ έχουμε:

$$Y(z)=\frac{z}{z-1}\cdot\frac{0.632}{z-0.368} \quad (4)$$

με τελική τιμή,

$$\lim_{k\to\infty} y(k)=\lim_{z\to 1} Y(z)(z-1)=1 \quad (5)$$

Η τελική τιμή της βηματικής απόκρισης του συνεχούς συστήματος είναι:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) \overset{\Theta.T.T}{=} \lim_{s\to 0} sY(s)=\lim_{s\to 0} s\cdot\frac{1}{s+1}\cdot\frac{1}{s}=1 \quad (6)$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Z της Y(z) είναι :

$$\frac{Y(z)}{z}=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z-0.368}\overset{z^{-1}}{\Rightarrow} y(k)=1-(0.368)^k, k\ge 0 \quad (7)$$

$$\text{οπου} \quad y(0)=0$$
$$y(1)=1-0.368=0.632$$
$$y(2)=1-(0.368)^2=0.864 \quad \text{κ.λ.π}$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace του Y(s) είναι:

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \overset{L^{-1}}{\Rightarrow} y(t) = 1 - e^{-t} \quad (8)$$

Οι τιμές της αναλογικής βηματικής απόκρισης στα διακριτά σημεία t=kT παρατηρούμε ότι συμπίπτουν με αυτές της y(kT). Επομένως η μέθοδος διατηρεί τη βηματική απόκριση.

Θέτουμε $A = (1 - e^{-T})$ και $B = e^{-T}$ οπότε από τη σχέση (2) η συνάρτηση μεταφοράς γράφεται ως:

$$G(z) = \frac{(1-e^{-T})z^{-1}}{1-e^{-T}z^{-1}} = \frac{Az^{-1}}{1-Bz^{-1}} = \frac{Y(z)}{X(z)} \Rightarrow$$

$$Y(z)(1-Bz^{-1}) = AX(z) \Rightarrow Y(z) - BY(z)z^{-1} = AX(z)z^{-1} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y(k) - By(k-1) = Ax(k-1) \qquad (9)$$

Επομένως η ζητούμενη εξίσωση διαφορών του συστήματος είναι:

$$y(k) = Ax(k-1) + By(k-1) \qquad (10)$$

Για T=1s, έχουμεA=0.6321 και B=0.3679.

Για βηματική είσοδο η απόκριση είναι

$$y(k) = 0.6321x(k-1) + 0.3679y(k-1) \qquad (11)$$

Φτιάχνουμε τον πίνακα τιμών και παρατηρούμε τη μεταβολή της απόκρισης με το διακριτό χρόνο.

k	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
x(k)	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*
y(k)	*0.6321*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*

ΑΣΚΗΣΗ 3 Να βρεθεί το ψηφιακό φίλτρο που προκύπτει από τη μετατροπή του πρωτοβάθμιου αναλογικού φίλτρου χαμηλών συχνοτήτων $G_P(s) = \frac{1}{s(s+1)}$ χρησιμοποιώντας την εκθετική μέθοδο.

ΛΥΣΗ: Η ζητούμενη συνάρτηση μεταφοράς προκύπτει ως εξής.

$$G(z) = (1 - z^{-1})Z(\frac{G_P(s)}{s}) \quad (1)$$

Επομένως

$$G(z) = (1-z^{-1})Z\left\{\frac{G_P(s)}{s}\right\} = (1-z^{-1})Z\left\{\frac{1}{s^2(s+1)}\right\} \Rightarrow$$

$$G(z) = (1-z^{-1})Z\left\{\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}\right\} = (1-z^{-1})\left(Z\left\{\frac{1}{s^2}\right\} - Z\left\{\frac{1}{s}\right\} + Z\left\{\frac{1}{s+1}\right\}\right)$$

$$\Rightarrow G(z) = (1-z^{-1})\left(\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2} - \frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{1}{1-e^{-T}z^{-1}}\right) \Rightarrow$$

$$G(z) = \frac{(T-1+e^{-T})z^{-1} + (1-e^{-T} - Te^{-T})z^{-2}}{(1-z^{-1})(1-e^{-T}z^{-1})} \quad (2)$$

ΑΣΚΗΣΗ 4.10 Να μετατραπεί σε ψηφιακή μορφή με τη μέθοδο διαφοράς προς τα πίσω (backward diffence) η Σ.Μ $\mathrm{G(s)} = \frac{\alpha}{\mathrm{s+b}}$ και να γραφεί η εξίσωση διαφορών για εξομοίωση στον Η/Υ.

