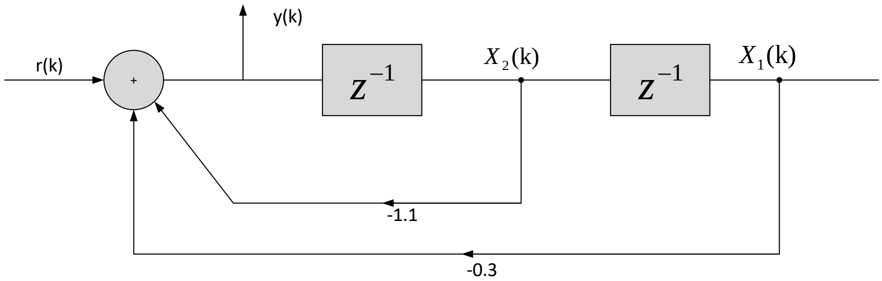
ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΣΤΟ ΧΩΡΟ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ – ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 1. Δίνεται το δομικό διάγραμμα του σχήματος.



α) Να γραφτούν οι εξισώσεις κατάστασης του συστήματος.

β) Να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς $H(z) = Y(z)/R(z)$

ΛΥΣΗ: α) Θεωρούμε τις μεταβλητές κατάστασης $x_1(k)$ και $x_2(k)$ στις εξόδους των δύο στοιχείων καθυστέρησης οπότε οι ζητούμενες εξισώσεις κατάστασης θα είναι :

$$
\begin{aligned}
&x_1(k+1) = x_2(k) \\
&x_2(k+1) = -0.3x_1(k) - 1.1x_2(k) + r(k) \qquad (1) \\
&\kappa\alpha\iota \\
&y(k) = -0.3x_1(k) - 1.1x_2(k) + r(k)
\end{aligned}
$$

Επομένως οι εξισώσεις κατάστασης υπό μορφή πινάκων γράφονται όπως στη σχέση (2).

$$
\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.3 & -1.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(k) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (2) \\
&y(k) = [-0.3 \quad -1.1] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + r(k)
\end{aligned}
$$

β) Ισχύει ότι:

$H(z) = C^T (zI - A)^{-1} b + D \quad (3)$

Υπολογισμός του $(zI - A)$:

$$(zI - A) = z\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.3 & -1.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z & -1 \\ 0.3 & z+1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Υπολογισμός του $(zI - A)^{-1}$:

$$(zI - A)^{-1} = \begin{pmatrix} z & 1 \\ 0.3 & z+1.1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{z^2 + 1.1z + 0.3}\begin{bmatrix} z+1.1 & 1 \\ -0.3 & z \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$(3),(5) \Rightarrow H(z) = C^T (zI - A)^{-1} b + D =$$

$$= [-0.3 \quad -1.1]\frac{1}{z^2 + 1.1z + 0.3}\begin{bmatrix} z+1.1 & 1 \\ -0.3 & z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \Rightarrow$$

Μετά από πράξεις προκύπτει ότι η ζητούμενη συνάρτηση μεταφοράς δίνεται από τη σχέση (6).

$$H(z) = \frac{z^2}{z^2 + z + 0.3} \qquad (6)$$

ΑΣΚΗΣΗ 2. Να βρεθεί η θεμελιώδης μήτρα Φ(k) του συστήματος διακριτού χρόνου $x(k+1) = Ax(k) + bu(k)$ με

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & -1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

ΛΥΣΗ: α) Ισχύει ότι

$$\Phi(k) = A^k = z^{-1}\left\{z(ZI - A)^{-1}\right\}$$

$$(ZI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{z+1}{(z+0.2)(z+0.8)} & \dfrac{1}{(z+0.2)(z+0.8)} \\ \dfrac{-0,16}{(z+0.2)(z+0.8)} & \dfrac{z}{(z+0.2)(z+0.8)} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$(ZI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{4z/3}{z+0.2} - \dfrac{z/3}{z+0.8} & \dfrac{5z/3}{z+0.2} - \dfrac{5z/3}{z+0.8} \\ \dfrac{-0,8z/3}{z+0.2} + \dfrac{0,8z/3}{z+0.8} & \dfrac{-z/3}{z+0.2} + \dfrac{4z/3}{z+0.8} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Phi(k) = \begin{bmatrix} \dfrac{4(-0.2)^k}{3} - \dfrac{(-0.8)^k}{3} & \dfrac{5(-0.2)^k}{3} - \dfrac{5(-0.8)^k}{3} \\ \dfrac{-0.8(-0.2)^k}{3} + \dfrac{0,8(-0.8)^k}{3} & -\dfrac{(-0.2)^k}{3} + \dfrac{4(-0.8)^k}{3} \end{bmatrix} \quad (1)$$

ΑΣΚΗΣΗ 3. Δίνεται το σύστημα διακριτού χρόνου με εξίσωση διαφορών:

$$y(k+2) + 5y(k+1) + 3y(k) = u(k+1) + 2u(k)$$

Να υπολογιστούν α) η συνάρτηση μεταφοράς και β) το μοντέλο στο χώρο κατάστασης.