ΛΥΣΗ:

Ισχύει ότι

$$\mathrm{G(z)} = \mathrm{G(s)}\Big|_{\mathrm{s}=\frac{1-z^{-1}}{T}} \Rightarrow$$

$$G(z) = \frac{a}{\frac{1-z^{-1}}{T} + b} = \frac{aT}{(1+bT) - z^{-1}} = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad (1)$$

Επομένως $Y(z)(1+bT) - z^{-1}Y(z) = X(z)(aT) \quad (2)$

Η εξίσωση διαφοράς (Ε.Δ) είναι:

$y(k)(1+bT) - y(k-1) = aTx(k)$ ή

$$y(k) = \left(\frac{1}{1+bT}\right)y(k-1) + aTx(k) \quad (3)$$

ΑΣΚΗΣΗ 4 Να μετατραπεί ο αναλογικός ελεγκτής $\mathrm{G(s)} = \frac{4}{\mathrm{s+4}}$ σε ψηφιακή μορφή με τη μέθοδο Tustin.

ΛΥΣΗ: Ισχύει ότι

$$\mathrm{G(z)=G(s)}\Big|_{s=\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}} \quad (1)$$ Επομένως

$$\mathrm{G(z)}=\frac{4}{\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}+4}=\frac{4T}{2+4T}\cdot\frac{1+z^{-1}}{1+z^{-1}\frac{(4T-2)}{(4T+2)}}=\frac{Y(z)}{X(z)} \qquad (2)$$

Η Εξίσωση διαφοράς που θα προκύψει είναι:

$$y(k)=-\frac{4T-2}{4T+2}y(k-1)+\frac{4T}{4T+2}\left[x(k)+x(k-1)\right] \quad (3)$$

Για T=0.1sec έχουμε: $\mathrm{y(k)}=\frac{2}{3}\mathrm{y(k-1)}+\frac{1}{6}(\mathrm{x(k)+x(k-1)}),\quad k\geq 0 \quad (4)$

ΑΣΚΗΣΗ 5 Έστω η συνάρτηση μεταφοράς $G_c(s)=\frac{1}{(s+1)(s+4)}$ η οποία έχει πόλους στα σημεία s=-1 και s=-4, άρα είναι ευσταθής. Να υπολογιστεί η ισοδύναμη συνάρτηση μεταφοράς διακριτού χρόνου $G_D(z)$, εφαρμόζοντας τη μέθοδο διαφοράς προς τα πίσω.

ΛΥΣΗ: Θα υπολογίσουμε την ισοδύναμη συνάρτηση μεταφοράς διακριτού χρόνου $G_D(z)$, εφαρμόζοντας τη μέθοδο διαφοράς προς τα πίσω οπότε θέτουμε στη $G_C(s)$ όπου s=$\frac{1-z^{-1}}{T}$.

Επομένως

$$\mathrm{G_D(z)=G_c(s)}\Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{T}}=\frac{1}{(\frac{1-z^{-1}}{T}+1)(\frac{1-z^{-1}}{T}+4)}=$$

$$\frac{T^2}{(1+T-z^{-1})(1+4T-z^{-1})}=\frac{T^2z^2}{[(1+T)z-1][(1+4T)z-1]}\Rightarrow$$

$$\mathrm{G_D(z)}=\frac{T^2(1+T)^{-1}(1+4T)^{-1}z^2}{(z-\frac{1}{1+T})(z-\frac{1}{1+4T})} \qquad (1)$$

Οι πόλοι της $G_D(z)$ είναι $z_1=\frac{1}{1+T}$ και $z_2=\frac{1}{1+4T}$.

Επειδή T>0 έχουμε $|z_1|=\left|\frac{1}{1+T}\right|$<1 και $|z_2|=\left|\frac{1}{1+4T}\right|$<1

Άρα το σύστημα που προκύπτει είναι και αυτό ευσταθές .

Για T=1 έχουμε $G_D(z)=\frac{1}{10}\frac{z^2}{(z-\frac{1}{2})(z-\frac{1}{5})}$ (2)

Επομένως οι πόλοι είναι στα σημεία $z_1=\frac{1}{2}$ και $z_2=\frac{1}{5}$ με $|z_1|=0.5<1$ και $|z_2|=0.2$ <1 άρα το σύστημα που προέκυψε με την αντικατάσταση $s=\frac{1-z^{-1}}{T}$ είναι ευσταθές.

ΑΣΚΗΣΗ 6 Να βρεθεί η εξίσωση του ψηφιακού φίλτρου που προκύπτει από την μετατροπή του αναλογικού φίλτρου με συνάρτηση μεταφοράς $H(s)=\frac{s+1}{(s+1)^2+4}$ εφαρμόζοντας τη μέθοδο του ταιριάσματος της θέσης πόλων-μηδενικών (Pole-Zero match), για T=1sec.

ΛΥΣΗ: Η συνάρτηση H(s) γράφεται:

$$H(s)=\frac{s+1}{(s+1+2j)(s+1-2j)} \quad (1) \qquad (1)$$

Επειδή ο βαθμός του παρονομαστή της H(s) είναι n=2 και ο βαθμός του αριθμητή είναι m=1, θεωρείται ότι έχει n-m=2-1=1 μηδενικό στο άπειρο. Ας σημειωθεί ότι όσα μηδενικά της G(s) τείνουν στο άπειρο, αντικαθίστανται με μηδενικά z=-1 στο πεδίο z. Επομένως θα έχουμε για την H(z):

$$H(z)=\frac{(1-z^{-1}e^{-j\pi})^*(1-z^{-1}e^{-T})}{1-2z^{-1}e^{-T}\cos(2T)+e^{-2T}z^{-2}} \quad (2) \qquad (2)$$

Εξήγηση του όρου $1\text{-}z^{-1}e^{-j\pi}$: Η συχνότητα του πεδίου s, $\omega_s\to\infty$ (όταν το μηδενικό απειρίζεται) ισοδυναμεί με τη συχνότητα του πεδίου z,$\omega\to\pi$ οπότε η αντιστοιχία του μηδενικού στο άπειρο με το μηδενικό στο πεδίο z είναι:

$$1-z^{-1}e^{j\omega_s T}=1-z^{-1}e^{j\frac{\omega}{T}T}=1-z^{-1}e^{j\pi}=1-z^{-1}(-1)=1+z^{-1} \quad (3) \qquad (3)$$

$$\overset{(2),(3)}{\Longrightarrow} H(z)=\frac{(1+z^{-1})(1-z^{-1}e^{-T})}{1-2z^{-1}e^{-T}\cos(2T)+e^{-2T}z^{-2}}\Rightarrow$$

$$\text{H(z)}=\frac{(z+1)(z-e^{-T})}{z^2-2ze^{-T}\cos(2T)+e^{-2T}} \quad (4) \qquad (4)$$

Για T=1sec έχουμε:

$$(4) \Rightarrow H(z) = \frac{(z+1)(z-0.3678)}{z^2+0.306z+0.135} \qquad (5)$$ (5)

Αλλά $H(z) = \dfrac{Y(z)}{X(z)} \overset{(5)}{=} \dfrac{z^2+0.6322z-0.3678}{z^2+0.306z+0.135} \qquad (6)$ (6)

Η σχέση (6) πρέπει να πολλαπλασιαστεί με τον διορθωτικό παράγοντα μόνιμου κέρδους (dc gain) δηλαδή:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = K_{dc} \cdot \frac{z^2+0.6322z-0.3678}{z^2+0.306z+0.135} \qquad (7)$$ (7)

Όπου το K_{dc} υπολογίζεται ως εξής:

$$K_{dc} = \frac{\lim\limits_{t\to\infty} y(t)}{\lim\limits_{k\to\infty} y(k)} \qquad (8)$$ (8)

$$\lim_{t\to\infty} y(t) \underset{L.T}{\overset{\Theta.T.T}{=}} \lim_{s\to 0} s\left(\frac{1}{s}\right) H(s) = \lim_{s\to 0} H(s) = 0.2$$

$$\lim_{k\to\infty} y(k) \underset{Z.T}{\overset{\Theta.T.T}{=}} \lim_{z\to 1} (z-1)\frac{z}{z-1} H(z) = \lim_{z\to 1} zH(z) = \frac{1.2644}{1.441} = 0.877$$

$$(8) \Rightarrow K_{dc} = \frac{0.2}{0.877} = 0.23 \qquad (9)$$

$$(7),(9) \Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = 0.23\frac{1+0.6322z^{-1}-0.3678z^{-2}}{1+0.306z^{-1}+0.135z^{-2}} \Rightarrow$$

$$(1+0.306z^{-1}+0.135z^{-2})Y(z) = 0.23(1+0.6322z^{-1}-0.3678z^{-2})X(z) \Rightarrow$$

$$Y(z) = -0.135z^{-2}Y(z) - 0.306z^{-1}Y(z) + 0.23X(z) +$$
$$+0.1454z^{-1}X(z) - 0.084z^{-2}X(z) \quad (10)$$

Επομένως η εξίσωση διαφοράς του ψηφιακού φίλτρου θα είναι:

$$y(k) = -0.135y(k-2) - 0.306y(k-1) +$$
$$+0.23\mathrm{x(k)} + 0.1454\mathrm{x(k-1)} - 0.0846\mathrm{x(k-2)} \qquad (11)$$