ΛΥΣΗ: α) Μετασχηματίζουμε κατά Ζτην Ε.Δ θεωρώντας μηδενικές αρχικές συνθήκες οπότε:

$$z[y(k+2) + 5y(k+1) + 3y(k)] = z[u(k+1) + 2u(k)] \Rightarrow$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z+2}{z^2 + 5z + 3} \quad (1)$$

β) Ορίζουμε τις μεταβλητές κατάστασης ως :

$$\begin{aligned} x_1(k) &= y(k) \\ x_2(k) &= x_1(k+1) - u(k) \qquad (2) \end{aligned}$$

Εισάγοντας τις μεταβλητές κατάστασης στην Ε.Δ. του συστήματος έχουμε:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_2(k) + u(k) \\ x_2(k+1) &= -3x_1(k) - 5x_2(k) - 3u(k) \qquad (3) \end{aligned}$$

Δηλαδή $x(k+1) = Ax(k) + bu(k)$

με $x(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} \quad , A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -5 \end{bmatrix} \quad , b = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} \quad (4)$

ΑΣΚΗΣΗ 4. Να βρεθεί ο μεταβατικός πίνακας του διακριτού συστήματος με μοντέλο στο χώρο κατάστασης. Είναι το σύστημα ελέγξιμο;

$$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix}$$

ΛΥΣΗ: Ο μεταβατικός πίνακας του διακριτού συστήματος υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\Phi(k) = A^k = IZT[z(zI - A)^{-1}] \quad , k \geq 1 \quad (1)$$

Το μοντέλο στο χώρο κατάστασης είναι:

$$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(k) \quad (2)$$

$$y(k) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} \qquad (3)$$

Επομένως

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & -1 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ \kappa\alpha\iota\ c^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Υπολογισμός του $(zI - A)^{-1}$:

$$(zI - A)^{-1} = \left(\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & -1 \end{pmatrix} \right)^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} z & -1 \\ 0.16 & z+1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{z(z+1)+0.16} \begin{bmatrix} z+1 & 1 \\ -0.16 & z \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{(z+0.2)(z+0.8)} \begin{bmatrix} z+1 & 1 \\ -0.16 & z \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (zI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{z+1}{(z+0.2)(z+0.8)} & \dfrac{1}{(z+0.2)(z+0.8)} \\ \dfrac{-0.16}{(z+0.2)(z+0.8)} & \dfrac{z}{(z+0.2)(z+0.8)} \end{bmatrix} \qquad (5)$$

Για να βρούμε τον μεταβατικό πίνακα $\Phi(k)$ αρκεί να υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Ζ κάθε όρου της σχέσης (5).

$$\Phi(k) = A^k = Z^{-1}[(zI - A)^{-1} z]$$

$$= Z^{-1} \begin{bmatrix} \dfrac{z(z+1)}{(z+0.2)(z+0.8)} & \dfrac{z}{(z+0.2)(z+0.8)} \\ \dfrac{-0.16z}{(z+0.2)(z+0.8)} & \dfrac{z^2}{(z+0.2)(z+0.8)} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Phi(k) = Z^{-1} \begin{bmatrix} \dfrac{\frac{4}{3}}{z+0.2} + \dfrac{-\frac{1}{3}}{z+0.8} & \dfrac{\frac{5}{3}}{z+0.2} + \dfrac{-\frac{5}{3}}{z+0.8} \\ \dfrac{-\frac{0.8}{3}}{z+0.2} + \dfrac{\frac{0.8}{3}}{z+0.8} & \dfrac{-\frac{1}{3}}{z+0.2} + \dfrac{\frac{4}{3}}{z+0.8} \end{bmatrix} \qquad (6)$$

Επομένως

$$\Phi(k) = A^k = Z^{-1}[(zI - A)^{-1} z]$$
$$= \begin{bmatrix} \frac{4}{3}(-0.2)^k - \frac{1}{3}(-0.8)^k & \frac{5}{3}(-0.2)^k - \frac{5}{3}(-0.8)^k \\ -\frac{0.8}{3}(-0.2)^k + \frac{0.8}{3}(-0.8)^k & -\frac{1}{3}(-0.2)^k + \frac{4}{3}(-0.8)^k \end{bmatrix} \quad (7)$$

Ο πίνακας ελεγξιμότητας δίνεται από τη σχέση:

$$S = [B \vdots AB \vdots A^2 B \vdots \ldots A^{n-1} B] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\det[B \ \ \mathrm{AB}] = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = 0 - 1 = -1 \neq 0$$

Η τάξη του πίνακα S είναι 2 οπότε το σύστημα είναι ελέγξιμο.

ΑΣΚΗΣΗ 5. Δίνεται το μοντέλο στο χώρο κατάστασης διακριτού συστήματος και ζητείται να εξεταστεί αν είναι παρατηρήσιμο.

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1 & -0.3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -0.5 \end{bmatrix} u(k)$$
$$y(k) = (1 \quad -0.5) \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix}$$

ΛΥΣΗ: Ο πίνακας παρατηρησιμότητας δίνεται από τη σχέση:

$$R = \begin{pmatrix} C^T \\ C^T A \\ \vdots \\ C^T A^{n-1} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

$$c^T = \begin{pmatrix} 1 & -0.5 \end{pmatrix}$$

$$c^T A = \begin{pmatrix} 1 & -0.5 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1.1 & -0.3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = (0.6 \quad -0.3)$$

$$\begin{bmatrix} c^T \\ c^T A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ 0.6 & -0.3 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

$$\det \begin{bmatrix} c^T \\ c^T A \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ 0.6 & -0.3 \end{bmatrix} = 0$$

Η τάξη του πίνακα R είναι 1 οπότε το σύστημα δεν είναι παρατηρήσιμο.